ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ELEKTRYKA z. 61 Nr kol. 553

Władysław PASZEK

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

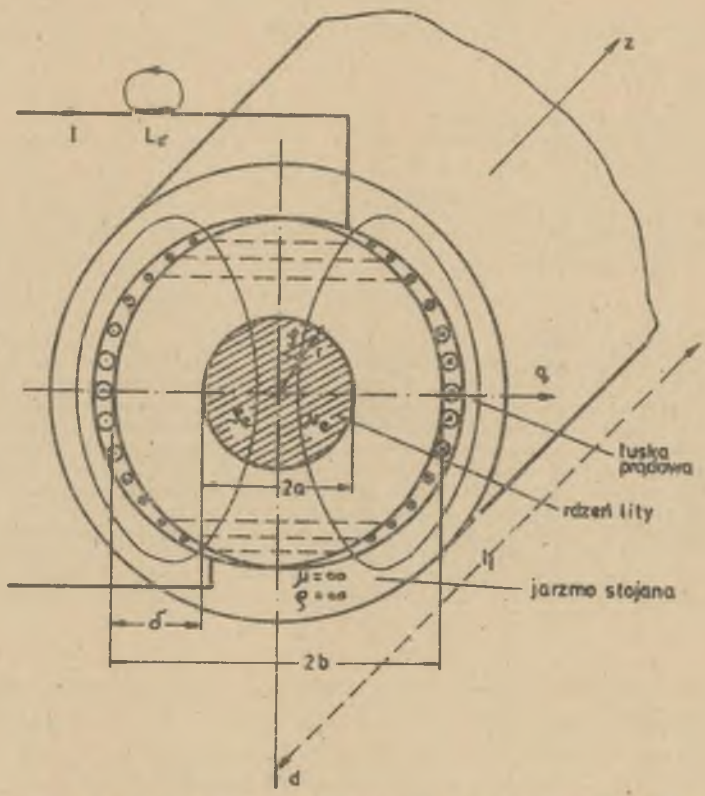
# MASZYNA INDUKCYJNA Z MASYWNYM WIRNIKIEM FERROMAGNETYCZNYM

Streszczenie. Z rozwiązania cząstkowych równań różniczkowych Maxwella wyprowadzono we współrzędnych Parka indukcyjność operatorową uzwojenia stojana symetrycznej wielofazowej maszyny indukcyjnej z litym ferromagnetycznym wirnikiem. Operatorowy schemat zastępczy uzwojenia stojana zawiera elementy, w których występują funkcje Bessela. Przy założeniu granicznych wartości $\mu$, $\varrho$ w bloku litym upraszcza się operatorowy schemat zastępczy uwzględniający rozłożone stałe wirnika. Przedstawiono przybliżone schematy zastępcze o stałych skupionych, którego elementy wynikają ze syntetycznej stałej czasowej bloku litego. Schemat ten jest przydatny do analizy nieustalonych stanów elektrodynamicznych. Przedstawiono poślizgową charakterystykę admitancji stojana wielofazowej maszyny indukcyjnej z litym wirnikiem jako charakterystykę dla symetrycznych stanów ustalonych.

Wirnik wykonany z litej stali o gładkiej powierzchni stalowej jest szczególnym przypadkiem wirnika maszyny asynchronicznej. Rolę uzwojeń spełniają obwody prądów wirowych. Rozpatrzymy własności tej maszyny przy poczynieniu szeregu uproszczeń w jej modelu matematycznym (rys. 1). Po dokonaniu ortogonalnej transformacji Parka rozpatruje się dwufazowe uzwojenia zastępczego stojana w osi d i q, jako uzwojenia o rozłożeniu sinusoidalnym.

Wprawdzie na rys. 1 przedstawiono model maszyny dwubiegunowej, jednakże relacje będą dotyczyć symetrycznej maszyny $2p_b$ biegunowej. Założono cylindryczny walec lity wirnika o stałej przenikalności $\mu_e$ i rezystywności $\varrho_e$, o długości $l_i$ i o promieniu a, wycięty z nieskończenie długiego wirnika (przy pominięciu wpływu końców rzeczywistego cylindra wirnika). Szczelina powietrza $\delta_i = b - a$ przegradza blok lity pd nadprzewodzącego magnetycznie idealnie blachowanego stojana $\varrho = \infty$, $\mu = \infty$. W sąsiedztwie wewnętrznej pobocznicy walcowej stojana jest umieszczone w osi d umyślone uzwojenie o rozłożeniu sinusoidalnym, wytwarzające okład prądu $A_1(t) = A_{1m}(t) \sin p_b \varphi$ nieruchome względem wirnika. Podobne relacje obowiązują dla osi q, jednakże z uwagi na symetryczne relacje pomija się w dalszym ciągu rozważań pola elektromagnetycznego wpływ uzwojenia q.

Rozpatrzymy, za pomocą rachunku operatorowego przy zerowych warunkach początkowych, strumień $\Psi(p)$ sprzężony z uzwojeniem przy wymuszeniu prądowym $I(p)$ i w konsekwencji wyznaczymy operatorową indukcyjność stojana $L(p) = \frac{\Psi(p)}{I(p)}$.




Rys. 1. Model maszyny indukcyjnej z litym wirnikiem

Założenie stałej przenikalności magnetycznej bloku litego stanowi najbardziej wątpliwe założenie upraszczające, ponieważ nieliniowość charakterystyki magnesowania stali ferromagnetycznej wirnika wpływa na uzmiennienie lokalnej przenikalności. Z drugiej jednak strony, ścisłość analizy ogólnej jest ograniczona do przypadku stałej przenikalności. Na podstawie rozwiązań analitycznych można otrzymać jednak relacje, które przy poczynieniu "a posteriori" założeń granicznych $\mu$ i $\varrho$ dają dość dobre przybliżenie modelu do obiektu rzeczywistego. Identyfikacja obiektu według struktury tego modelu umożliwia pomiarowe wyznaczenie ostatecznych parametrów elektromagnetycznych maszyny.

Wychodząc z równań Maxwella dla pola elektromagnetycznego przy pominięciu wpływu prądu przesunięcia $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ jako znikomo małego

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} = \frac{\vec{E}}{\varrho} \tag{1b}$$

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{1c}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{1d}$$

Transformatę operatorową wielkości elektromagnetycznych $\vec{B}$, $\vec{E}$ poszukuje się za pośrednictwem potencjału wektorowego $\vec{F}$ spełniającego zależności

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{F} \tag{2a}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = 0 \tag{2b}$$

Z równań (1b) i (1c) oraz (2a) wynika

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{F} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{F} - \Delta\vec{F} = \mu\vec{J}$$

Uwzględniając wzór (2b)

$$-\Delta\vec{F} = \mu\vec{J} \tag{2c}$$

Uwzględniając, że w szczelinie gęstość prądu $\vec{J}$ jest równa zero (pomija się prąd przesunięcia) obowiązuje równanie (2c) określające laplasjan potencjału wektorowego

$$\Delta\vec{F} = \begin{cases} 0 & \text{w szczelinie} \\ -\mu\vec{J} & \text{w bloku litym} \end{cases} \tag{2d}$$

W układzie współrzędnych cylindrycznych potencjał wektorowy $\vec{F}$ i gęstość prądu w bloku litym $\vec{J}$ są wektorami skierowanymi w osi z

$$F_z(r, \varphi, p) = F(r, \varphi, p) \quad \text{oraz} \quad J_z(r, \varphi, p) = J(r, \varphi, p)$$

$$\Delta F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = \begin{cases} 0 - \text{w szczelinie} \\ -\mu J(r, \varphi, p) \text{ w bloku litym} \end{cases} \tag{2e}$$

Przy posłużeniu się metodą rozdzielenia zmiennych zakładamy

$$F(r, \varphi, p) = R(r, p)\,\Phi(\varphi) \tag{3}$$

Stąd wynika

$$F(r,\varphi,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{3n}(p)\,r^{n} + C_{4n}(p)\,\frac{1}{r^{n}}\right](C_{1n}\sin n\varphi + C_{2n}\cos n\varphi) \tag{4a}$$

Po uwzględnieniu warunku granicznego $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J}$ na łusce prądowej o okładzie prądu $A_{1m}\sin p_b\varphi$ pozostają we wzorze (4a) składniki zawierające tylko stopień $n = p_b$

$$F(r,\varphi,p) = \left[C_3(p)\,r^{p_b} + C_4(p)\,r^{-p_b}\right]\sin p_b\varphi \tag{4b}$$

Równanie (2) dla obszaru bloku litego można przedstawić w postaci

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - p\frac{\mu_e}{\varrho_e}F = 0$$

Uwzględniając podstawienie (3)

$$-\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{d^2\Phi}{d^2\varphi} = n^2 \tag{5a}$$

$$\frac{r}{R}\cdot\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - p\frac{\mu_e r^2}{\varrho_e} = n^2, \tag{5b}$$

gdzie $n = 0,1,2,3\ldots$

Po przekształceniu równania (5b) otrzymuje się równanie różniczkowe Bessala

$$\frac{d^2R}{d\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{dR}{d\nu} - \left(1 + \frac{n^2}{\nu^2}\right)R = 0, \tag{6a}$$

gdzie

$$\nu = \sqrt{pr^2\frac{\mu_e}{\varrho_e}},$$

którego rozwiązanie

$$R(r,p) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[C_{5n}(p)\,I_n(\nu) + C_{6n}(p)\,K_n\nu)\right], \tag{6b}$$

przy czym $I_n$, $K_n$ - zmodyfikowane funkcje Bessela n-tego rzędu argumentu $\nu$, $C_{5n}(p)$, $C_{6n}(p)$ stałe całkowania. Ponieważ $K_n(\nu)$ rośnie nieograniczenie dla $\nu = 0$ i odpowiednio dla $r = 0$, należy przyjąć $C_{6n}(p) = 0$. Sinusoidalny rozkład liniowej gęstości prądowej okładu prądu łuski uzwojenia narzuca uwzględnienie tylko składników zawierających $p_b$ - ty stopień n.

$$F(r, \varphi, p) = I_p(\nu)\,\xi(p)\,A_{1m}(p)\,\sin p_b\varphi \tag{7}$$

Warunki brzegowe (ciągłość składowej normalnej indukcji na granicy ośrodków, różnica składowej stycznej natężenia pola magnetycznego równa okładowi prądu w łusce prądowej, a równa zero na pozostałych granicach ośrodków) ostatecznie wyznaczają $C_3(p) = \alpha(p)$, $C_4(p) = \beta(p)$, $\xi(p)$.

Z równania (1) wynika składowa promieniowa i styczna indukcji w szczelinie

$$B_r = \frac{1}{r}\, p_b\left(\alpha(p) r^{p_b} + \frac{\beta(p)}{r^{p_b}}\right) \cos p_b\varphi, \tag{8a}$$

$$B_\varphi = -\, p_b\left(\alpha(p)\, r^{p_b-1} - \frac{\beta(p)}{r^{p_b+1}}\right) \sin p_b\varphi, \tag{8b}$$

gdzie:

$$\alpha(p) = \frac{A_{1m}(p)\mu_o}{p_b\, a^{p_b-1}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{p_b-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{p_b-1} \cdot N} \tag{8c}$$

$$\beta(p) = -\frac{A_{1m}(p)\mu_o}{p_b} \cdot \frac{b^{p_b+1}\, N}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2(p_b-1)} + N} \tag{8d}$$

$$N = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\nu_a I_p'(\nu_a) - \frac{\mu_a}{\mu_o} p_b I_p(\nu_a)}{\nu_a I_p'(\nu_a) + \frac{\mu_a}{\mu_o} p_b I_p(\nu_a)} \tag{8e}$$

$$\gamma_a = \nu(r=a) = a\sqrt{p\,\frac{\mu_a}{\varrho_a}}$$

$$I'_p(\nu_a) = \frac{dI_p(\nu_a)}{d\nu_a} = I_{p-1}(\nu_a) - \frac{p_b}{\nu_a} I_p(\nu_a) = \frac{1}{2}\left[I_{p-1}(\nu_a) + I_{p+1}(\nu_a)\right]$$

Strumień przenikający przez podziałkę biegunową objęty przez uzwojenie i sprzężony z tym uzwojeniem

$$\Psi(p) = (z_c\ k_u)\ b\ l_i \int_{-\frac{\pi}{2p_b}}^{+\frac{\pi}{2p_b}} B_r(p)\ d\varphi = \left[\alpha(p) b^{p_b} + \frac{\beta(p)}{b^{p_b}}\right] 2 l_i\ z_c k_u$$

$(z_c k_u)$ - efektywna łączna liczba zwojów uzwojenia rozłożonych na całym obwodzie cylindra w osi d z uwzględnieniem współczynnika uzwojenia.

Indukcyjność operatorowa uzwojenia

$$L(p) = L_\sigma + \frac{\Psi(p)}{I(p)} = L_\sigma + \frac{(z_c\ k_u)^2\ \frac{4}{\pi}(\alpha_p b^{p_b} + \frac{\beta_p}{b^{p_b}})\ 2\ l_i}{A_{1m}(p)\ \ 2b} \tag{9a}$$

przy czym obowiązuje relacja między okładem prądu $A_{1m}(p)$ a prądem $I(p)$

$$\frac{4}{\pi p_b}(z_c\ k_u)\ I(p) = b\ A_{1m}(p) \int_0^{\frac{\pi}{p_b}} \sin(p_b\varphi)\ d\varphi = \frac{2b}{p_b} A_{1m}(p)$$

Po podstawieniu do (9a) wyrażeń (8c,d,e)

$$L(p) - L_\sigma = \frac{4}{\pi}(z_c k_u)^2 l_i \frac{\mu_e + k\frac{\mu_o}{p_b}\nu_a \frac{I'_p(\nu_a)}{I_p(\nu_a)}}{\frac{\nu_a I'_p(\nu_a)}{I_p(\nu_a)} + k\ p_b \frac{\mu_e}{\mu_o}}, \tag{9b}$$

gdzie

$$k = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p_b} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p_b} + 1}.$$

Indukcyjność $L(p = 0)$ w statycznym stanie ustalonym wynika przy $(\nu_a) = a\sqrt{p\frac{\mu_e}{\varsigma_e}} \to 0$

$$L(p = 0) = L_\sigma + \frac{4}{\pi}(z_c k_u)^2 l_i \frac{\mu_e + k\mu_o}{p_b + kp_b\frac{\mu_e}{\mu_o}}$$

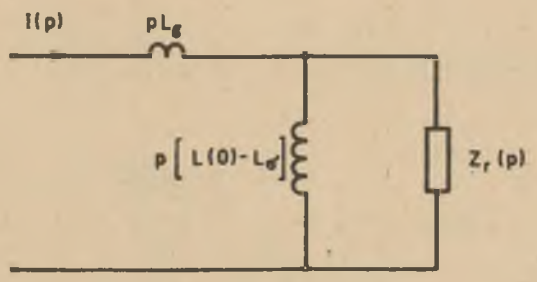
Dla małych wartości $\nu$ posłużono się w równaniu (9b) pierwszymi wyrazami rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji Bessela

$$\lim_{\nu_a \to 0} \frac{\nu_a I_p'(\nu_a)}{I_p(\nu_a)} = p_b$$

$$I_n(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{n+2k}}{(n+k)!\ k!}$$

Impedancję operatorową $p[L(p) - L_\sigma]$ można zastąpić równoległym układem impedancji $p[L(p=0) - L_\sigma]$ i impedancji $Z_r(p)$ (rys. 2)

$$\frac{1}{Z_r(p)} = \frac{1}{p[L(p) - L_\sigma]} - \frac{1}{L(0) - L_\sigma}$$




Rys. 2. Operatorowy schemat zastępczy uzwojenia stojana z wyodrębnioną impedancją wirnika

Po podstawieniu wzorów (9b) i (9c) otrzymuje się

$$Z_r(p) = p\,\frac{4}{\pi}(z_c k_u)^2 l_i\,\mu_e \frac{\left[1 + k\,\frac{\mu_o}{\mu_e p_b}\left(\frac{\nu_a I_{p-1}(\nu_a)}{I_p(\nu_a)} - p_b\right)\right]\left(1 + k\,\frac{\mu_o}{\mu_e}\right)}{\left(\frac{\nu_a I_{p-1}(\nu_a)}{I_p(\nu_a)} - 2p_b\right)(1 - k^2)} \tag{10a}$$

Przy małej szczelinie $b-a = \delta_i$ współczynnik $k \approx 0$ i stąd wynika przybliżenie

$$Z_r(p) \approx \frac{p\,\frac{4}{\pi}(z_c k_u)^2\, l_i\,\mu_e}{\frac{\nu_a I_{p-1}(\nu_a)}{I_p(\nu_a)} - 2p_b} \tag{10b}$$

Przestępne funkcje wyrażeń operatorowych na $L(p)$ jak i $Z_r(p)$ są nieprzydatne przy przejściu ze związków operatorowych do czasowych, przeto poszukuje się wyrażeń prostszych, wykorzystując niektóre graniczne związki fizykalne. Uwzględniwszy dużą przenikalność magnetyczną i małą rezystywność ferromagnetyka można założyć w granicy $\mu_e \longrightarrow \infty$, $\varrho_e \longrightarrow 0$ przy jednocześnie stałym współczynniku materiałowym ferromagnetyka $\mu_e \varrho_e = const$. Można wykazać, że przy zasilaniu uzwojenia prądem przemiennym, powyższym relacjom granicznym dla wielkości $\mu_e$ i $\varrho_e$ odpowiada ta sama moc tracona w litym na prądy wirowe jak przy $\mu_e$ i $\varrho_e$ różnych od tych wartości granicznych.

Dla dużych wartości $\nu_a$ odpowiednio do $\frac{\mu_e}{\varrho_e} \longrightarrow \infty$ można posłużyć się asymptotycznymi wartościami funkcji Bessela

$$I_n(\nu_a) \approx \frac{e^{\nu_a}}{\sqrt{2\pi\nu_a}}. \tag{11}$$

Przy uwzględnieniu równania (11) w równaniu (9b)

$$L(p) - L_\sigma = \frac{4}{\pi}(z_c k_u)^2\, l_i \frac{1 + k\,\frac{\mu_o}{p_b}\,\frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{\varrho_e \mu_e}}}{\frac{a\sqrt{p}}{\sqrt{\varrho_e \mu_e}} + k\,\frac{p_b}{\mu_o}} = L_{sw} + L_\mu \frac{1}{1 + \sqrt{pT_e}} \tag{12}$$

Uwzględniwszy, że odpowiednio do ortogonalnej transformacji Parka liczba efektywnych zwojów uzwojenia zastępczego maszyny i trójfazowym uzwojeniu stojana

$$(z_c k_u) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, z_1 k_{u1}$$

otrzymuje się ostatecznie

$$L_1(p) = L_{1s} + L_\mu \frac{1}{1 + \sqrt{pT_e}}$$

$$L_{1s} = L_{1\sigma} + L_{1sw}$$

przy czym

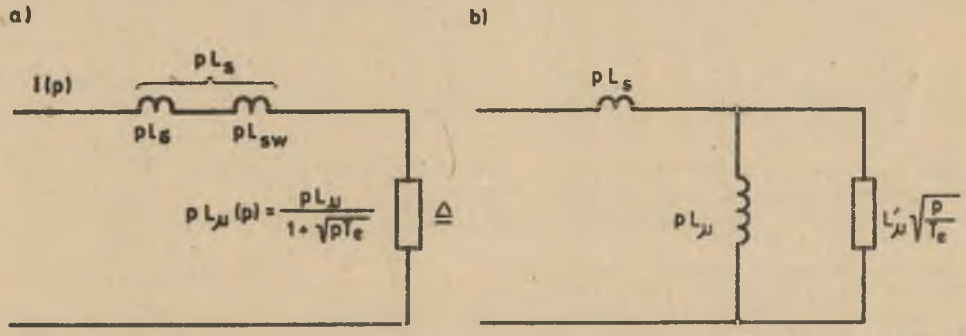
$L_{1sw} = \frac{6}{\pi}(z_1 k_{u1})^2\, l_i \frac{\mu_o}{p_b}$ - wewnętrzna indukcyjność rozproszenia związana ze strumieniem w obszarze szczeliny,

$L_\mu = \frac{6}{\pi}(z_1 k_u)^2 \cdot l_i \cdot \frac{\mu_o}{p_b}\left(\frac{1}{k} - k\right)$ - indukcyjność magnesująca,

$T_e = \frac{a^2 \mu_o^2}{k^2 p_b^2 \varrho_e \mu_e}$ - syntetyczna stała czasowa bloku litego wirnika,

$k = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p_b} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{2p_b} + 1}$ - współczynnik geometrii.

Z równania (13) wynika schemat zastępczy symetrycznej wielofazowej maszyny asynchronicznej dla wielkości osiowych (rys. 3a bądź 3b), który przedstawia relacje operatorowe wynikające z rozłożonych stałych litego wirnika. Schemat ten implikuje stosowanie rachunku operatorowego w analizie



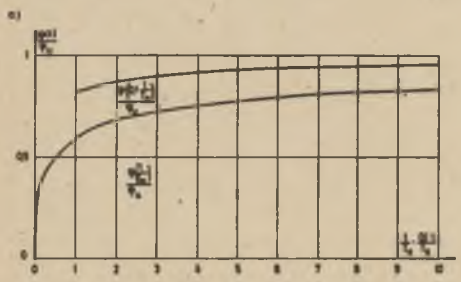

Rys. 3. Operatorowy schemat zastępczy stojana maszyny indukcyjnej przy granicznych wartościach $\varrho_e, \mu_e$ bloku litego

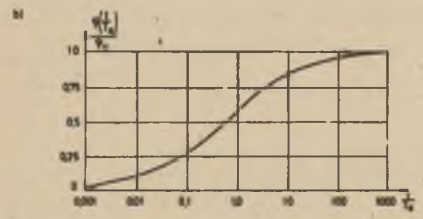
stanu nieustalonego. Z drugiej strony stosowalność rachunku operatorowego jest ograniczona dla liniowych równań różniczkowych. Tym samym nieliniowość dynamiczna typu $\Psi(t)\,\omega(t)$ występująca przy badaniu stanów elektrodynamicznych przy zmiennej prędkości wirowania uniemożliwia bezpośrednie wykorzystanie tego schematu zastępczego. Analiza przebiegów elektromagnetycznych przy stałej prędkości wirowania jest wprawdzie możliwa, lecz mocno utrudniona z uwagi na przestępną funkcję indukcyjności operatorowej zawierającą pierwiastek z operatora p. Można zastąpić blok lity w schemacie przybliżonym o stałych skupionych. Zastąpienie bloku litego dokonuje się na podstawie wyników analizy narastania liniozwojów zastępczego uzwojenia d stojana przy skokowym wymuszeniu prądu $I_d(t) = I_d 1(t)$.

Dla tego przebiegu są znane odwrotne transformaty w dziedzinie czasowej

$$\Psi_d(t) = I_d L_s = I_d L_\mu \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(1+\sqrt{pT_e})}\right\} = I_d L_\mu\left(1 - e^{\frac{t}{T_e}} \operatorname{erfc}\sqrt{\frac{t}{T_e}}\right),$$

gdzie erfc(x) - dopełnienie całki błędu Gaussa (funkcja stabelaryzowana).





Rys. 4. Przebieg narastania liniozwojów w maszynie przy skokowym wymuszeniu prądowym uzwojenia stojana

a) przy liniowej skali czasu,
b) przy logarytmicznej skali czasu

Rys. 4 przedstawia funkcję czasową narastania liniozwojów. Na podstawie badań tej funkcji okazała się przydatna jej aproksymacja funkcją wielowykładniczą

$$\frac{\Psi_\mu(t)}{I_d} = \sum_{k=1}^{4} L_{\mu k}\left(1 - e^{-\frac{t}{T_k}}\right) \qquad (14a)$$

$$\frac{L_{\mu 1,2,3,4}}{L_\mu} = 0{,}32;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}08$$

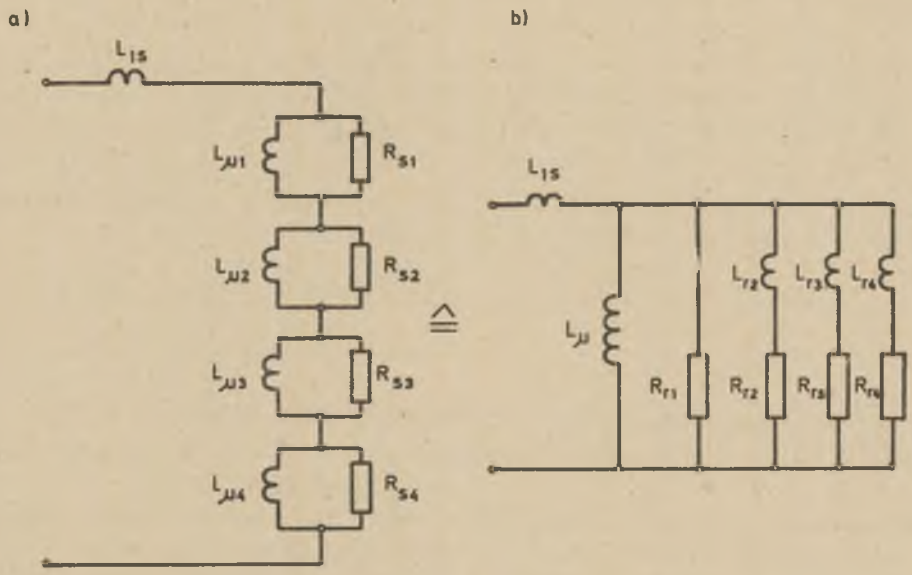
$$\frac{T_{1,2,3,4}}{T_e} = 0 \ldots 0{,}05;\ 1{,}25;17;300.$$

Średnikami wyodrębniono relacje dla 1 bądź 2,3,4.

Z równania (14a) wynika aproksymacja indukcyjności operatorowej L(p).

$$L(p) \approx \sum_{k=1}^{4} \frac{L_{\mu k}}{1 + p\tau_k} \tag{14b}$$

i schemat zastępczy o stałych skupionych (rys.5a).




Rys. 5. Schemat zastępczy z elementami o stałych skupionych

Schemat z rys. 5a można stransfigurować do formy przedstawionej na rysunku 5b, w którym indukcyjność $L_\mu$ jest bocznikowana dwójnikami $R_r$, $L_r$ o stałych skupionych. Gałęzie bocznikujące indukcyjność magnesowania reprezentują zastępcze obwody prądów wirowych w bloku litym wirnika, które wpływają na stan nieustalony podobnie jak obwody elektryczne wirników wieloklatkowych.

Wypadkowa impedancja $Z_2(p)$ bocznikująca indukcyjność $L_\mu$ wynika z równania

$$\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{1}{pL_\mu(p)} - \frac{1}{pL_\mu} = \frac{P(p)}{Q_3(p)}$$

$Q_3(p)$ - wielomian stopnia trzeciego, $P(p)$ - wielomian stopnia nie większego od 3.

Z rozkładu $\frac{1}{Z_2(p)}$ na ułamki proste wynika

$$\frac{1}{Z_2(p)} = \frac{P(p=\infty)}{Q_3(p=\infty)} + \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{R_{rk}} \cdot \frac{1}{1+pT_{rk}}, \tag{15a}$$

gdzie

$$T_{rk} = \frac{1}{-q_k}; \quad \frac{1}{R_{rk}} = \frac{P(p_k)}{p_k\left[\frac{dQ_3}{dp}\right]_{pk}}.$$

Po wykonaniu działania z równania (15a) otrzymuje się (formalnie z dokładnością do 4 miejsc)

$$\frac{T_{r\,1,2,3,4}}{T_e} = 0; \quad 0{,}5772 \ldots 0{,}5489; \quad 13{,}45 \ldots 13{,}45; \quad 286{,}4$$

$$\frac{T_e}{L_\mu} R_{r\,1,2,3,4} = 6732 \ldots \infty; \quad 0{,}7280 \ldots 1{,}030; \quad 0{,}3222 \ldots 0{,}2731;$$
$$0{,}04293 \ldots 0{,}04297 \tag{15b}$$

Współczynniki w równaniu (15b) odpowiadają w tej samej kolejności skrajnym wartościom stałej czasowej $T_1$ w równaniu (14a).

Przybliżone schematy zastępcze o stałych skupionych są w pełni przydatne w obliczeniach nieustalonego stanu elektrodynamicznego przy zmiennej prędkości obrotowej, a algorytmy obliczeń nie różnią się od analogicznych dla silników indukcyjnych z wirnikiem wieloklatkowym. Rozbieżność indukcyjności operatorowej stojana z równania (13) i przybliżonej z równania (14b), powodują rozbieżności w przebiegach czasowych polegające głównie na zmienności czasowej początkowych przebiegów nieustalonych, można je rozpoznać w szczególnych przypadkach przebiegów rozwiązalnych analitycznie przy stałej prędkości wirowania.

W uproszczonych relacjach można ograniczyć się do trójwykładniczego przybliżenia $\Psi(t)$ w równaniu (14a), przyjmując

$$\frac{L_{\mu 1,2,3}}{L_\mu} = 0{,}32; \; 0{,}4; \; 0{,}28$$
$$\frac{T_{1,2,3}}{T_e} = 0; \quad 1{,}25; \quad 17 \tag{14c}$$

Otrzymuje się wówczas w schemacie zastępczym z równoległymi impedancjami bocznikującymi indukcyjność $L_\mu$ następujące wartości parametrów

$$\left.\begin{aligned} \frac{T_{r\,1,2}}{T_e} &\approx 0{,}55; \qquad 12{,}4 \\ \frac{T_e}{L_\mu} R_{p1,2} &\approx 1{,}09; \quad 0{,}23 \end{aligned}\right\} \tag{15c}$$

W stanie ustalonym przy sinusoidalnym symetrycznym zasilaniu napięciem o częstotliwości kątowej $\omega_o$, symetrycznej wielofazowej maszyny indukcyjnej z litym wirnikiem przy stałym poślizgu, można posłużyć się indukcyjnością operatorową stojana z równania (13) w równaniu na admitancję stojana

$$\underline{Y}_1(s) = \frac{1}{\left[R_1 + (p + j\omega)L_1(p)\right]_{p=js\omega_o}} \tag{16a}$$

W szczególnym przypadku $R_1 = 0$

$$\underline{Y}_1(s) = \frac{1}{j\omega_o\left[L_s + \dfrac{L_\mu}{1 + \sqrt{j\,s\omega_o T_e}}\right]} = \frac{1}{jX_1} \cdot \frac{1 + \underline{B}\sqrt{s}}{1 + \underline{D}\sqrt{s}}, \tag{16b}$$

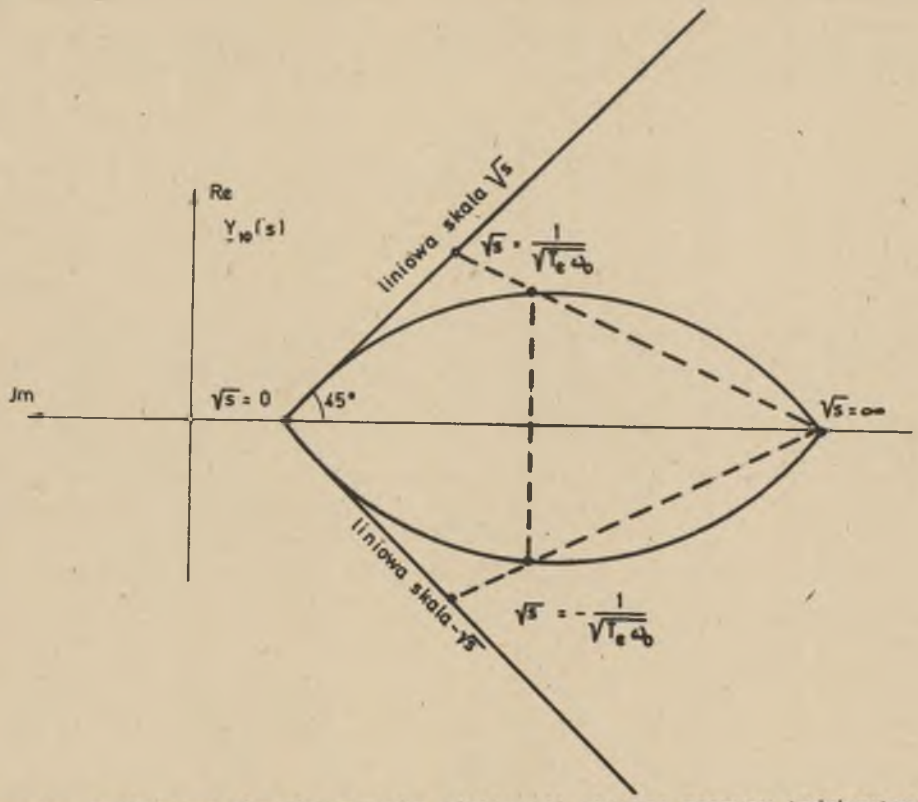
gdzie:

$$\underline{B} = \sqrt{j\omega_o T_e} = \sqrt{T_e\omega_o}\,e^{j\,45^\circ}$$

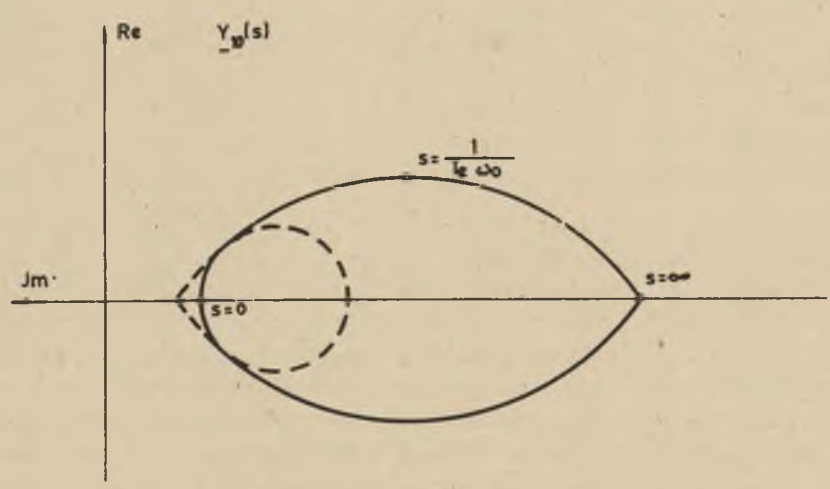
$$\underline{D} = \frac{X_{1s}}{X_1}\,\underline{B}$$

Równanie (16b) przedstawia transformację homograficzną ze względu na zmienny parametr rzeczywisty $\sqrt{s}$, której hodograf jest okręgiem. Uwzględniając to, że poślizg s zmienia znak, poślizgowa charakterystyka admitancji stojana i w konsekwencji hodograf wskazu prądu stojana przy zmiennym poślizgu lecz przy stałej amplitudzie napięcia zasilania składa się z dwóch okręgów skalowanych skalą liniową w funkcji pierwiastka poślizgu $\sqrt{s}$ - rys.6a.

Dla bardzo małych poślizgów obserwuje się rozbieżność charakterystyki admitancji charakterystyki wynikającej z równania (14b), co jest spowodowane tym, że przy $s \longrightarrow 0$ argument $\nu_s = s\sqrt{j\omega_o s\,\frac{\mu_s}{\varrho_o}}$ nie jest na tyle du-




Rys.6a. Poślizgowa charakterystyka admitancji stojana maszyny indukcyjnej przy zerowej rezystancji uzwojenia stojana




Rys.6b. Korektura charakterystyki dla małych poślizgów

ży by obowiązywały asymptotyczne wartości (11) funkcji Bessela. Skorygowany przebieg poślizgowej charakterystyki admitancji stojana dla małych poślizgów wynika z równania (10b). Impedancja $Z_2(p = js\omega_o)$ może być aproksymowana relacją [2]

$$Z_2(js\omega_o) \approx \frac{6}{\pi}(z_1 k_{u1})^2 l_i \left[\frac{2(p_b+1)\varrho_e}{s\, a^2} + j\frac{\omega_o \mu_e}{2(p_b+2)}\right] \tag{16c}$$

która wynika z rozwinięcia w szereg potęgowy funkcji Bessela w równaniu 10b. Konsekwencją równania (16c) jest kołowa charakterystyka admitancji przy małych poślizgach powodująca zaokrąglenie dwusegmentowej charakterystyki kołowej przy małych poślizgach (rys. 6b).

Posługując się przybliżeniem schematu zastępczego o stałych skupionych podanym na rys. 5b otrzymuje się podobne zaokrąglenie charakterystyk admitancji przy małych poślizgach (oczywiście zaokrąglenie jest spowodowane innymi przyczynami, jako konsekwencja aproksymacji). Zaokrąglenie, tym razem błędne, występuje również przy poślizgach $s \to \infty$ jeśli posłużyć się schematem zastępczym o stałych skupionych. Przy $R_1 \neq 0$ poślizgowa charakterystyka admitancji traci symetrię kształtu. Można znaleźć relację między krzywą $\underline{Y}_{10}(s)$ symetryczną przy $R_1 = 0$ a krzywą $\underline{Y}_1(s)$ przy $R_1 \neq 0$.

Z porównania (16a i b) wynika

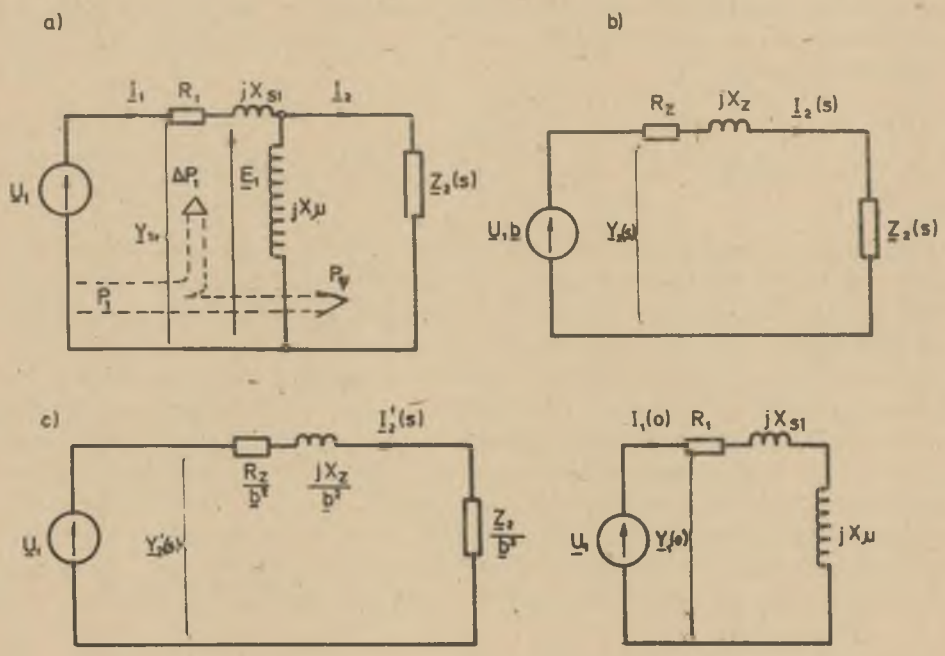
$$\underline{Y}_1(s) = \frac{\underline{Y}_{10}^2(s)}{R_1\, Y_{10}^2(s) + \underline{Y}_{10}^*(s)} = G_1(s) + j\, B_1(s) \tag{17a}$$

Przy wyjściu z $\underline{Y}_{10}(s)$ konstrukcja wykreślna charakterystyki $\underline{Y}_1(s)$ wynika z równania (17a)

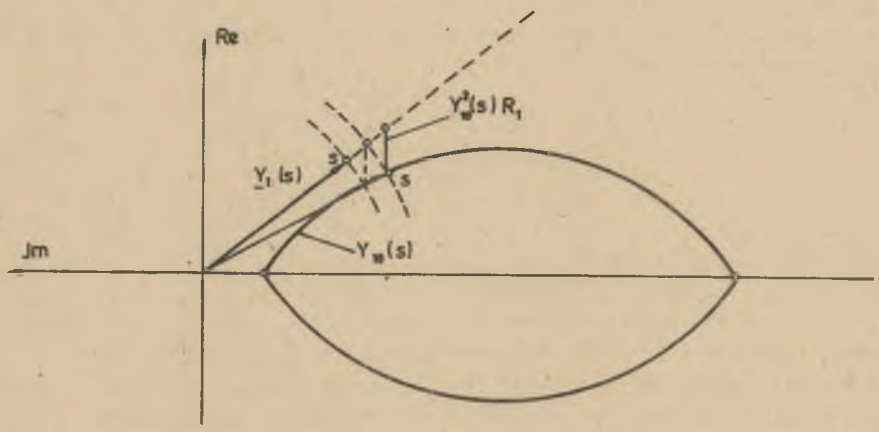
$$\left|\underline{Y}_1(s)\right| = \left|\frac{Y_{10}^2(s)}{RY_{10}^2(s) + \underline{Y}_{10}(s)}\right| \tag{17b}$$

$$\arg \underline{Y}_1(s) = \arg \underline{Y}_{10}(s) + R_1\, Y_{10}^2(s) \tag{17c}$$

Rys. 7 przedstawia schemat zastępczy maszyny dla symetrycznych stanów ustalonych (przy symetrycznym sinusoidalnym napięciu zasilania i przy stałej prędkości wirowania), który odtwarza relacje z równania 16a. Rys. 8a przedstawia konstrukcję wykreślną a rys. 8b charakterystykę $\underline{Y}_1(s)$ otrzymaną przy przesadnie powiększonej rezystancji uzwojeń stojana. Pominięto zaokrąglenie charakterystyki w pobliżu punktu $s = 0$. Charakterystyka $\underline{Y}_1(s)$

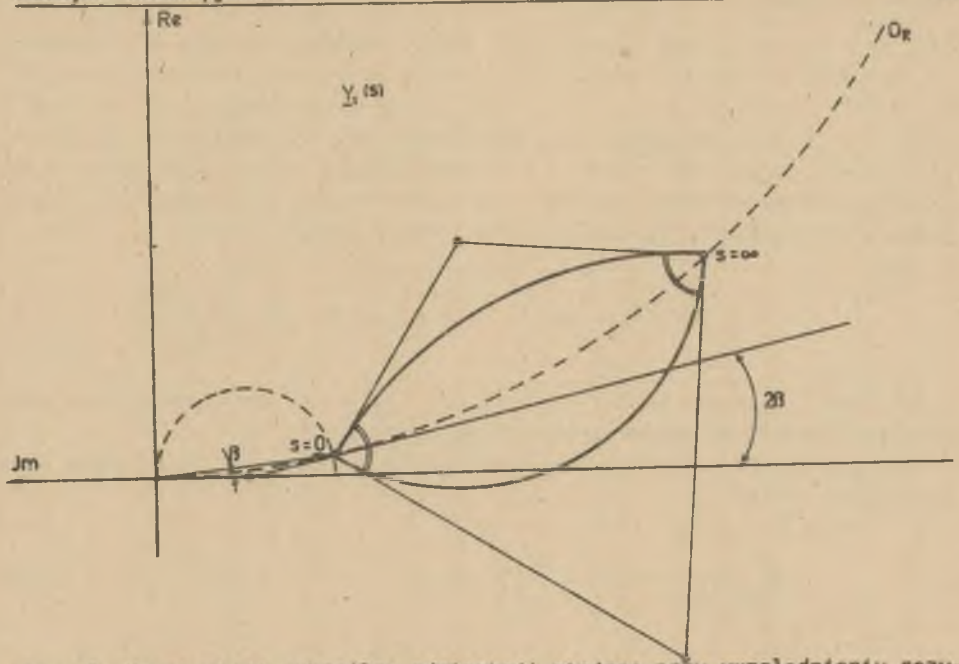



Rys. 7. Schemat zastępczy maszyny dla symetrycznych stanów ustalonych a) schemat ogólny, b) schemat dla wyodrębnionego obwodu wirnika otrzymany przy wykorzystaniu zasady Thevenina dla obwodu dwójnika $\underline{Z}_2(s)$ na schemacie zastępczym z rys. a, c) schemat dla wyodrębnionych admitancji $\underline{Y}_1(o)$ i $\underline{Y}_2'(s)$



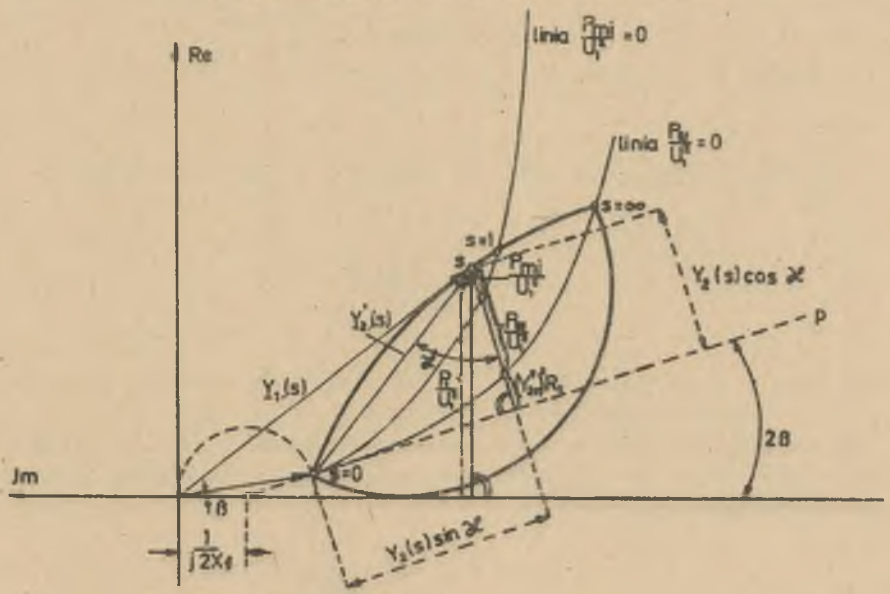

Rys. 8. Konstrukcja wykreślna admitancji stojana przy uwzględnieniu rezystancji uzwojenia stojana

a) konstrukcja wykreślna charakterystyki wyznaczona punkt po punkcie




Rys. 8. Konstrukcja wykreślna admitancji stojana przy uwzględnieniu rezystancji uzwojenia stojana

b) własności geometryczne charakterystyki




Rys. 8. Konstrukcja wykreślna admitancji stojana przy uwzględnieniu rezystancji uzwojenia stojana

c) bilanse mocy na charakterystyce admitancji stojana

jest w dalszym ciągu złożona z dwóch wycinków okręgów dla przedziału $0 \leqslant s < +\infty$ oraz $0 \geqslant s \geqslant -\infty$. Okręgi składowe przecinają się pod kątem $90^{\circ}$ w punktach $s = 0$ i $s = \infty$. Punkty przyporządkowane $s = \infty$ oraz $s = 0$ leżą na okręgu $O_R$ połowiącym kąty wierzchołkowe segmentów przy $s = 0$ oraz przy $s = \infty$ i stycznym do osi liczb urojonych w środku układu współrzędnych. Własności te są konsekwencją szczególnego przypadku odwzorowania konforemnego hodografu impedancji stojana

$$\underline{Z}_1(s) = R_1 + j\omega_0 L_1(p=js\omega_0) = R_1 + jX_1 \frac{1 + \underline{D}\sqrt{s}}{1 + \underline{B}\sqrt{s}}$$

oraz prostej łączącej punkty $\underline{Z}_1(s=0)$ i $\underline{Z}_1(s=\infty)$ na płaszczyźnie Gaussa inwertowanych do charakterystyki $\underline{Y}_1(s)$ i okręgu $O_R$.

Moc pobierana z sieci jest proporcjonalna do składowej rzeczywistej $G_1(s)$ admitancji $\underline{Y}_1^{\sim}(s)$.

$$\frac{P_1}{U_1^2} = G_1(s) \tag{18a}$$

Moment elektromagnetyczny maszyny

$$M_e(s) = p_b \operatorname{Re}\left[j\underline{\Psi}_1 \underline{I}_1^{*}\right] = \frac{p_b}{\omega_0} P_{\Psi}(s) \tag{18b}$$

$$\frac{P_{\Psi}}{U_1^2} = \frac{1}{U_1^2} \operatorname{Re}\left\{j\underline{\Psi}_1 \underline{I}_1^{*}\right\} = \frac{(I_2(s))^2}{U_1^2} \operatorname{Re}\left\{\underline{Z}_2(s)\right\} = \frac{1}{b^2} Y_2'(s) \operatorname{Re}\left\{\underline{Z}_2(s)\right\}$$

$$\underline{Y}_2'(s) = \frac{\underline{I}_2 \underline{b}}{\underline{U}_1}$$

Na schemacie zastępczym z rys. 7a zaznaczono moc pola wirującego przenoszoną z obwodu stojana do obwodu wirnika.

Ze schematu zastępczego z rys. 7a wynika schemat z rys. 7b po zastosowaniu zasady Thevenina dla wyodrębnionego obwodu wirnika oraz schemat z rys. 7c reprezentujący relacje

$$\underline{Y}_1(s) = \underline{Y}_1(0) + \underline{Y}_2'(s), \tag{19a}$$

gdzie

$$\underline{Y}_1(o) = \frac{1}{R_1 + j\omega_o(L_s = L_\mu)} = \frac{1}{R_1 + jX_1},$$

$$\underline{Y}_2'(s) = \frac{\underline{b}^2}{R_z + jX_z + \underline{Z}_2(s)} = \underline{b}^2\, \underline{Y}_2'(s), \qquad (19b)$$

przy czym

$$\underline{Z}_2(s) = \frac{jX_\mu}{\sqrt{T_e\, s\, j\omega_o}}$$

$$\underline{b} = \frac{jX_\mu}{R_1 + jX_1} = b\, e^{j\beta}; \quad R_z = R_1\, b^2, \; X_z = X_\mu\left(1 - \frac{X_\mu X_1}{R_1^2 + X_1^2}\right).$$

Można przedstawić admitancję $\underline{Y}_2'(s)$ w równaniu (19b) za pomocą wzajemnie prostopadłych składowych uwidocznionych na poślizgowej charakterystyce admitancji (rys. 8c)

$$\underline{Y}_2(s) = e^{j2\beta}\, \frac{b^2}{R_z + jX_z + \underline{Z}_2(s)} = e^{j2\beta}\, Y_2(s)\left[\cos\varkappa - j\sin\varkappa\right]$$

gdzie

$$\cos\varkappa - j\sin\varkappa = \frac{(R_z + \mathrm{Re}\left[\underline{Z}_2(s)\right]) - j(X_z + \mathrm{Im}\left[\underline{Z}_2(s)\right])}{\sqrt{(R_z + \mathrm{Re}\left[\underline{Z}_2(s)\right])^2 + (X_z + \mathrm{Im}\left[\underline{Z}_2(s)\right])^2}}$$

Uwzględniwszy, że

$$Y_2'(s)\cos\varkappa = (Y_2'(s))^2\, \frac{R_z + \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_2(s)\right\}}{b^2}$$

otrzymuje się

$$\frac{P_r'}{U_1^2} = (Y_{2r}'(s))^2\, \frac{\mathrm{Re}\left[\underline{Z}_2(s)\right]}{b^2} = Y_2'(s)\cos\varkappa - (Y_2')^2\, \frac{R_z}{b^2}$$

i ostatecznie

$$\frac{P_\psi}{U_1^2} = Y_2'(s)\cos\varkappa - (Y_{2r}'(s))^2 R_1. \tag{19c}$$

Z równania 19c wynika konstrukcja krzywoliniowej osi zerowej mocy pola wirującego na poślizgowej charakterystyce admitancji. Zależność na idealną moc mechaniczną

$$\frac{P_{mi}}{U_1^2} = \frac{1}{p_b}\,\frac{M_e\omega}{U_1^2} = \frac{P_\psi(1-2)}{U_1^2} = \frac{P_\psi - P_2}{U_1^2} \tag{19b}$$

gdzie:

$P_2 = s\,P_\psi$ - moc tracona w obwodach elektrycznych wirnika.

Z równania 19d wynika konstrukcja krzywoliniowej osi zerowej mocy mechanicznej idealnej.

Wartości $\frac{P_\psi}{U_1^2}$ oraz $\frac{P_{mi}}{U_1^2}$ są reprezentowane na poślizgowej charakterystyce admitancji stojana, jako odległości punktu $Y_1(s)$ od odnośnej osi zerowej, liczone prostopadle do prostej wykreślonej z punktu $Y_1(s=o)$ pod kątem $2\beta$ względem ujemnej osi liczb urojonych.

Straty uzwojenia stojnana

$$\frac{\Delta P_1}{U_1^2} = \left(G_1(s) - \frac{P_\psi}{U_1^2}\right). \tag{19e}$$

LITERATURA


[1] Guillemin S.A.: Mathematische Methoden des Ingenieurs.Oldenbourg Verlag München, Wien, 1966.

[2] Kovacs K.P., Racz I.: Transiente Vorgänge in Wechselstrommaschinen Verlag der Ung. Akademie der Wiss. Budapest, 1959.

[3] Paszek W., Janson Z., Rozewicz Z.: Transmitancje i funkcje przejścia turbogeneratora z litym wirnikiem. Archiwum Elektrotechniki 4/1976.

[4] Wood AI.: An analysis of solid rotor machines Part I. Trans. AIEE February 1960, s. 1657...65.
Wood AI. Part II Trans. AIEE February 1960, s. 1966...73.

[5] Mc Connel H.M.: The polyphase induction motor with solid rotor.Trans. AIEE April 1953, s. 103...11.

АСИНХРОННАЯ МАШИНА С МАССИВНЫМ ФЕРРОМАГНИТНЫМ РОТОРОМ

Р е з ю м е

Из решения дифференциальных уравнений максвелля в частных производных выводится – в координатах Парка – в операторном виде уравнение индуктивности обмоток статора симметрической многофазной асинхронной машины с массивным ферромагнитным ротором. Операторная схема замещения обмоток статора имеет элементы в которых выступают функции Бесселя. Принимая граничные значения $\mu$, $\varrho$ в литом блоке получается упрощение операторной схемы замещения учитывающей распределённые постоянные ротора. Предложены приблизительные схемы замещения со сосредоточными постоянными, элементы которых следуют из синтетической электромагнитной постоянной времени массивного блока. Эти схемы можно употреблять при анализу электродинамических переходных процессов. Показано характеристику функции скольжения адмитанции статора многофазной асинхронной машины с массивным ротором, как характеристику для симметрических установившихся режимов.

INDUCTION MACHINE WITH FERROMAGNETIC SOLID ROTOR

S u m m a r y

From the solution of Maxwell's partial differential equations there was derived in Park's coordinates the operational stator winding inductance of the symmetrical polyphase induction machine with solid ferromagnetic rotor. The operational equivalent circuit consists of elements in which there appear Bessel functions. The assumption of limit values $\mu$, $\varrho$ in the solid rotor reduces the operational equivalent circuit, which takes into account the distributed constants of the rotor. The approximative equivalent circuits consist of lumped constants deduced from the synthetic time constant of the solid rotor. This equivalent circuit is available for electrodynamic transients investigation. The steady state slip dependent stator admittance plot of the polyphase induction machine was presented.