

Krzysztof KLUSZCZYŃSKI

Zakład Maszyn Elektrycznych  
Politechniki Śląskiej

PODSTAWY TEORETYCZNE TRANSFORMACJI K-OSIOWEJ  
I JEJ ZASTOSOWANIE W ANALIZIE STANÓW NIEUSTALONYCH  
ROZGAŁĘŻONYCH OBWODÓW ELEKTROMAGNETYCZNYCH

**Streszczenie.** Wykazano, że dla szerokiej klasy rozgałęzionych obwodów elektromagnetycznych możliwy jest rozkład ortogonalny wektora prądów w uzwojeniach na składowe: aktywną i zerową.

Wprowadzono nowy - k-osiowy układ współrzędnych, osiągalny za pomocą transformacji ortogonalnej w dziedzinie liczb rzeczywistych, w którym znacznie upraszczają się równania różniczkowe stanu nieustalonego rozgałęzionego obwodu elektromagnetycznego.

### 1. Model obwodu elektromagnetycznego. Założenia upraszczające

Rozważmy obwód elektromagnetyczny o rdzeniu wykonanym z materiału ferromagnetycznego, o prostoliniowej i jednoznacznej charakterystyce magnesowania, w którym - na skutek pakietowania i związanej rezystancji blach magnetycznych - można pominąć prądy wirowe. Jeśli wymiary przekroju poprzecznego rdzenia są małe w stosunku do wymiarów geometrycznych samego rdzenia, analizę stanu magnetycznego związanego ze strumieniem głównym (strumień główny jest to część strumienia rzeczywistego, zamykająca się wyłącznie w rdzeniu) prowadzić możemy w oparciu o prawa, które przez analogię do teorii obwodów elektrycznych noszą nazwę I i II prawa Kirchoffa:

$$\sum_{i=1}^k i_1 z_i = \sum_{i=1}^l H_i l_i \quad (1)$$

gdzie:

$l_i$  - średnia długość drogi magnetycznej strumienia głównego w  $i$ -tym elemencie obwodu magnetycznego,

$H_i$  - średnia i stała na przekroju poprzecznym  $i$ -tego elementu wartość natężenia pola magnetycznego,

$i_1$  - wartość prądu w  $i$ -tym uzwojeniu,

$z_i$  - liczba zwojów  $i$ -tego uzwojenia,

$k$  - liczba uzwojeń, wchodzących w skład analizowanego oczka,

$l$  - liczba elementów, wchodzących w skład analizowanego oczka

$$\sum_{i=1}^m \Phi_i = 0, \quad (2)$$

gdzie:

$\Phi_i$  - strumień główny  $i$ -tej gałęzi, dopływający do danego węzła,

$m$  - liczba gałęzi, zbiegających się w analizowanym węźle.

Rozgałęziony rdzeń obwodu magnetycznego, spełniający założenia upraszczające, nazywać będziemy siecią magnetyczną. Uzwojenia elektryczne, znajdujące się na rdzeniu obwodu magnetycznego, mogą być galwanicznie niezależne lub też - połączone, tworząc sieć elektryczną.

W ogólnym przypadku obwód elektromagnetyczny stanowi więc układ dwóch wzajemnie powiązanych sieci: elektrycznej, odpowiedzialnej za wzniesienie strumienia magnetycznego oraz magnetycznej, przewodzącej strumień magnetyczny.

Stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego o niezależnych galwanicznie  $n$ -uzwojeniach opisuje w naturalnym układzie współrzędnych następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & 0 \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{e1} & & & 0 \\ & L_{e2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & L_{en} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

$u_i, i_i, \Phi_i$  - napięcie, prąd i strumień skojarzony z  $i$ -tym uzwojeniem,

$R_i, L_{ei}$  - rezystancja i indukcyjność rozproszenia  $i$ -tego uzwojenia,

$M_{ij}$  - indukcyjność wzajemna główna  $i$ -tego i  $j$ -tego uzwojenia.

## 2. Przestrzeń wielkości elektrycznych i magnetycznych obwodu elektromagnetycznego

Wielkości fizyczne, elektryczne lub magnetyczne, związane z danym uzwojeniem, nazywać będziemy wielkościami uzwojeniowymi. Wartości chwilowe wielkości uzwojeniowych n-uzwojeniowego obwodu elektromagnetycznego zapisywać można w postaci ciągów n-elementowych liczb rzeczywistych:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1(t), v_2(t) \dots v_n(t) \\ v_i(t) \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \\ i = 1 \dots n, \end{array} \right. \quad (5)$$

gdzie:

$v_i(t)$  - wartość chwilowa dla chwili  $t$  pewnej wielkości uzwojeniowej i-tego uzwojenia obwodu elektromagnetycznego.

Zbiór wszystkich n-elementowych ciągów liczb rzeczywistych (5) traktować możemy jako rzeczywistą przestrzeń  $V$  nad ciałem liczb rzeczywistych, a elementy zbioru - nazywać wektorami i oznaczać symbolem  $v$ . W zapisie macierzowym wektory  $v \in V$  przyjmują postać n-wierszowych macierzy jednokolumnowych:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix} \quad (6)$$

gdzie:

$v_i(t)$  - i-ta współrzędna wektora  $v$  w naturalnym układzie współrzędnych.

Fizykalnie, wektory przestrzeni  $V$  reprezentować mogą napięcia na zaciskach uzwojeń (napięcia uzwojeniowe), prądy w uzwojeniach (prądy uzwojeniowe) lub też strumienie skojarzone z poszczególnymi uzwojeniami (strumienie skojarzone uzwojeniowe). Odpowiednio też zbiór wektorów, odpowiadających napięciom uzwojeniowym, nazywać będziemy przestrzenią wektorową napięć  $U$ , zbiór wektorów prądów uzwojeniowych - przestrzenią wektorową prądów  $I$ , a zbiór wektorów strumieni skojarzonych uzwojeniowych - przestrzenią wektorową strumieni skojarzonych  $\Psi$ . W przestrzeni wektorowej  $V$  wprowadźmy działanie iloczynu skalarnego, które w notacji macierzowej przyjmuje postać:

$$v^{(1)}(t) \cdot v^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^n v_i^{(1)}(t) v_i^{(2)}(t) = [v^{(1)}]^T [v^{(2)}] = [v_1^{(1)} \ v_2^{(1)} \ \dots \ v_n^{(1)}] \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \vdots \\ v_n^{(2)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$v^{(1)}, v^{(2)} \in V$$

Sens fizyczny iloczynu skalarnego jest oczywisty, gdy jednym z elementów jest wektor napięcia  $u(t) = \{u_1(t) \dots u_n(t)\}$  a drugim - wektor prądu  $i(t) = \{i_1(t) \dots i_n(t)\}$ .

Wartość iloczynu skalarnego:

$$p(t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) i_i(t) = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

jest wówczas równa mocy chwilowej, pobieranej przez n-uzwojeń obwodu elektromagnetycznego.

W oparciu o działanie iloczynu skalarnego definiujemy normę (długość)  $\|v\|$  wektora  $v \in V$ :

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i(t) v_i(t)} = \sqrt{[v(t)]^T [v(t)]}. \quad (9)$$

Sens fizyczny normy jest dla wektorów prądów związany z - przypisywaną prądom przemiennym periodycznym o okresie  $T$  - ekwiwalentną pod względem cieplnym wartością prądu stałego, zwaną wartością skuteczną. Wartość skuteczną prądu uzwojeniowego i-tego uzwojenia wynosi:

$$I_1 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}, \quad (10)$$

zaś suma kwadratów skutecznych wartości prądów uzwojeniowych wszystkich n-uzwojeń obwodu elektromagnetycznego:

$$\sum_{i=1}^n I_i^2 = \frac{1}{T} \left[ \int_0^T i_1^2(t) dt + \int_0^T i_2^2(t) dt + \dots + \int_0^T i_n^2(t) dt \right] =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{i}(t) \cdot \mathbf{i}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \|\mathbf{i}(t)\|^2 dt. \quad (11)$$

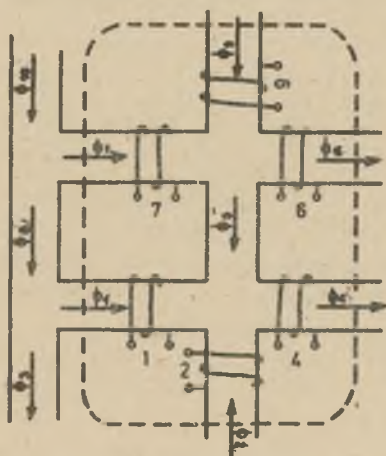
Widzimy, że suma kwadratów wartości skutecznych prądów uzwojeniowych wszystkich uzwojeń obwodu elektromagnetycznego równa się średniej wartości kwadratu normy wektora prądu za okres  $T$ .

### 3. Wymiar przestrzeni strumieni skojarzonych $\Psi$ sieci magnetycznej

Przestrzeń liniową  $V$  nazywamy  $n$ -wymiarową, jeśli istnieje w niej układ liniowo niezależny, złożony z  $n$  wektorów, a każdy układ, składający się z  $n+1$  wektorów jest liniowo zależny. Liczbę  $n$  nazywamy wymiarem przestrzeni liniowej  $V$  [5]. Piszemy:

$$\dim V = n. \quad (12)$$

Często do symbolu przestrzeni  $V$  dodajemy górny indeks, równy wymiarowi przestrzeni, pisząc  $V^n$ .



Rys. 1. Sieć magnetyczna z wyodrębnioną 1-tą częścią

Rozważmy płaską, spójną sieć magnetyczną o  $g_m$  - gałęziach,  $w_m$  - węzłach i  $n$ -uzwojeniach ( $n \leq g_m$ ), rozmieszczonych pojedynczo na dowolnych gałęziach sieci. Strumienie magnetyczne główne, w gałęziach z nawiniętymi uzwojeniami, nazywać będziemy strumieniami uzwojeniowymi, zaś strumienie pozostałych gałęzi (bez nawiniętych uzwojeń) - strumieniami bezuzwojeniowymi. Strumienie uzwojeniowe nie mogą być dowolne: przyjmować muszą wartości zgodne z równaniami ułożonymi na podstawie I prawa Kirchoffa dla wszystkich dających się wyodrębnić części sieci magnetycznej, łączących się z resztą obwodu magnetycznego wyłącznie poprzez gałęzie uzwojeniowe.

Dla  $i$ -tej wyodrębnionej części sieci magnetycznej z rys. 1, równanie Kirchoffa przyjmuje postać:

$$\Phi_1 + \Phi_2 - \Phi_4 - \Phi_6 + \Phi_7 + \Phi_9 = 0. \quad (13)$$

Ponieważ główny strumień skojarzony z  $i$ -tym uzwojeniem wynosi:

$$\Psi_i = z_i \Phi_i \quad i = 1 \dots n \quad (14)$$

równanie (13) przybiera w notacji macierzowej postać:

$$\left[ \begin{array}{cccccccc} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & 0 & -\frac{1}{z_4} & 0 & -\frac{1}{z_6} & \frac{1}{z_7} & 0 & \frac{1}{z_9} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$

Zerowanie się iloczynu skalarnego (15) oznacza, że dowolny wektor strumienia skojarzonego  $\Psi$  rozpatrywanego obwodu elektromagnetycznego musi być ortogonalny do wektora

$$\left[ \frac{1}{z_1} \frac{1}{z_2} 0 - \frac{1}{z_4} 0 - \frac{1}{z_6} \frac{1}{z_7} 0 \frac{1}{z_9} 0 \dots 0 \right]^T.$$

Innymi słowy równanie (15) wyznacza pewną hiperpłaszczyznę (podprzestrzeń  $(n-1)$ wymiarową) w przestrzeni  $V^n$ , która jest zbiorem wszystkich wektorów strumieni skojarzonych, normalnych do wektora

$$\left[ \frac{1}{z_1} \frac{1}{z_2} 0 - \frac{1}{z_4} 0 - \frac{1}{z_6} \frac{1}{z_7} 0 \frac{1}{z_9} 0 \dots 0 \right]^T.$$

Jeżeli liczba niezależnych liniowo równań typu (13), ułożonych dla kolejnych, dających się wyodrębnić części sieci magnetycznej, wynosi 1, to wymiar przestrzeni strumieni skojarzonych  $\Psi$  - będącej przecięciem wszystkich 1 hiperpłaszczyzn, odpowiadających poszczególnym 1 równaniom - wynosi  $n-1$ . Piszemy:

$$\dim \Psi = n - 1. \quad (16)$$

Widzimy, że wymiar przestrzeni strumieni skojarzonych  $\Psi$  zależy wyłącznie od topologii sieci magnetycznej oraz sposobu rozkładu uzwojeń. Zasadniczą rolę odgrywa liczba uzwojeń w stosunku do liczby strun sieci magnetycznej  $s = g_m - w_m + 1$ . Można wykazać, że jeśli:

$$n < s \quad \dim \Psi \leq n \quad (17)$$

$$n = s \quad \dim \Psi \leq n \quad (18)$$

$$g_m \geq n > s \quad \dim \Psi \leq s \quad (19)$$

Wymiar przestrzeni strumieni skojarzonych  $\Psi$  nigdy nie przewyższa liczby strun sieci magnetycznej  $s$ . Nierówność (18) przechodzi w równość tylko wówczas, gdy wszystkie uzwojenia leżą na strunach pewnego drzewa sieci magnetycznej. Dla wygody dalszych rozważań przyjmijmy oznaczenie:

$$\dim \Psi = k. \quad (20)$$

W artykule niniejszym rozważać będziemy wyłącznie obwody elektromagnetyczne, dla których:

$$\dim \Psi = k < n \quad (21)$$

Do klasy obwodów spełniających warunek (21) należą wszystkie obwody elektromagnetyczne o  $n > s$  oraz znaczna część tych, dla których  $n \leq s$ .

#### 4. Przekształcenie liniowe $M$ . Podprzestrzeń zerowa $I_0^{n-k}$

Macierz indukcyjności głównych  $M$  w układzie równań liniowych algebraicznych (4) traktować można jako macierz pewnego przekształcenia liniowego  $M$ , zapisanego w naturalnym układzie współrzędnych. Przekształcenie liniowe  $M$  przeprowadza zbiór wektorów przestrzeni liniowej prądów uzwojeniowych  $I$  w zbiór wektorów przestrzeni liniowej strumieni skojarzonych  $\Psi$ , co zapisujemy:

$$M(I) = \Psi. \quad (22)$$

Dziedziną przekształcenia  $M$  jest przestrzeń  $I$ , której wymiar w przypadku, gdy uzwojenia są galwanicznie niezależne, wynosi  $n$ :

$$\dim I = n. \quad (23)$$

Obraz przekształcenia  $M$ , to przestrzeń  $\Psi$ . Wymiar przestrzeni  $\Psi$  nazywamy rzędem przekształcenia  $M$  ( $\text{rz } M$ ), a więc zgodnie z (21):

$$\text{rz } M = \dim \Psi = k. \quad (24)$$

Obowiązuje twierdzenie: Rząd przekształcenia liniowego  $M$  równy jest rzędowi macierzy przekształcenia, czyli:

$$\text{rz } M = \text{rz } [M]. \quad (25)$$

Twierdzenie to posiada istotne znaczenie, umożliwiając wyznaczenie wymiaru przestrzeni strumieni skojarzonych  $\Psi$ , bądź to na podstawie znajomości grafu sieci magnetycznej i rozkładu uzwojeń (rozd. 3), bądź też - macierzy indukcyjności głównych  $[M]$ .

Przeciwobraz wektora zerowego  $M^{-1}(0)$ , będący podprzestrzenią przestrzeni  $I^n$  nosi nazwę przestrzeni zerowej (jądra)  $I_0$  przekształcenia  $M$ . Wymiar przestrzeni zerowej  $I_0$  nazywamy zerowością (degenerowalnością, defektem) przekształcenia  $M$  i oznaczamy przez  $\text{def } M$ . Z twierdzenia obowiązującego dla przestrzeni liniowej o skończonym wymiarze  $n$  [11]:

$$\text{def } M + \text{rz } M = n \quad (26)$$

otrzymujemy:

$$\dim I_0 + \dim \Psi = n \quad (27)$$

Stąd zaś:

$$\dim I_0 = n - \dim \Psi = n - k \quad (28)$$

Założenie (21) oraz nierówność (19) warunkują istnienie w obwodach elektromagnetycznych przestrzeni zerowej  $I_0$  o wymiarze:

$$0 < \dim I_0 \leq w_m - 1 \quad (29)$$

Elementy przestrzeni zerowej  $I_0^{n-k}$  nazywamy wektorami zerowymi i oznaczamy przez  $i_0$ . Wektory zerowe prądu posiadają ważne znaczenie fizyczne: ich przepływ w  $n$ -uzwojeniach obwodu elektromagnetycznego wywołuje zerowy strumień główny skojarzony z poszczególnymi uzwojeniami, czyli:

$$M(i_0) = 0 \quad i_0 \in I_0^{n-k}. \quad (30)$$



5. Rozkład ortogonalny prądów uzwojeniowych na składowe: aktywną i zerową

Przestrzeń prądów uzwojeniowych  $I^n$  przedstawić można w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni: przestrzeni zerowej  $I_0^{n-k}$  i jej ortogonalnego dopełnienia  $I_1^k$  [11].

Piszemy:

$$I^n = I_0^{n-k} + I_1^k, \quad (31)$$

gdzie:

$$I_1^k \perp I_0^{n-k}.$$

Można wykazać, że z własności symetrii macierzy indukcyjności głównych [M] wynika identyczność matematyczna podprzestrzeni  $I_1^k$  z przestrzenią strumieni skojarzonych  $\Psi$ :

$$I_1^k \equiv \Psi^k \quad (32)$$

Związek (31) oznacza, że każdy wektor  $i \in I^n$  można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy dwóch wzajemnie ortogonalnych wektorów składowych, z których pierwszy przynależy do podprzestrzeni  $I_1^k$ , zaś drugi do podprzestrzeni  $I_0^{n-k}$ :

$$i = i_1 + i_0, \quad (33)$$

gdzie

$$i_1 \in I_1^k$$

$$i_0 \in I_0^{n-k}.$$

Składową  $i_1$  wektora  $i$  nazywamy składową aktywną, zaś składową  $i_0$  wektora  $i$  - składową zerową (wektorem zerowym). Rozkład ortogonalny (33) posiada istotne znaczenie fizyczne. Kwadrat normy wektora  $i \in I^n$  można przedstawić w następującej postaci:

$$\|i\|^2 = i \cdot i = \|i_1\|^2 + \|i_0\|^2 \quad (34)$$

Stąd:

$$\|i_1\|^2 \leq \|i\|^2, \quad (35)$$

przy czym równość ma miejsce tylko wtedy, gdy  $i_0 = 0$ . Ponadto ze wzorów (22) i (30) wynika, że:

$$\Psi = M(i) = M(i_{\perp} + i_0) = M(i_{\perp}) + M(i_0) = M(i_{\perp}) \quad (36)$$

W świetle nierówności (35) i równości (36) oczywisty staje się sens fizyczny składowej aktywnej  $i_{\perp}$ . Składowa  $i_{\perp}$  wektora  $i$  jest to wektor prądu o najmniejszej normie, wywołujący w obwodzie elektromagnetycznym identyczny rozkład strumieni skojarzonych głównych jak wektor rzeczywisty prądu  $i$ .

Składowa zerowa  $i_0$  prądu  $i$  jest to - jak wykazaliśmy wcześniej - wektor prądu, którego przepływ w  $n$ -uzwojeniach obwodu elektromagnetycznego nie wytwarza wektora strumienia skojarzonego.

Dla obwodu elektromagnetycznego, spełniającego warunek (21), istnieje więc nieskończenie wiele wektorów prądów o różnych normach, wywołujących identyczny rozkład strumieni skojarzonych głównych. Jeśli wektor strumienia skojarzonego  $\Psi^{(1)}(t)$  można wytworzyć przy pomocy wektora prądu  $i^{(1)}(t)$ , to wytwarza go również dowolny wektor prądu o postaci:

$$i(t) = i_{\perp}^{(1)}(t) + \lambda i_0^{(1)}(t), \quad (37)$$

gdzie:

$$i_{\perp}^{(1)} \in I^k$$

$$i_0^{(1)} \in I_0^{n-k}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

Wywołując jednak wektor strumienia skojarzonego  $\Psi^{(1)}(t)$  nie przy pomocy wektora prądu o najmniejszej normie  $i_{\perp}^{(1)}(t)$ , lecz - wektorem prądu:

$$i = i_{\perp}^{(1)} + i_0^{(1)} \quad (38)$$

liczyć się musimy z konsekwencjami ekonomicznymi: płynące w  $n$ -uzwojeniach rzeczywiste prądy składowej zerowej wywołują straty mocy czynnej na rezystancjach i dodatkowy strumień rozproszania na indukcyjnościach rozproszonych poszczególnych uzwojeń [6], [7].

6. Dopuszczalne układy współrzędnych

Podstawowe prawa elektrotechniki formułowane są w naturalnym układzie współrzędnych i w takim też układzie opisujemy najczęściej obwody elektryczne. Celowe jest jednak wprowadzanie nowych układów współrzędnych - sztucznych, jeśli formalny opis matematyczny zjawisk fizycznych jest w nich prostszy. Nowe układy współrzędnych zadawane są w sposób pośredni: wyróżniamy jeden układ współrzędnych, zwany praukładem (jest to najczęściej naturalny układ współrzędnych), a następnie określamy zbiór transformacji (przekształceń)  $G$ , przeprowadzających pierwotny układ współrzędnych (praukład) w nowe układy współrzędnych. Tak otrzymany zbiór układów współrzędnych nazywamy zbiorem dopuszczalnych układów współrzędnych [4]. Jest jednak rzeczą ważną i konieczną, aby od każdego dopuszczalnego układu współrzędnych do każdego innego dopuszczalnego układu współrzędnych można było przejść za pomocą transformacji należącej do ustalonego zbioru  $G$ . Z tego też powodu wybór zbioru  $G$  nie może być dowolny: musi być grupą (w przypadku, gdy ograniczamy się do rozpatrywania przekształceń globalnych). To, że zbiór transformacji  $G$  o elementach  $t_1, t_2, t_3 \dots$  wraz z działaniem składania (superpozycji) transformacji, oznaczonym symbolem " $\circ$ " stanowi grupę, oznacza, że:

- jeśli  $t_1 \in G$  i  $t_2 \in G$  to  $t_1 \circ t_2 \in G$ ,
- działanie superpozycji jest łączne, czyli  $t_1 \circ (t_2 \circ t_3) = (t_1 \circ t_2) \circ t_3$ ,
- dla każdej transformacji  $t \in G$  istnieje transformacja odwrotna  $t^{-1} \in G$ ,
- do zbioru  $G$  należy transformacja identycznościowa  $J$  (jedność grupy), czyli taka, że:

$$J \circ t = t \circ J = t.$$

Szczególnie ważną rolę odgrywa w fizyce grupa transformacji ortogonalna (metryczna)  $G_m$  [4]. Jest ona podgrupą grupy afinicznej (liniowej), o postaci:

$$\bar{v}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} v_k + a_i \quad i = 1 \dots n, \quad (39)$$

gdzie:

- $v_k$       - k-ta współrzędna wektora  $v$  w starym układzie współrzędnych,
- $\bar{v}_i$       - i-ta współrzędna wektora  $v$  w nowym układzie współrzędnych,
- $a_{ik}, a_i$  - współczynniki transformacji.

Warunek ortogonalności sformułowany jest następująco:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \delta_1^k \quad k, i = 1 \dots n, \quad (40)$$

gdzie:

$$\delta_1^k = \begin{cases} 0 & \text{gdy } i \neq k \\ 1 & \text{gdy } i = k \end{cases}$$

Jeśli ponadto  $a_{i1} = 0$  ( $i = 1 \dots n$ ) otrzymujemy grupę ortogonalnocentryczną  $G_{mc}$ .

W zapisie macierzowym transformacje grupy ortogonalnocentrycznej  $G_{mc}$  przyjmują postać:

$$[\vec{v}] = [S][v],$$

gdzie:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix} \quad [\vec{v}] = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & \dots & \dots & s_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ s_{n1} & \dots & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz  $[S]$  nosi nazwę macierzy transformacji. Zgodnie z własnością c grupy transformacji  $G$  musi zachodzić:

$$\det [S] \neq 0 \quad (42)$$

Stąd i ze wzoru (41) wynika, że:

$$[v] = [S]^{-1} [\vec{v}]. \quad (43)$$

Macierz  $[S]^{-1}$ , to macierz transformacji odwrotnej.

Warunek (40) oznacza, że macierz transformacji  $[S]$  jest macierzą ortogonalną. Ta własność macierzy  $[S]$  pozwala w prosty sposób obliczyć macierz odwrotną, a mianowicie:

$$[S]^{-1} = [S]^T \quad (44)$$

Ważne znaczenie fizyczne posiada fakt, że iloczyn skalarny jest niezmiennikiem przekształceń grupy ortogonalnej  $G_m$ , a więc również i grupy ortogonocentrycznej  $G_{mc}$ . Jeżeli jednym z wektorów przestrzeni  $V^n$  jest wektor napięcia  $u$ , a drugim - wektor prądu  $i$  to moc chwilowa jako iloczyn skalarny obu wektorów jest w dowolnym dopuszczalnym układzie współrzędnych inwariantna. Jeżeli:

$$[\bar{u}] = [S] [u] \quad (45)$$

$$[\bar{i}] = [S] [i], \quad (46)$$

wówczas:

$$p(t) = [u]^T [i] = [\bar{u}]^T [\bar{i}]. \quad (47)$$

Nowy układ współrzędnych wprowadzamy często w odmienny sposób: wyróżniamy jeden z układów współrzędnych, najczęściej - naturalny, związany z bazą ortonormalną  $e$   $[5]$ :

$$[e_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad [e_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \dots [e_n] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

oraz pewną nową bazę  $\bar{e} : \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ .

Przedstawiając każdy z wektorów nowej bazy w starej bazie, otrzymujemy:

$$[\bar{e}] = [P] [e], \quad (49)$$

gdzie:

$$[e] = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} \quad [\bar{e}] = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{e}_n \end{bmatrix}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Współrzędne dowolnego wektora  $v \in V^n$  w nowym układzie współrzędnych są równe współczynnikom rozkładu wektora  $v$  w nowej bazie:

$$v = \bar{v}_1 \bar{e}_1 + \bar{v}_2 \bar{e}_2 + \dots + \bar{v}_n \bar{e}_n, \quad (50)$$

gdzie:

$\bar{v}_i$  -  $i$ -ta współrzędna wektora  $v$  w nowym układzie współrzędnych.

Nowy układ współrzędnych wprowadzić więc można na dwa równoważne sposoby: przez zadanie macierzy transformacji  $[S]$ , określającej wprost współrzędne wektora w nowym układzie współrzędnych (41), bądź - macierzy  $[P]$ , wyznaczającej nową bazę (50). Pomiedzy macierzą  $[S]$  i  $[P]$  istnieje prosty związek  $[S]$ :

$$[P] = \left[ [S]^{-1} \right]^T. \quad (51)$$

Jeśli transformacja określona macierzą  $[S]$  należy do grupy  $G_m$ , bądź jej podgrupy  $G_{mc}$ , wówczas związek (51) - zgodnie ze wzorem (44) - upraszcza się:

$$[P] = [S] \quad (52)$$

Oznacza to, że wiersze macierzy  $[S]$  są równe transponowanym wektorom nowej bazy, zapisanym w starym układzie współrzędnych. Ponieważ zaś macierz  $[S]$  jest macierzą ortogonalną, wektory nowej bazy muszą być wzajemnie ortogonalne i unormowane:

$$\bar{e}_i \bar{e}_k = \delta_i^k \quad k, i = 1 \dots n. \quad (53)$$

## 7. Transformacja k-osiowa

Bazy podprzestrzeni  $I_0^{n-k}$  i  $I_1^k$  wyznaczyć można na podstawie znajomości macierzy indukcyjności głównych  $[M]$  lub - grafu sieci magnetycznej, rozkładu uzwojeń i ich liczby zwoi. Jeżeli znamy macierz indukcyjności głównych  $[M]$  bazę podprzestrzeni zerowej znajdziemy, rozwiązując układ liniowych równań jednorodnych:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\text{rz } [M] = k$$

Zortogonalizowaną bazę podprzestrzeni  $I_0^{n-k}$  oznaczymy przez:

$$[K_{k+1}] \ [K_{k+2}] \ \dots \ [K_n].$$

Można wykazać, że bazę podprzestrzeni  $I_1^k$  stanowi  $k$  niezależnych transponowanych wierszy macierzy  $[M]$ . Zortogonalizowaną bazę podprzestrzeni  $I_1^k$  oznaczymy przez:  $[K_1] [K_2] \dots [K_k]$ . Ze wzoru (31) wynika, że połączone bazy podprzestrzeni  $I_1^k$  i  $I_0^{n-k}$ :

$$[K_1] = \begin{bmatrix} k_{11} \\ k_{12} \\ \dots \\ k_{1n} \end{bmatrix} \quad [K_2] = \begin{bmatrix} k_{21} \\ k_{22} \\ \dots \\ k_{2n} \end{bmatrix} \quad \dots \quad [K_n] = \begin{bmatrix} k_{n1} \\ k_{n2} \\ \dots \\ k_{nn} \end{bmatrix} \tag{55}$$

gdzie:

$k_{ij}$  - j-ta współrzędna i-tego wektora nowej bazy.

stanowią bazę przestrzeni  $I^n$ . Układ współrzędnych, związany z bazą (55), nazwiemy k-osiowym układem współrzędnych, a współrzędne wektorów w tym układzie - wyróżniać będziemy górnym indeksem ( $k$ ). Zgodnie ze wzorem (52) macierz transformacji z naturalnego układu współrzędnych do k-osiowego układu współrzędnych ma postać:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \tag{56}$$

Rozkład ortogonalny wektora prądu (33) w k-osiowym układzie współrzędnych przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_k^{(k)} \\ i_{k+1}^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_k^{(k)} \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ i_{k+1}^{(k)} \\ \cdot \\ \cdot \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Widzimy, że pierwsze  $k$ -współrzędnych wyznacza składową aktywną  $i_1 \in I_1^k$ , zaś pozostałe  $n-k$  współrzędnych - składową zerową  $i_0 \in I_0^{n-k}$ .

Zbadajmy ogólną postać macierzy przekształcenia liniowego  $M$  w nowym układzie współrzędnych. Do równania macierzowego:

$$[\Psi] = [M] [i] \quad (58)$$

wprowadźmy nowe współrzędne, zgodnie z równaniami transformacyjnymi:

$$[i^{(k)}] = [K] [i], \quad (59)$$

$$[\Psi^{(k)}] = [K] [\Psi] \quad (60)$$

Można wykazać, że na skutek niezmienniczości podprzestrzeni  $I^k$  oraz  $I_0^{n-k}$  przekształcenie  $M$  przyjmuje w  $k$ -osiowym układzie współrzędnych postać [5]:

$$[\Psi^{(k)}] = [M^{(k)}] [i^{(k)}] \quad (61)$$

gdzie:

$$[M^{(k)}] = [K][M][K]^T = \begin{bmatrix} M_{11}^{(k)} & M_{12}^{(k)} & \dots & M_{1k}^{(k)} & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{k1}^{(k)} & M_{k2}^{(k)} & \dots & M_{kk}^{(k)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [0] & & & & & [0] \\ (n-k) \cdot k & & & & & (n-k) \cdot (n-k) \end{bmatrix} \quad (62)$$



Z porównania zapisu przekształcenia liniowego  $M$  w obu układach współrzędnych - naturalnym (4) oraz -  $k$ -osiowym (62) wyraźnie wynikają korzyści, związane z wprowadzeniem nowego układu współrzędnych. Zamiast badać przekształcenie  $M$  na  $n$ -wymiarowej przestrzeni  $I^n$  w układzie naturalnym, badamy je na  $k$ -wymiarowej podprzestrzeni  $I_1^k$  w  $k$ -osiowym układzie współrzędnych. To właśnie uzasadnia nazwanie nowego układu współrzędnych -  $k$ -osiowym układem współrzędnych oraz transformacji  $K$  - transformacją  $k$ -osiową.

Ale formalne uproszczenie postaci macierzy przekształcenia  $M$  nie jest jedyną korzyścią, uzyskaną w wyniku zmiany układu współrzędnych. Rzeczywiste współrzędne wektorów prądów w nowym układzie współrzędnych wiążą się ściśle z rzeczywistymi składowymi rozkładu ortogonalnego prądów uzwojeńowych: wektorem aktywnym i zerowym. Dzięki temu znajomość rozwiązania w  $k$ -osiowym układzie współrzędnych dostarcza bezpośrednio szeregu informacji, dotyczących wykorzystania energetycznego obwodu elektromagnetycznego.

#### 8. Bazy podprzestrzeni $I_0^{n-k}$ i $I_1^k$ , a wektory własne przekształcenia liniowego $M$

Zbadajmy związek wektorów baz podprzestrzeni  $I_1^k$  oraz  $I_0^{n-k}$  z wektorami własnymi przekształcenia liniowego  $M$ . Wykażemy, że dla pewnej klasy przekształceń  $M$  macierz  $[M^{(k)}]$  upraszcza się jeszcze bardziej, a mianowicie jej pełna podmacierz w lewym górnym rogu (62) przyjmuje postać diagonalną.

Wielomian charakterystyczny przekształcenia liniowego  $M$  jest wielomianem stopnia  $n$  względem  $\lambda$  o postaci [10]:

$$D(\lambda) = \det \begin{bmatrix} M_{11} - \lambda & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & M_{22} - \lambda & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nn} - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (-1)^n \left[ \lambda^n - p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} \dots + (-1)^n p_n \right], \quad (63)$$

gdzie:

$p_1$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) - jest sumą wszystkich minorów głównych, stopnia  $i$ -tego macierzy  $[M]$  [8] [10].

W szczególności:

$$p_1 = M_{11} + M_{22} + \dots + M_{nn}$$

$$p_n = \det [M]$$

Jeśli obwód elektromagnetyczny spełnia warunek (21), to:

$$p_i = 0 \quad \text{dla} \quad i > k. \quad (64)$$

Wielomian charakterystyczny przekształcenia  $M$  przyjmuje wówczas następującą postać:

$$D(\lambda) = (-1)^n \lambda^{n-k} w(\lambda), \quad (65)$$

gdzie:

$$w(\lambda) = \lambda^k - p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} \dots \pm p_k.$$

Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$D(\lambda) = 0 \quad (66)$$

noszą nazwę wartości własnych, a ich zbiór - widma (spektrum) przekształcenia  $M$ .

Ze wzoru (65) wynika, że przekształcenie  $M$  posiada  $(n-k)$ -krotną wartość własną  $0$  oraz  $k$  wartości własnych, będących pierwiastkami wielomianu  $w(\lambda)$ . Wszystkie pierwiastki wielomianu  $w(\lambda)$  są rzeczywiste jako wartości własne macierzy symetrycznej o elementach rzeczywistych [8]. Widmo przekształcenia  $M$  ma więc ogólną postać:

$$\underbrace{0 \dots 0}_{n-k} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k \quad (67)$$

Wektor własny względnie zbiór wektorów własnych, posiadających tę samą wartość własną  $\lambda_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) otrzymujemy jako rozwiązania niezerowe układu równań liniowych:

$$\left\{ [M] - \lambda_i [0] \right\} [x_i] = [0], \quad (68)$$

gdzie:

$$[x_i] \quad - \text{wektor własny, odpowiadający wartości własnej } \lambda_i.$$

Zbiór wektorów własnych macierzy  $[M]$  odpowiadających  $(n-k)$ -krotnej wartości własnej  $0$ , uzupełniony wektorem zerowym, stanowi podprzestrzeń liniową (nazywamy ją podprzestrzenią liniową  $(n-k)$ -krotnej wartości własnej  $0$ ), której bazę wyznaczyć można z układu równań liniowych jednorodnych:

$$([M] - 0[O])[x_i] = [M][x_i] = [0], \quad (69)$$

$$i = 1 \dots n-k$$

gdzie:

$$\text{rz}[M] = k.$$

Porównując wzory (69) i (54) widzimy, że podprzestrzeń liniowa  $(n-k)$ -krotnej wartości własnej  $0$  jest identyczna z podprzestrzenią zerową  $I_0^{n-k}$ . Jeśli widmo macierzy  $M$  ma postać:

$$\underbrace{0 \dots \dots 0}_{n-k} \quad \underbrace{\lambda \lambda \lambda \dots \dots \lambda}_k \quad (70)$$

wówczas zbiór wektorów własnych, odpowiadających  $k$ -krotnej wartości własnej, uzupełniony wektorem zerowym, jest identyczny z podprzestrzenią  $I_{\perp}^k$ . Tak więc dla przekształcenia  $M$  o widmie (70) baza  $[K_1] [K_2] \dots [K_n]$ , będąca połączeniem ortonormalnych baz podprzestrzeni  $I_{\perp}^k$  i  $I_0^{n-k}$  jest identyczna z bazą wektorów własnych, w której macierz przekształcenia liniowego  $M$  przyjmuje postać diagonalną o wartościach własnych na głównej przekątnej:

$$[M^{(k)}] = \left[ \begin{array}{c|c} \begin{array}{ccc} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{array} & [0] \\ \hline [0] & \begin{array}{c} k \cdot (n-k) \\ [0] \end{array} \\ \begin{array}{c} (n-k) \cdot k \\ \end{array} & \begin{array}{c} (n-k) \cdot (n-k) \\ [0] \end{array} \end{array} \right] \quad (71)$$

9. Stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego w k-osiowym układzie współrzędnych

Założmy, że rezystancje i indukcyjności rozproszeń wszystkich  $n$ -uzwojeń obwodu elektromagnetycznego są jednakowe, a mianowicie:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_2 = \dots R_n = R \\ L_{s1} &= L_{s2} = \dots L_{sn} = L_s. \end{aligned} \quad (72)$$

wówczas w k-osiowym układzie współrzędnych diagonalne macierze rezystancji i indukcyjności rozprożeń nie ulegają zmianie:

$$[R^{(k)}] = [K][R][K]^T = [R] = \begin{bmatrix} R & & 0 \\ & R & \\ 0 & & R \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$[L_s^{(k)}] = [K][L_s][K]^T = [L_s] = \begin{bmatrix} L_s & & 0 \\ & L_s & \\ 0 & & L_s \end{bmatrix} \quad (74)$$

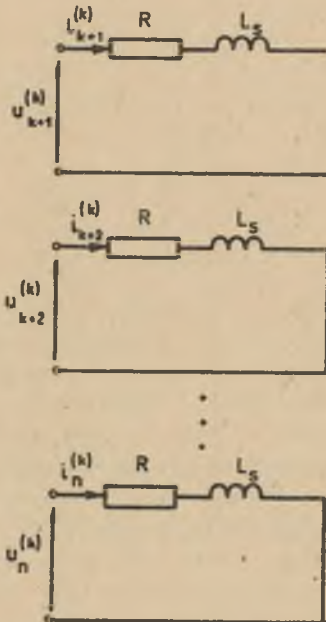
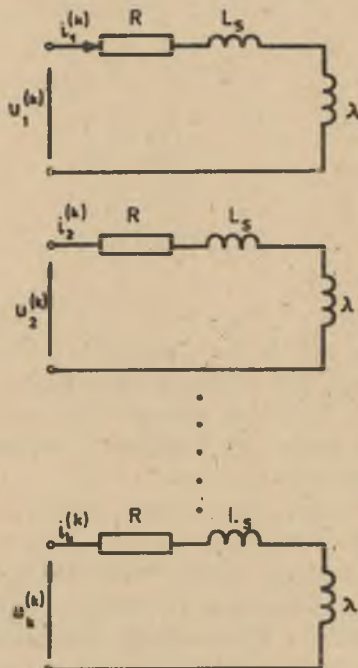
Jeżeli obwód elektromagnetyczny o widmie macierzy  $M$  typu (70), spełnia dodatkowo warunki (72) równania różniczkowe stanu nieustalonego przyjmują w k-osiowym układzie współrzędnych szczególnie prostą postać:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & & 0 \\ & R & \\ 0 & & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ \vdots \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & & 0 \\ & L_s & \\ 0 & & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \\ \vdots \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi_1^{(k)} \\ \psi_2^{(k)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \psi_k^{(k)} \\ \vdots \\ \psi_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ \vdots \\ i_k^{(k)} \\ \vdots \\ i_{k+1}^{(k)} \\ \vdots \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$k \cdot (n-k)$        $(n-k) \cdot k$        $(n-k) \cdot (n-k)$

k-pierwszym współrzędnym odpowiada k identycznych, niezależnych obwodów elektrycznych, wiążących współrzędne składowej aktywnej  $u_{\perp}$  wektora napięcia  $u$  z odpowiednimi współrzędnymi składowej aktywnej  $i_{\perp}$  wektora prądu  $i$ . Obwody te składają się z szeregowo połączonej indukcyjności głównej  $\lambda$ , indukcyjności rozproszenia  $L_s$  oraz rezystancji  $R$  (rys. 2).



Rys. 2. Schematy elektryczne dla współrzędnych składowej aktywnej w k-osiowym układzie współrzędnych

Rys. 3. Schemat elektryczny dla współrzędnych składowej zerowej w k-osiowym układzie współrzędnych

Pozostałym  $n-k$  współrzędnym odpowiada  $n-k$  identycznych prostych obwodów elektrycznych, wiążących współrzędne składowej zerowej  $u_0$  wektora napięcia  $u$  z odpowiednimi współrzędnymi składowej zerowej  $i_0$  wektora prądu  $i$ . Obwody te składają się tylko z indukcyjności rozproszenia  $L_s$  oraz rezystancji  $R$  (rys. 3).

### 10. Kompleksory wielkości elektrycznych i magnetycznych

Rozważmy obwód elektromagnetyczny, którego macierz indukcyjności głównych o rzędzie 2 posiada widmo:

$$\lambda \quad \underbrace{\lambda \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_{n-2} \quad (77)$$

Jeśli spełnione są ponadto warunki (72), wówczas układ równań różniczkowych (3) i (4) przyjmuje w k-osiołym układzie współrzędnych postać:

$$\begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & 0 \\ 0 & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^{(k)} \\ i_2^{(k)} \end{bmatrix} \quad (78)$$

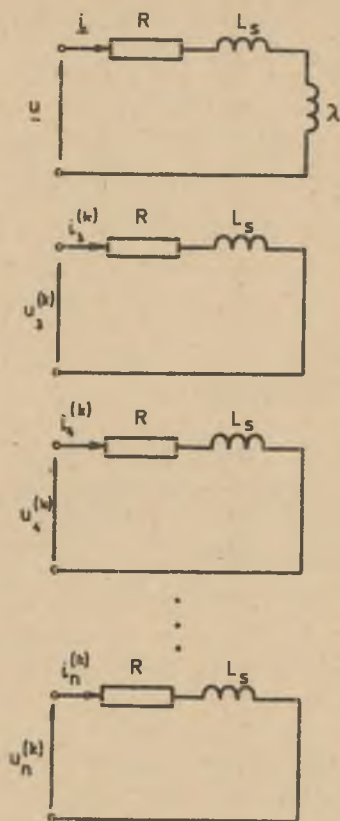
$$\begin{bmatrix} u_3^{(k)} \\ \vdots \\ u_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & & \\ & \ddots & \\ & & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3^{(k)} \\ \vdots \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_s & & \\ & \ddots & \\ & & L_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_3^{(k)} \\ \vdots \\ i_n^{(k)} \end{bmatrix} \quad (79)$$

Równania różniczkowe (78) opisują stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego w 2-wymiarowej podprzestrzeni  $I_1^2$ , zaś równania różniczkowe (79) - w  $(n-2)$ -wymiarowej podprzestrzeni  $I_0^{n-2}$ . Innymi słowy - równania różniczkowe (78) są równaniami stanu nieustalonego dla składowych aktywnych, zaś równania różniczkowe (79) - dla składowych zerowych.

W interpretacji geometrycznej w przestrzeni afinicznej podprzestrzeń  $I_1^2$  jest płaszczyzną 2-wymiarową. Przekształćmy płaszczyznę  $I_1^2$  w płaszczyznę zespoloną, przyjmując, że oś 1 k-osiołego układu współrzędnych jest osią rzeczywistą, zaś oś 2 - osią urojoną. Zespoloną płaszczyznę  $I_1^2$  oznaczamy symbolem  $I_1^2$ . Dowolnej wielkości elektrycznej lub magnetycznej w odpowiada na płaszczyźnie  $I_1^2$  jej składowa aktywna  $w_1$  (jest to w interpretacji geometrycznej rzut wektora  $w$  na płaszczyznę  $I_1^2$ ). Wektorowi aktywnemu  $w_1$ , zaczepionemu w początku układu współrzędnych, przyporządkować możemy na płaszczyźnie zespolonej  $I_1^2$  liczbę zespoloną  $\underline{w}^{(k)}$ , określoną położeniem końca wektora  $w_1$ , zgodnie z relacją:

$$\underline{w}^{(k)} = w_1^{(k)} + j w_2^{(k)} \quad (80)$$

Liczbę zespoloną  $\underline{w}^{(k)}$  nazywamy kompleksozem danej wielkości elektrycznej lub magnetycznej  $w$ , zaś płaszczyznę  $I_1^2$  - płaszczyznę kompleksorową.



Rys. 4. Schematy elektryczne dla kompleksorów i współrzędnych składowej zerowej w k-osiowym układzie współrzędnych

Wprowadzając, zgodnie z definicją (80), wielkości kompleksorowe do równań różniczkowych (78) otrzymujemy jedno wspólne równanie różniczkowe dla kompleksorów prądu i napięcia przez zsumowanie równania pierwszego oraz drugiego, pomnożonego przez jednostkę urojoną  $j$ :

$$\underline{u}^{(k)} = R \underline{i}^{(k)} + \frac{d}{dt} L_s \underline{i}^{(k)} + \frac{d}{dt} \lambda \underline{i}^{(k)}$$

Tak więc stan nieustalony obwodu elektromagnetycznego o widmie przekształcenia  $M$  typu (77) w k-osiowym układzie współrzędnych opisuje schemat elektryczny dla kompleksorów oraz  $n-2$  prostych obwodów elektrycznych dla współrzędnych składowej zerowej (rys. 4).

#### LITERATURA

- [1] Brodzki M.: O współzmienności równań i metodach rozwiązywania sieci elektrycznych o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., "Elektryka" z. 34, Gliwice, 1972.
- [2] Gleichgewicht B.: Elementy algebry abstrakcyjnej. Warszawa 1974.
- [3] Cholewicki T.: Macierzowa analiza obwodów elektrycznych. PWN, Warszawa-Wrocław, 1958.
- [4] Gołąb S.: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.
- [5] Jefimow N., Rozendorn E.: Algebra liniowa wraz z geometrią wielowymiarową. PWN, Warszawa, 1974.
- [6] Kluszczyński K.: Analiza obwodu elektromagnetycznego silnika indukcyjnego jednofazowego z kondensatorem pracy z uzwojeniami stojana w układzie T. Praca magisterska Zakład Maszyn Elektrycznych Pol. Śl., Gliwice, 1973.

- [ 7 ] Kluszczyński K.: Analiza obwodu elektromagnetycznego jednofazowego indukcyjnego silnika z kondensatorem pracy o uzwojeniach stojana typu T. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., "Elektryka" z. 47, Gliwice, 1975.
- [ 8 ] Kowalczyk B.: Macierze i ich zastosowanie. PWN, Warszawa, 1976.
- [ 9 ] Kurzawa S.: Liniowe obwody elektryczne. PWN, Warszawa. 1974.
- [10] Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1965.
- [11] Sieklucki K.: Geometria z elementami topologii i algebry liniowej. PWN, Warszawa, 1974.

Przyjęto do druku w lipcu 1977 r.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ К-ОСЕВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ЕГО  
ПРИМЕНЕНИЕ К АНАЛИЗУ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ.

Р е з ю м е

Указано, что для широкого класса разветвлённых электромагнитных цепей возможно ортогональное распределение вектора обмоточных токов на слагающие: активную и нулевую. Введено новую к-осевую координатную систему путём действительного ортогонального преобразования в котором дифференциальные уравнение цепи значительно упрощается.

THE THEORETICAL FUNDAMENTALS OF THE k-AXIS TRANSFORMATION AND ITS  
APPLICATION TO THE ANALYSIS OF THE ELECTRO-MAGNETIC CIRCUITS

S u m m a r y

In the paper there was presented the orthogonal resolution of the winding currents, acting in the electro-magnetic circuit, into active and zero component.

The new k-axis coordinate system was obtained, as a consequence of the orthogonal transformation in real number domain which simplifies the differential equations of the electromagnetic circuit.