

Bornisław ŚLIWA

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

ZASTOSOWANIE METODY DRABINKOWYCH SCHEMATÓW ZASTĘPCZYCH
DO OBLICZANIA WIRNIKÓW Z PRĘTEM BIERNYM

Streszczenie. W artykule przedstawiono schematy zastępcze dla pręta głębokożłobkowego oraz biernego, a także schemat wspólny dla uzwojenia wirnika zawierającego obydwa rodzaje prętów. Wyprowadzono wzory analityczne uzasadniające schematy.

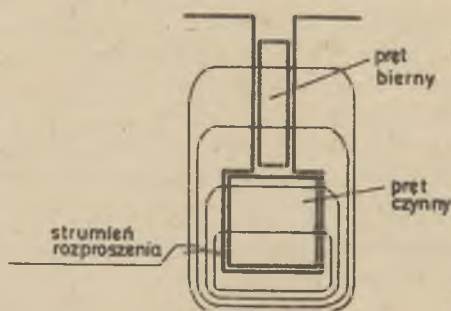
Potrzeba określenia w trakcie projektowania silnika indukcyjnego prądu i momentu rozruchowego, jak również całej charakterystyki momentu w stanach ustalonych, wymaga dokładnego obliczenia impedancji wirnika w funkcji poślizgu. W wirnikach głębokożłobkowych dochodzi do tego zmienność indukcyjności i rezystancji na skutek wypierania prądu.

Znane są różne metody obliczania stałych elektromagnetycznych uzwojenia wirnika; zastosowanie w procesie projektowania maszyn cyfrowych, a zwłaszcza maszyn analogowych umożliwia obliczenie impedancji wirników głębokożłobkowych na podstawie tzw. schematów drabinkowych. Stanowią one odmianę schematu linii długiej i uwzględniają rozkład parametrów pręta wzdłuż jego wysokości. Schematy te wykorzystuje się nie tylko do obliczeń stanów ustalonych, ale są one również przydatne w analizie stanów nieustalonych elektromagnetycznych i elektrodynamicznych.

Poniżej przedstawiono adaptację tej metody do obliczenia wirników dwukłatkowych z rozwartą klatką górną. Dla skrócenia nazwy przyjęto dla tych wirników za przykładem określenia stosowanego w języku angielskim, nazwę wirniki z prętem biernym.

1. Wirniki z prętem biernym

Konstrukcja ta, jak wynika z rys. 1, przypomina wirnik dwukłatkowy. Różnica polega na tym, że podczas gdy pręty dolne połączone są po obu stronach pakietu żelaza pierścieniami zwierającymi i tworzą normalną klatkę, to pręty górne nie są elektrycznie połączone ze sobą. W prętach dolnych płynie prąd roboczy wirnika indukowany przez strumień główny. Natomiast w prętach górnych strumień główny silnika nie powoduje przepływu prądu wo-



Rys. 1. Przekrój żłobka wirnika z prętem biernym

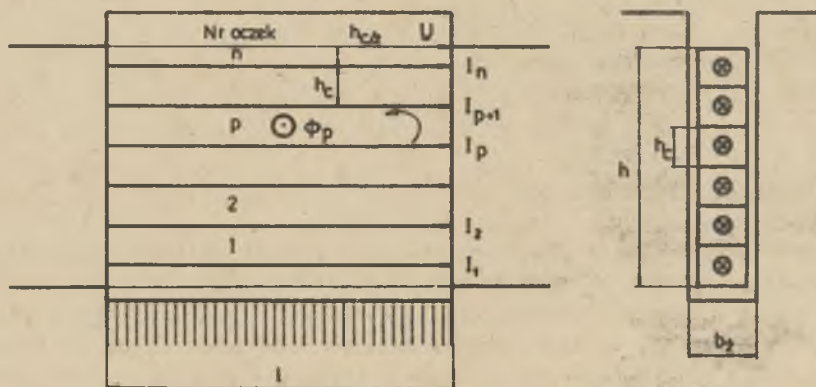
bec braku połączenia elektrycznego. Pręty górne znajdują się jednak w polu rozproszenia żłobkowego wytworzonego przez przepływ prętów dolnych, i płyną w nich prądy wirowe, będące wynikiem różnicy napięć indukowanych w poszczególnych warstwach na wysokości pręta przez strumień rozproszenia. Różnice tych napięć są duże przy poślizgu $s = 1$ i prądy wirowe osiągają wówczas również duże wartości.

W miarę narastania prędkości wirowania maleje częstotliwość prądu klatki dolnej, zmniejszają się wartości napięć indukowanych w prętach górnych i prądy wirowe zanikają. Przy poślizgu znamionowym są one bardzo małe i mogą być pominięte. Stąd też spotyka się w literaturze określenia pręta dolnego jako czynnego i pręta górnego jako biernego.

Zaletą wirników z prętami biernymi jest bardziej równomierne wydzielanie się ciepła rozruchu w całej objętości uzwojenia wirnika. Powoduje to znaczne zmniejszenie lokalnych przegrzań klatki prowadzących często do jej uszkodzenia. Należy więc przypuszczać, że wirniki te znajdują duże zastosowanie w silnikach przeznaczonych do ciężkich warunków rozruchowych.

2. Schemat zastępczy pręta głębokożłobkowego

Podzielmy myślowo pręt wirnika na n leżących na sobie przewodów cząstkowych (rys. 2). Płaszczyzny podziału są prostopadłe do bocznych po-



Rys. 2. Podział pręta na przewody cząstkowe

wierzchni zębka. Jeżeli wysokość przewodu częstokowego jest odpowiednio mała, to można przyjąć, że w jego obrębie nie występuje wypieranie prądu. Przyjmując następane założenie, że prąd przewodu częstokowego skupiony jest w jego osi, zastępuje się obciążony prądem pręt wirnika siecią n prądów równoległych, których wzajemna odległość równa jest wysokości przewodu częstokowego h_c . Prądy poszczególnych przewodów częstokowych wynikają z praw Kirchhoffa dla oczek sieci. Stosując II prawo Kirchhoffa np. dla oczka złączonego z pręta p i pręta $p+1$ otrzymuje się:

$$R_{p+1} \underline{I}_{p+1} - R_p \underline{I}_p = \underline{E} = j \omega_0 \underline{\Phi}_p = j \omega \underline{\Phi}_p, \quad (1)$$

gdzie oznaczają:

- R_p, R_{p+1} - rezystancje poszczególnych przewodów częstokowych,
- $\underline{I}_p, \underline{I}_{p+1}$ - prądy przewodów częstokowych,
- $\underline{\Phi}_p$ - strumień rozproszenia zębokowego skojarzony z oczkiem p ,
- ω_0 - częstotliwość kątowa napięcia stajana.

Zakładając stałą wartość indukcji magnetycznej na wysokości h_c otrzymuje się:

$$\underline{\Phi}_p = \mu_0 \frac{lh_c}{b_z} \sum_{m=1}^p \underline{I}_m = L_p \sum_{m=1}^p \underline{I}_m, \quad (2)$$

gdzie:

- l - długość pakietu żelaza,
- b_z - szerokość zębka,
- $L_p = \mu_0 \frac{lh_c}{b_z}$ - indukcyjność oczka p ,

$\sum_{m=1}^p \underline{I}_m$ - przepływ wzbudzający strumień $\underline{\Phi}_p$, równy sumie geometrycznej prądów przewodów leżących poniżej oczka p .

Zależność ta jest słuszna przy pominięciu zjawiska nasycenia żelaza zębów wirnika.

Przekształcając równanie (1) i wstawiając za strumień rozproszenia $\underline{\Phi}_p$ wyrażenie (2) otrzymuje się:

$$\underline{I}_{p+1} = \frac{R_p}{R_{p+1}} \underline{I}_p + j \omega \frac{L_p}{R_{p+1}} \sum_{m=1}^p \underline{I}_m \quad (3)$$

Przy prostokątnym przekroju pręta szerokość żłobka jest jednakowa dla każdego oczka i równa b_2 .

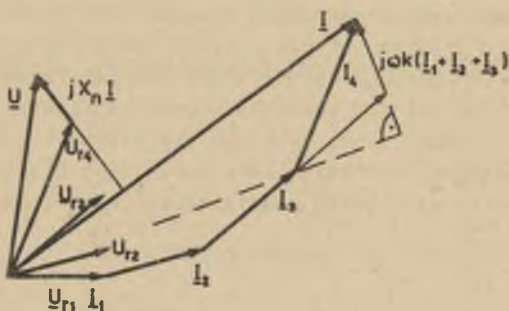
Przyjmując jednakową wysokość dla wszystkich przewodów częstkowych otrzymuje się równość rezystancji wszystkich przewodów, jak również indukcyjności wszystkich oczek.

Stąd

$$R_p/R_{p+1} = 1 \quad L_p/R_{p+1} = \text{const} = k$$

Równanie (3), które obowiązuje dla dowolnego kształtu żłobka wirnika, przyjmuje dla pręta prostokątnego postać uproszczoną:

$$\underline{I}_{p+1} = \underline{I}_p + j\omega k \sum_{m=1}^p \underline{I}_m \quad (3a)$$



Rys. 3. Metoda graficzna wyznaczania dla pręta głębokożłobkowego prądów częstkowych oraz rezystancyjnych spadków napięć na przewodach częstkowych

Stosując równanie (3) względnie (3a) można określić prądy poszczególnych przewodów częstkowych metodą analityczną względnie graficzną. Metodę graficzną, jako bardzo pogładową przedstawiono na rys. 3. Wykres wykonano przy podziale pręta na 4 przewody, a ponadto przyjęto $\omega k = 0,26$, odpowiednio do wymiarów żłobka prototypu silnika z prętem biernym. Konstrukcję wykresu rozpoczyna się zaczynając od prądu dolnego przewodu częstkowego I_1 . Przyjmując dla niego dowolną długość odcinka, wykreśla się kolejne prądy zgodnie z równaniem (3). Znając całkowity prąd pręta [A] oblicza się skalę wykresu i określa prądy wszystkich przewodów częstkowych.

Mnożąc równanie (3) przez rezystancję R_{p+1} , otrzymuje się:

$$R_{p+1} \underline{I}_{p+1} = R_p \underline{I}_p + j\omega L_p \sum_{m=1}^p \underline{I}_m \quad (4)$$

Jeżeli oznaczymy spadek napięcia na rezystancji przewodu częstkowego p przez

$$\underline{U}_{rp} = R_p \underline{I}_p \quad (5)$$

to spadek napięcia na przewodzie $p+1$, zgodnie z równaniem (4) wynosi:

$$\underline{U}_{r(p+1)} = \underline{U}_{rp} + j\omega L_p \sum_{m=1}^p \underline{I}_m \quad (6)$$

Rezystancyjny spadek napięcia każdego kolejnego przewodu cząstkowego równa się spadkowi napięcia na rezystancji przewodu leżącego poniżej i powiększonemu o napięcie indukowane w oczku przez strumień rozproszenia wytworzony prądami przewodów leżących poniżej rozpatrywanego oczka.

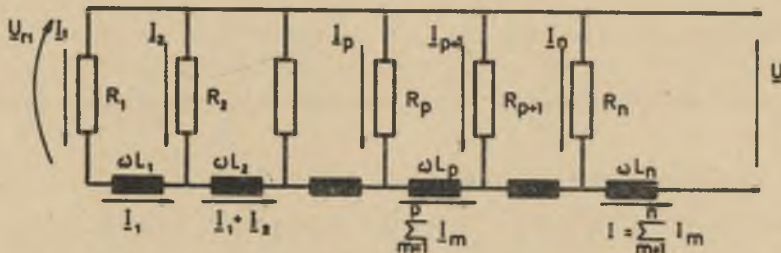
Stosując równanie (6) do oczka utworzonego przez górną krawędź pręta i prąd najwyżej położonego przewodu cząstkowego n , otrzymuje się napięcie górnej krawędzi pręta, równe napięciu indukowanemu w pręcie przez strumień główny:

$$\underline{U} = \underline{U}_{rn} + j\omega L_n \sum_{m=1}^n \underline{I}_m \quad (7)$$

Odległość środka przewodu n od górnej krawędzi pręta równa jest $0,5 h_c$, a zatem dla pręta prostokątnego $L_n = 0,5 L_p$.

Napięcia poszczególnych przewodów cząstkowych, jak również napięcie całkowite U wykreślono na rys. 3 zgodnie z równaniami (6) i (7).

Wyprowadzone równania (3a), (4), (6), (7) odpowiadają schematowi zastępczemu przewodu łańcuchowego przedstawionemu na rys. 4. Napięcie U jest napięciem indukowanym w pręcie, a I prądem całkowitym pręta.



Rys. 4. Schemat zastępczy pręta głębokożłobkowego

Zarówno schemat zastępczy jak i podane powyżej równania obowiązują nie tylko w przypadku pręta litego, podzielonego fikcyjnie, ale mogą być stosowane dla pręta podzielonego rzeczywiście na długości pakietu żelaza i zwartego po obu jego końcach.

3. Schemat zastępczy pręta biernego

Pręt bierny umieszczony w górnej części żłobka, znajduje się jak powiedziano poprzednio w polu rozproszenia przewodu czynnego. Jeżeli ma kształt prostokąta, to indukcja strumienia rozproszenia ma na całej jego wysokości stałą wartość amplitudy. To powoduje, że pole prądów wirowych ma rozkład symetryczny, przy czym osią symetrii jest środek wysokości pręta.

Dla określenia rozkładu prądu na wysokości pręta biernego zastosowano jego podział na n przewodów cząstkowych o wysokości h_c , podobnie jak w przypadku pręta głębokożłobkowego. Jeżeli pręt podzielono na nieparzystą liczbę przewodów cząstkowych, to uwzględniając symetrię pola prądów otrzymuje się dla prądu w środku przewodu cząstkowego wartość zero $I_{\frac{n+1}{2}} = 0$.

Prądy w przewodach cząstkowych, leżących w jednakowej odległości od środka, są równe co do wartości, lecz przeciwnie skierowane, czyli

$$I_{n-p+1} = -I_p \quad (8)$$

Różnica pomiędzy prądami poszczególnych przewodów cząstkowych wynika z napięcia indukowanego w danym oczku przez strumień wytworzony przez prądy wszystkich przewodów leżących poniżej, a więc prądy zarówno samego pręta biernego jak i całkowity prąd pręta czynnego. Równanie (3a) przybiera więc postać:

$$I_{p+1} = I_p + j\omega k \left(\sum_{m=1}^p I_m + I_d \right). \quad (9)$$

gdzie oznacza się

$\sum_{m=1}^p I_m$ - suma geometryczna prądów przewodów cząstkowych pręta biernego,

I_d - prąd całkowity dolnego pręta czynnego.

W przypadku, gdy n przyjęto jako liczbę parzystą, to uwzględniając równanie (9) i zależność (8), otrzymuje się dla leżącego w środku oczka, złożonego z przewodów $p = n/2 - 1$ $p+1 = n/2 + 1$ następujące wyrażenie:

$$I_{n/2+1} = -I_{n/2} = I_{n/2} + j\omega k \left(\sum_{m=1}^{n/2} I_m + I_d \right). \quad (10)$$

Wprowadzając oznaczenie I_w dla nawiasu z równania (10):

$$I_w = \sum_{m=1}^{n/2} I_m + I_d \quad (11)$$

otrzymuje się wyrażenie na prąd w przewodzie cząstkowym $n/2$:

$$I_{n/2} = -j \frac{\omega k}{2} I_w \quad (12)$$

Stosując równanie (9) oblicza się prądy kolejnych przewodów np.:

$$I_{n/2-1} = I_{n/2} - j\omega k \left(\sum_{m=1}^{n/2} I_m + I_d \right) = I_{n/2} - j\omega k (I_w - I_{n/2}) \quad (13)$$

Prąd przewodu leżącego najdalej od środka pręta:

$$I_1 = I_2 - j\omega k (I_1 + I_d) = I_2 - j\omega k \left(I_w - \sum_{m=2}^{n/2} I_m \right) \quad (13a)$$

Podobnie jak w przypadku pojedynczego pręta wysokiego, tak i dla pręta biernego można wyrazić spadki napięć na rezystancjach poszczególnych przewodów cząstkowych. Przy założym prostokątnym pręcie i jego podziałe na n jednakowych części, mnożąc równania prądowe przez rezystancję przewodu cząstkowego, otrzymuje się rezystancyjne spadki napięć. I tak z równania (12) otrzymuje się spadek napięcia na przewodzie leżącym najbliższym środka pręta:

$$\underline{U}_{r\ n/2} = R_p I_{n/2} = -j R_p \frac{\omega k}{2} I_w = -j \frac{\omega}{2} L_p I_w \quad (14)$$

Analogicznie uzyskuje się wyrażenie dla pozostałych przewodów cząstkowych. Dla przewodu skrajnego

$$\underline{U}_{r1} = \underline{U}_{r2} - j\omega L_p \left(I_w - \sum_{m=2}^{n/2} I_m \right) \quad (14a)$$

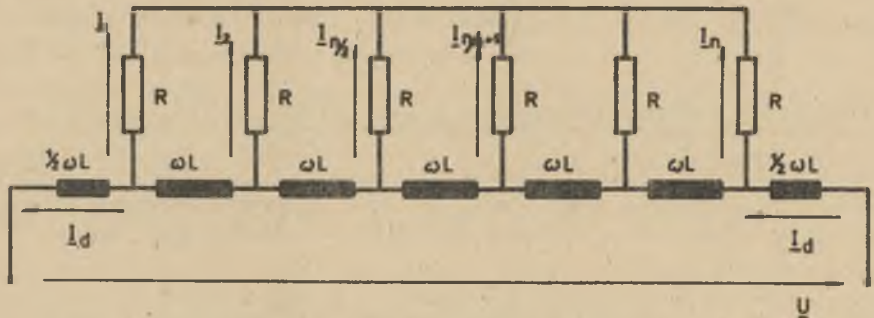
Stosując rozumowanie takie same jak w przypadku pręta głębokożłobkowego, otrzymuje się wg równania (7) napięcie na dolnej krawędzi pręta

$$\underline{U} = \underline{U}_{r1} - j\omega \frac{L_D}{2} \left(\underline{I}_w - \sum_{m=1}^{n/2} \underline{I}_m \right). \quad (15)$$

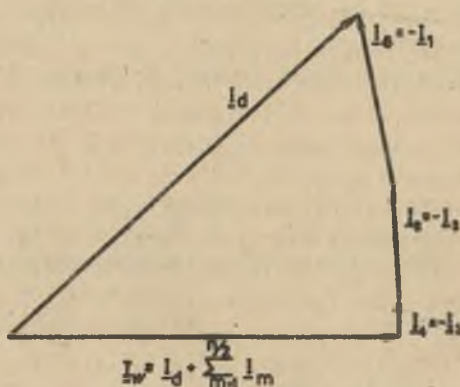
Należy zwrócić uwagę, że ponieważ zgodnie z zależnością (8)

$$\underline{I}_{n-p+1} = -\underline{I}_p, \quad \text{więc i } \underline{U}_{r n-p+1} = -\underline{U}_{rp}$$

Równaniom prądowym i napięciowym odpowiada schemat zastępczy podany na rys. 5. Prądy poszczególnych przewodów można określić analitycznie lub me-



Rys. 5. Schemat zastępczy pręta biernego



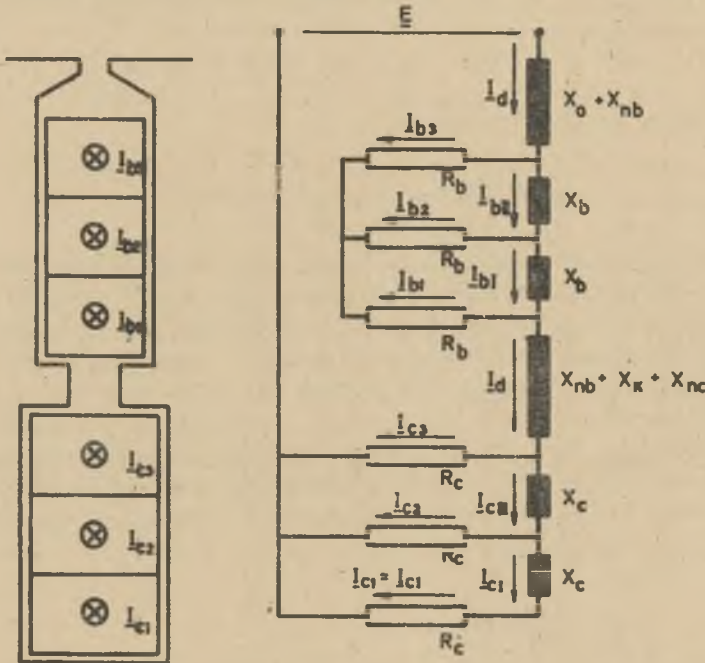
Rys. 6. Metoda graficzna wyznaczenia prądów cząstkowych pręta biernego

todą analityczno-graficzną. Na rysunku 6 przedstawiono metodę graficzną. Przyjmując dowolnie wektor \underline{I}_w wykreśla się wektory poszczególnych prądów zgodnie z równaniami (12) i (13). Z wykresu otrzymuje się wektor prądu przewodu dolnego \underline{I}_d , którego wartość jest znana z obliczenia silnika. Stąd otrzymuje się skalę wykresu i określa poszczególne prądy.

Wykres przedstawiony na rys. 6 odpowiada parametrom silnika prototypowego $\omega k = 0,183$.

4. Schemat zastępczy żłobka zawierającego pręt czynny i bierny

Schemat ten powstaje przez połączenie schematu normalnego pręta głębokożłobkowego ze schematem odpowiadającym prętowi biernemu. Schematy obydwu prętów połączono w szereg, jak to pokazano na rys. 7. Dla uproszczenia schematu wprowadzono podział każdego pręta tylko na 3 części. Ponadto



Rys. 7. Łączny schemat zastępczy dla pręta czynnego i biernego

podano reaktancje poszczególnych prętów, przy czym indeks b dotyczy pręta biernego, indeks c pręta czynnego. Przy rozwiązywaniu schematu dla danego punktu pracy silnika, reaktancje należy obliczyć z uwzględnieniem częstotliwości prądu wirnika ($X = \omega L = s \omega_0 L$). Na schemacie zamieszczono jeszcze dodatkowo reaktancję X_0 związaną ze strumieniem rozproszenia przechodzącym ponad prętami biernymi oraz reaktancję X_k wynikającą ze strumienia przechodzącego pomiędzy prętami. Na zaciski układu, podanego na schemacie, przyłożona jest siła elektromotoryczna E indukowana przez strumień główny silnika, przy czym $E = sE_0$ gdzie E_0 jest SEM indukowaną w stanie zahamowanym. Zgodnie z rysunkiem 6, prąd pobierany przez układ jest prądem pręta czynnego. Suma geometryczna prądów pręta biernego równa jest zero, co wynika z rys. 5 i 6. Prądy płynące przez poszczególne indukcyjności wynikają z pierwszego prawa Kirchhoffa, np.:

$$\underline{I}_{bII} = \underline{I}_d - \underline{I}_{b3}$$

$$\underline{I}_{bI} = \underline{I}_{bII} - \underline{I}_{b2} = \underline{I}_d - \underline{I}_{b3} - \underline{I}_{b2}$$

Napięcie na dowolnym elemencie obliczyć można stosując II prawo Kirchhoffa. Na przykład napięcie na górnej krawędzi pręta czynnego wynosi

$$\underline{U} = (R_c + jX_c) I_{cI} + jX_c \underline{I}_{II} + j X_{nc} \underline{I}_d$$

Zgodnie z tym co podano poprzednio

$$X_{nc} = 0,5 X_c \quad \text{a} \quad X_{nb} = 0,5 X_b.$$

Rozwiązanie schematu i obliczenie prądów jest bardzo żmudne zwłaszcza, gdy przyjmie się podział prętów na większą liczbę części. Zadanie można uprościć, rozbijając je na dwie części. Najpierw oblicza się zastępczą impedancję części czynnej, i wprowadza do schematu zastępczego jako jedną wartość, a następnie rozwiązuje się schemat dla pręta biernego. Obliczenia są jednak bardzo pracochłonne tym bardziej, że trzeba je prowadzić dla kilku wartości poślizgu, aby otrzymać całą charakterystykę. Dlatego też schematy drabinkowe stosowane są głównie wówczas, gdy jest do dyspozycji maszyna analogowa. Liczbę przewodów cząstkowych przyjmuje się możliwie dużą, taką na jaką pozwala objętość maszyny.

LITERATURA

- [1] Alger P.L.: Induction Machines, 1970 r. Gordon and Breach Science Publishers.
- [2] Babb D.S., Williams J.E.: Circuit Analysis Method for Determination of A-C Impedances of Machine Conductors. Transactions AIEE, Vol. 70, 1951.

Przyjęto do druku w lipcu 1977 r.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАСКАДНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ В РАСЧЕТЕ РОТОРОВ АСИНХРОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ С РЕАКТИВНЫМ СТЕРЖНЕМ

Р е з ю м е

Статья касается асинхронного глубоководного двигателя с добавочными реактивными стержнями, экранирующими основную обмотку ротора. В статье предложены схемы замещения для глубоководного стержня и для реактивного стержня, а также схему замещения ротора, содержащего оба типа стержней. Выделено уравнение доказывающее эти схемы.

APPLICATION OF LADDER NETWORK TO CALCULATION OF ROTORS
WITH IDLE-BARS

S u m m a r y

There are given the equivalent circuits to simulate the slot impedance of a deep-bar and idle-bar, as well as of the slot containing active and idle-bar together. The validity of the circuits was mathematically proved.