

Tadeusz GLINKA
Władysław PASZEK
Zbigniew RYCZKO

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

ODDZIAŁYWANIE PRĄDÓW WIROWYCH BLOKU LITEGO NA WŁASNOŚCI ELEKTROMAGNETYCZNE MASZYNY PRĄDU STAŁEGO

Streszczenie. Przedstawiono zależności określające transmitancję operatorową obwodu magnetycznego z blokiem litym. Podano schemat zastępczy uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym przy różnym stopniu uproszczenia bloku litego.

Zamieszczono przykład praktycznych obliczeń przebiegu narastania strumienia i prądu wzbudzenia.

1. Wstęp

Prądy wirowe w bloku litym w obwodzie magnetycznym przeciwdziałają zmianom strumienia, powiększając inercję magnetyczną maszyny prądu stałego zarówno w osi podłużnej jak i poprzecznej. W osi podłużnej maszyny o wzbudzeniu obcym oddziaływanie prądów wirowych wpływa na nieustalone przebiegi elektromagnetyczne. W osi poprzecznej maszyny przebieg czasowy strumienia komutacyjnego zależy od inercyjnego oddziaływania prądów wirowych, które w stanach przejściowych zakłócają pożądaną proporcjonalność strumienia komutacyjnego do prądu twornika. Prowadzi to do rozstrojenia biegunów komutacyjnych i pogorszenia dynamicznych własności komutacyjnych maszyny.

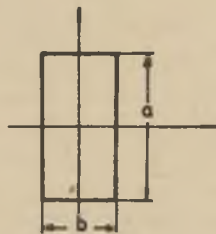
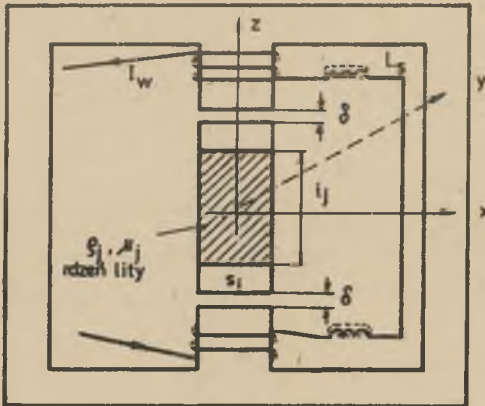
Analiza przebiegów nieustalonych w maszynie prądu stałego, przy uwzględnieniu oddziaływania prądów wirowych, jest bardzo utrudniona, co uzasadnia korzystanie z maszyn matematycznych przy obliczeniach stanów nieustalonych konkretnych maszyn o danych parametrach. Przy tym wymagana jest znajomość transmitancji obwodu magnetycznego z blokiem litym i konieczne jest opracowanie schematu zastępczego uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym przydatnego do praktycznych obliczeń.

2. Transmitancja obwodu magnetycznego z blokiem litym

Rozpatruje się model obwodu magnetycznego składającego się z trzech części: zwory idealnie pakietowanej o $\sigma = \infty$ i $\mu = \infty$, rdzenia litego

o prostokątnym przekroju i szczeliny powietrznej przy następujących założeniach:

- rozkład pola w szczelinie powietrznej i pakietowanej części jest jednorodny,
- przenikalność magnetyczna μ_j i rezystywność ρ_j bloku litego są stałe,
- strumień główny jest idealnie sprzężony z uzwojeniem wzbudzenia, strumień rozproszenia nie sprzęga się z blokiem litym.



Rys. 1. Model obwodu magnetycznego z blokiem litym

Przebiegi nieustalone prądu w uzwojeniu wzbudzenia i strumienia magnetycznego w modelu obwodu magnetycznego z blokiem litym (rys. 1) opisuje równanie obwodu elektrycznego

$$U_w(t) = R_w I_w(t) + L_s \frac{dI_w(t)}{dt} + z_w \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (1)$$

gdzie:

$$\Phi(t) = \mu_j \int_{a_j} H(x, y, t) ds \quad (2)$$

oraz równania Maxwella dla litego materiału ferromagnetycznego, które po uwzględnieniu jednoosiowego układu pola w rdzeniu przyjmują w zapisie operatorowym przy zerowych warunkach początkowych postać

$$\frac{\partial^2 H(x, y, p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H(x, y, p)}{\partial y^2} = \alpha_j^2 p H(p) \quad (3)$$

gdzie

$$\alpha_j^2 = \frac{\mu_j}{\rho_j}$$

Równanie (3) przy uwzględnieniu warunków brzegowych

$$\text{dla } x = \pm \frac{b}{2}, \quad y = \pm \frac{a}{2} \quad H = H_0$$

ma następujące rozwiązanie:

$$\frac{H(x, y, p)}{H_0(p)} = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{k\pi} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left[\frac{\cosh \frac{\xi}{2} x}{\cosh \frac{\xi}{2} \frac{x}{2}} \cos k \frac{\pi}{a} y + \frac{\cosh \eta y}{\cosh \eta \frac{a}{2}} \cos k \frac{\pi}{b} x \right] \quad (4)$$

gdzie:

$$\xi^2 = \alpha_j^2 p + (k \frac{\pi}{a})^2$$

$$\eta^2 = \alpha_j^2 p + (k \frac{\pi}{b})^2$$

Strumień magnetyczny zawarty w przekroju a-b rdzenia

$$\Phi(p) = \mu_j \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} H(x, y, p) dx dy \quad (5)$$

Rozwiązanie tej całki

$$\Phi(p) = \mu_j H_0(p) ab \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left[\frac{\operatorname{tgh} \frac{1}{2} \frac{b}{a} \sqrt{(k\pi)^2 + (\alpha_j a)^2} p}{\frac{b}{a} \sqrt{(k\pi)^2 + (\alpha_j a)^2} p} + \frac{\operatorname{tgh} \frac{1}{2} \frac{a}{b} \sqrt{(k\pi)^2 + (\alpha_j b)^2} p}{\frac{a}{b} \sqrt{(k\pi)^2 + (\alpha_j b)^2} p} \right] \quad (6)$$

Operatorowa permeancja bloku litego

$$\Lambda_j(p) = \frac{\Phi(p)}{H_0(p) I_j} \quad (7)$$

Funkcja (7) jest meromorficzną funkcją analityczną zmiennej zespolonej p o nieskończonej liczbie biegunów prostych. Przy założeniu dużej przenikalności magnetycznej $\mu_j \rightarrow \infty$ i małej rezystywności bloku litego $\varrho_j \rightarrow 0$ można przyjąć, że w granicy $\alpha_j = \frac{\mu_j}{\varrho_j} \rightarrow \infty$ przy stałym danym współczynniku materiałowym bloku litego $\mu_j \varrho_j = \text{const}$. W granicy

$$\alpha_j \lim_{\rightarrow \infty} \left[\operatorname{tgh} \frac{1}{2} \frac{b}{a} \sqrt{(k\pi)^2 + (\alpha_j a)^2 p} \right] = 1$$

Po podstawieniu wzoru (6) do (7) z uwzględnieniem podanych uproszczeń, operatorowa permeancja bloku litego przybiera postać szeregu nieskończonego

$$\begin{aligned} \Lambda_j(p) = \frac{a b}{l_j} \cdot \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{k\pi}{\mu_j}\right)^2 + \frac{a^2}{\mu_j \varrho_j} p}} + \\ + \frac{1}{\frac{a}{b} \sqrt{\left(\frac{k\pi}{\mu_j}\right)^2 + \frac{b^2}{\mu_j \varrho_j} p}} \end{aligned} \quad (8)$$

Ponieważ przyjęto $\mu_j \rightarrow \infty$ to $\frac{k\pi}{\mu_j} \rightarrow 0$

Uwzględniając, że

$$\sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

otrzymuje się ostatecznie

$$\Lambda_j(p) = \frac{2(a+b)}{l_j} \sqrt{\frac{\mu_j \varrho_j}{p}} \quad (9)$$

Wypadkowa operatorowa reluktancja obwodu magnetycznego jest sumą reluktancji szczeliny i rdzenia litego

$$R_m(p) = \frac{2\delta}{a_j \mu_0} + \frac{l_j}{a_j \mu_j \Lambda_j(p)} \quad (10)$$

Stąd

$$R_m(p) = \frac{2\delta}{a_j \mu_0} (1 + \sqrt{p T_j}), \quad (11)$$

gdzie.

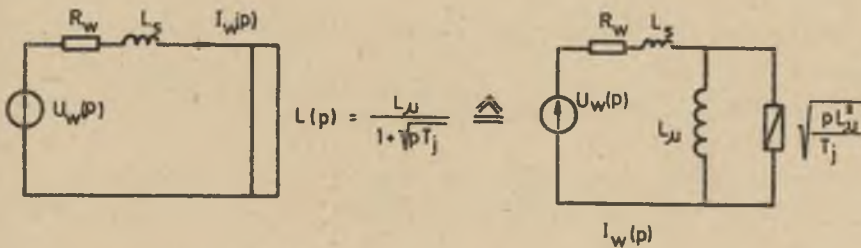
$$T_j = \frac{l_j^2 a_j^2 \mu_0^2}{16(a+b)^2 \mu_j \sigma_j \delta^2} - \text{stała czasowa bloku litego.}$$

Względna operatorowa permeancja obwodu magnetycznego

$$\Lambda_m(p) = \frac{R_m(p=0)}{R_m(p)} \quad (12)$$

pozwala wyznaczyć operatorową transmitancję obwodu magnetycznego z blokiem litym

$$K(p) = \frac{\Psi(p)}{I_w(p)} = k \Lambda_m(p) = \frac{L_\mu}{1 + \sqrt{p T_j}} \quad (13)$$



Rys. 2. Schemat zastępczy uzwojenia z blokiem litym o stałych rozłożonych

Z równania (13) wynika schemat zastępczy układu uzwojenia z blokiem litym (rys. 2), który oddaje w relacji operatorowej wpływ rozłożonych stałych bloku litego. Uwzględniając relację operatorową na napięcie zasilania z równania (1) przy zerowych warunkach początkowych

$$U_w(p) = R_w I_w(p) + L_s p I_w(p) + p \Psi(p) \quad (14)$$

prąd w uzwojeniu wzbudzenia

$$I_w(p) = \frac{1}{R_w} \cdot \frac{U_w(p)}{1 + p T_\mu [\hat{G}_m + \Lambda_m(p)]} \quad (15)$$

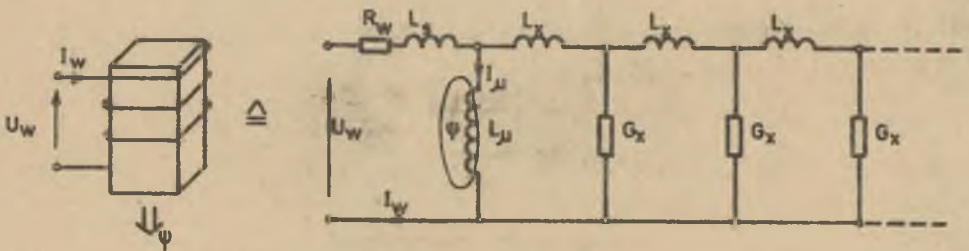
gdzie:

$$G_m = L_s/L_\mu$$

$$T_\mu = L_\mu/R_w$$

3. Schemat zastępczy obwodu magnetycznego z blokiem litym o stałych skupionych

Oddziaływanie prądów wirowych ściśle wg relacji (13) uwzględnił schemat zastępczy uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym przedstawiony na rys.3. Blok lity jest reprezentowany na tym schemacie przez nie obciążoną linię długą o parametrach równomiernie rozłożonych.



Rys. 3. Nieobciążona linia długa jako schemat zastępczy uzwojenia z blokiem litym

Operatorowa transmitancja obwodu magnetycznego

$$K_I(p) = \frac{\Psi(p)}{I_w(p)} = \frac{L_\mu}{1 + \sqrt{pT}} \quad (16)$$

gdzie:

$$T = \frac{L_\mu^2 G_x}{L_x}$$

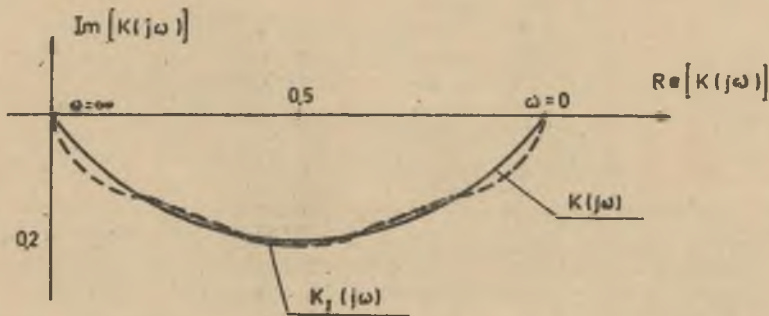
Zastosowanie schematu z rys. 3 do analizy obwodu magnetycznego z blokiem litym wymaga aproksymacyjnego zastąpienia linii nieskończenie długiej modelem linii jednorodnej o skończonej liczbie szeregowo połączonych czwórników zbudowanych z elementów skupionych (linię łańcuchową). Przy takiej aproksymacji występują błędy [2], które ujawniają się w przebiegu charakterystyki częstotliwości modelu obwodu wzbudzenia z blokiem litym dla bardzo dużych i bardzo małych częstotliwości (rys. 4) oraz w elektromagnetycznych przebiegach czasowych tego modelu odpowiednio dla bardzo

krótkich i bardzo długich czasów przebiegu nieustalonego. Po przejściu z zapisu operatorowego na postać czasową dla wymuszeń skokowych

$$L^{-1} \left\{ \frac{k}{1 + \sqrt{pT_j}} \right\} = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T_j}} \operatorname{erfc} \sqrt{\frac{t}{T_j}} \right) \quad (17)$$

gdzie:

$$\operatorname{erfc} = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty e^{-x^2} dx$$



Rys. 4. Charakterystyka częstotliwości $K(j\omega)$. Linią ciągłą zaznaczono krzywą teoretyczną otrzymaną z równania (13), a linią przerywaną - krzywą aproksymującą

Z powodu trudności korzystania ze stabilizowanej funkcji erfc przy praktycznych obliczeniach zachodzi konieczność aproksymacji wielowkładniczej [3]

$$L^{-1} \left\{ \frac{L_\mu}{1 + \sqrt{pT_j}} \right\} \approx L_\mu \left(1 - 0,32 e^{-\frac{t}{T_1}} - 0,4 e^{-\frac{t}{T_2}} - 0,2 e^{-\frac{t}{T_3}} - 0,08 e^{-\frac{t}{T_4}} \right), \quad (18)$$

gdzie

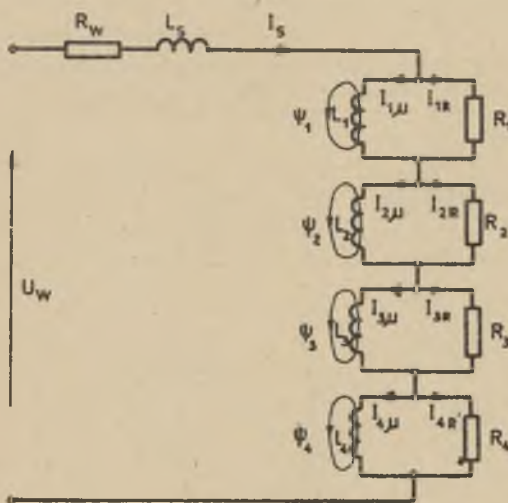
$$T_1 = 0,05 T_j, \quad T_2 = 1,25 T_j, \quad T_3 = 17 T_j, \quad T_4 = 300 T_j.$$

Transformując równanie (18) wg Laplace'a-Carsona

$$\frac{\Psi(p)}{I_w(p)} \approx \frac{L_1}{1 + pT_1} + \frac{L_2}{1 + pT_2} + \frac{L_3}{1 + pT_3} + \frac{L_4}{1 + pT_4}, \quad (19)$$

gdzie:

$$L_1 = 0,32 L_\mu, \quad L_2 = 0,4 L_\mu, \quad L_3 = 0,2 L_\mu, \quad L_4 = 0,08 L_\mu.$$



Rys. 5. Schemat zastępczy uzwojenia z blokiem litym o stałych skupionych aproksymujący przebiegi rzeczywiste przebiegami czterowykładniczymi

Równanie (19) pozwala na podanie schematu zastępczego obwodu wzbudzenia z blokiem litym (rys. 5).

Liniozwoje wypadkowe

$$\Psi(t) = L_1 I_{1\mu}(t) + L_2 I_{2\mu}(t) + L_3 I_{3\mu}(t) + L_4 I_{4\mu}(t) \quad (20)$$

prądy magnesujące

$$\frac{dI_{1\mu}}{dt} = \frac{R_1}{L_1} (I_W - I_{1\mu})$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \quad (21)$$

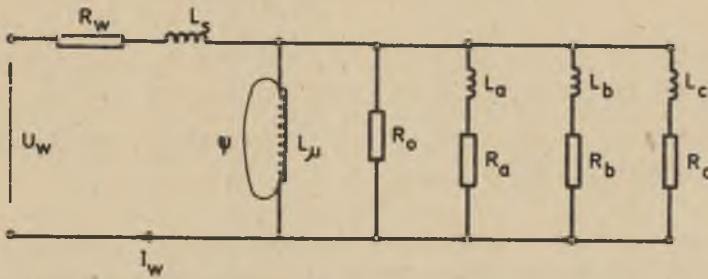
$$\frac{dI_{4\mu}}{dt} = \frac{R_4}{L_4} (I_W - I_{4\mu})$$

prąd wzbudzenia

$$\frac{dI_W(t)}{dt} = \frac{1}{L_S} U_W(t) - \frac{R}{L_S} I_W(t) - \frac{R_1}{L_S} I_{1R}(t) - \frac{R_2}{L_S} I_{2R}(t) - \frac{R_3}{L_S} I_{3R}(t) - \frac{R_4}{L_S} I_{4R}(t) \quad (22)$$

Można wykazać, że schemat zastępczy uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym z rys. 5 daje się przedstawić za pomocą układu pokazanego na rys. 6. Parametry tego schematu zastępczego o strukturze równoległych obwodów prądów wirowych bocznikujących główną reaktancję magnesującą można wyznaczyć dwiema metodami:

- przez porównanie odpowiednich współczynników transmitancji operatorowych obwodu magnetycznego z blokiem litym dla schematów szeregowego (rys. 5) i równoległego (rys. 6),
- przez rozkład na ułamki proste admitancji operatorowej obwodu magnetycznego z blokiem litym dla schematu równoległego (rys. 6).

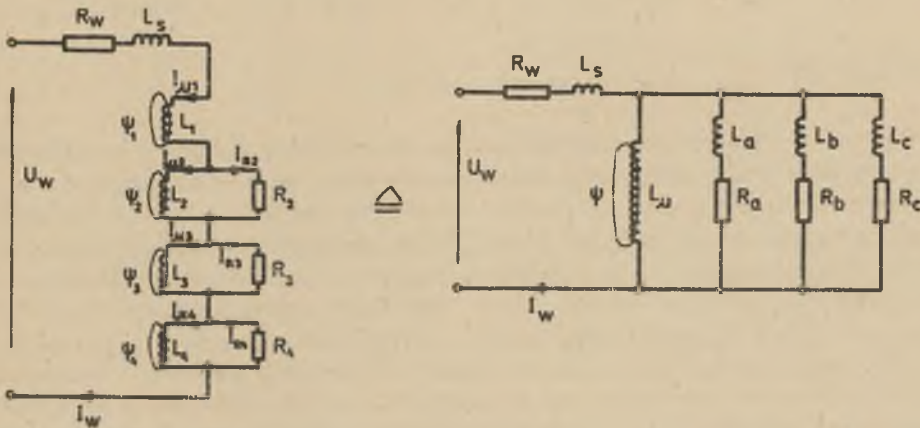


Rys. 6. Schemat zastępczy uzwojenia z blokiem litym o strukturze równoległych obwodów prądów wirowych bocznikujących indukcyjność magnesującą

Parametry te przyjmują następujące wartości:

$$\begin{aligned}
 R_o &= 6,732 \frac{L_\mu}{T_j} \\
 T_a &= 0,5772 T_j & L_a &= 0,3202 L_\mu \\
 T_b &= 13,4525 T_j & L_b &= 4,3356 L_\mu \\
 T_c &= 276,3543 T_j & L_c &= 11,8652 L_\mu
 \end{aligned}$$

Wartości liczbowe, przyjmowane przez stałe czasowe $T_1 \dots T_4$ dla schematu szeregowego (rys.5, równanie 18), wykazują bardzo dużą rozpiętość. Iloraz T_4/T_1 wynosi 6000. Istnieje zatem możliwość uproszczenia schematu zastępczego uzwojenia z blokiem litym przez pominięcie najmniejszej stałej czasowej ($T_1 \rightarrow 0$) oraz składowej przejściowej o największej stałej czasowej ($T_4 \rightarrow \infty$). Przy założeniu $T_1 = 0$ obowiązują schematy zastępcze szeregowy i równoważny mu równoległy przedstawione na rys. 7.

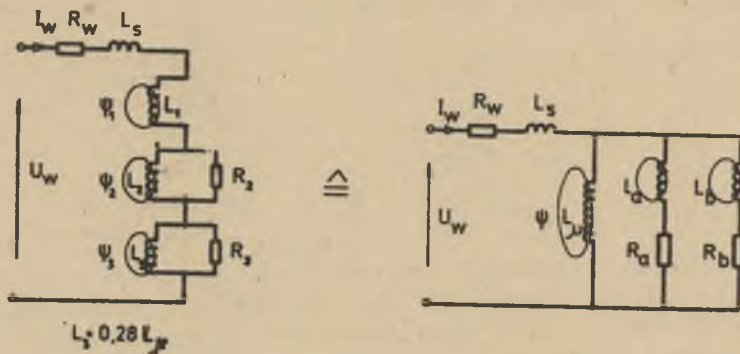


Rys. 7. Uproszczenie schematu zastępczego z rys. 5 i rys. 6 dla $T_1 \rightarrow 0$

Parametry dla tych schematów wynoszą odpowiednio:

$$\begin{array}{llll} T_1 = 0 & L_1 = 0,32 L_\mu & T_a = 0,5489 T_j & L_a = 0,565 L_\mu \\ T_2 = 1,25 T_j & L_2 = 0,4 L_\mu & T_b = 13,448 T_j & L_b = 3,673 L_\mu \\ T_3 = 17 T_j & L_3 = 0,2 L_\mu & T_c = 276,353 T_j & L_c = 11,876 L_\mu \\ T_4 = 300 T_j & L_4 = 0,08 L_\mu & & \end{array}$$

Przy założeniu $T_1 \rightarrow 0$, $T_4 \rightarrow \infty$ oraz dodatkowo $L_3 = 0,28 L_\mu$ (z rys.5) uzyskuje się dalsze uproszczenie równoległego schematu zastępczego uzwojenia z blokiem litym (rys. 8).

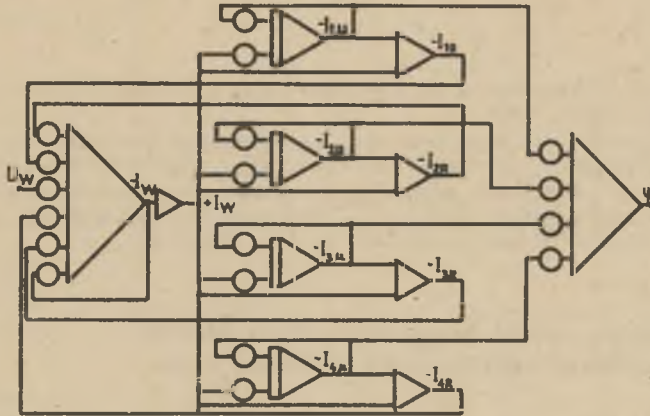


Rys. 8. Uproszczenie schematu zastępczego z rys. 5 dla $T_1 \rightarrow 0$ i $T_4 \rightarrow \infty$

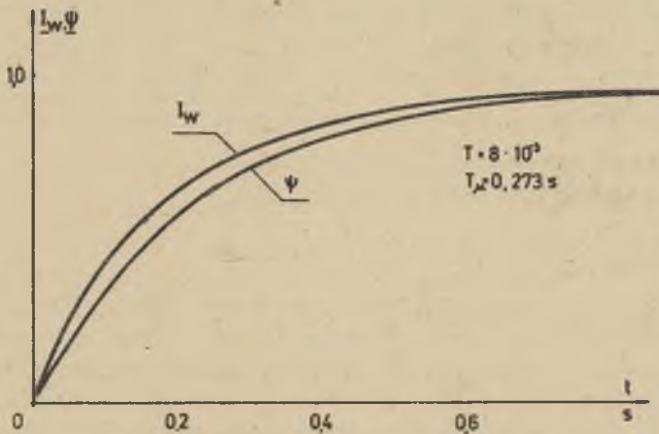
Parametry wynoszą odpowiednio:

$$\begin{array}{llll} T_1 = 0 & L_1 = 0,32 L_\mu & T_a = 0,5465 T_j & L_a = 0,5616 L_\mu \\ T_2 = 1,25 T_j & L_2 = 0,4 L_\mu & T_b = 12,4435 T_j & L_b = 2,9026 L_\mu \\ T_3 = 17 T_j & L_3 = 0,28 L_\mu & & \\ T_4 = \infty & L_4 = 0 & & \end{array}$$

Schematy te mogą być wykorzystane do praktycznych obliczeń przebiegów strumienia i prądu wzbudzenia przy pomocy maszyn matematycznych. Nr rys.9 pokazano analog zbudowany w oparciu o równania (20-22), a na rys. 10 przebiegi uzyskane na tym analogu przy skokowym załączeniu napięcia stałego do uzwojenia z blokiem litym. Przyjęte przy budowie schematów zastępczych uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym założenia upraszczające $T_1 \rightarrow 0$, $T_4 \rightarrow \infty$ powodują jednak pewne błędy. Uproszczenie $T_1 \rightarrow 0$ zniekształca przebieg charakterystyki częstotliwości w zakresie wysokich częstotliwości, natomiast założenia $T_4 \rightarrow \infty$ powoduje błędy tym większe im niższa jest częstotliwość (rys. 4). W przebiegach czasowych błędy te ujawniają się odpowiednio przy małych i dużych czasach przebiegów nie ustalonych.



Rys. 9. Analog uzwojenia wzbudzenia z blokiem litym zbudowany w oparciu o równania (20-22)



Rys. 10. Przebiegi czasowe $\Psi(t)$ i $I_w(t)$ przy skokowej zmianie napięcia wzbudzenia uzyskane z maszyny analogowej

4. Wnioski

Uwzględnienie wpływu bloku litego na przebiegi nie ustalone w maszynach prądu stałego jest możliwe przy stosowaniu schematów zastępczych obwodu wzbudzenia równoległych bądź szeregowych o różnym stopniu uproszczenia wynikających z 4-wykładniczej aproksymacji przebiegów narastania stumienia. Przedstawione schematy zastępcze obwodu magnetycznego z blokiem litym mogą być również wykorzystane przy analizie oddziaływania bloku litego w innych typach maszyn elektrycznych.

LITERATURA

- [1] Paszek W.: Wzmacniacze elektromaszynowe i transduktorowe w przemyśle ciężkim. Śląsk, 1971.
- [2] Łyczkina G.P.: O modelowaniu pierochnodnych procesow w cieżiach s irraccjonalnymi pieriedacznymi funkcjami. Elektriczeetwo Nr 5, 1977.
- [3] Paszek W., Glinka T.: Wyznaczenie dynamicznej strefy beziskrowej komutacji maszyn prądu stałego na podstawie charakterystyki częstotliwości. Archiwum Elektrotechniki, T. XIX, 21/1970.

ВЛИЯНИЕ Вихревых токов в массивных частках статора
на электромагнитные свойства машин постоянного тока

Р е з ю м е

В статье представлено передаточную функцию магнитного потока машин постоянного тока с литым ярмом статора. Предложено схему замещения обмотки возбуждения учитывая вихревые токи возбуждаемые в массивных частках ярма статора. Предложено пример практических расчётов тока возбуждения и магнитного потока в переходных процессах.

REACTION OF EDDY CURRENTS IN SOLID YOKE PARTS
ON ELECTROMAGNETIC PROPERTIES OF DC MACHINES

S u m m a r y

The operational transmittance of the magnetic flux in the magnetic circuit of dc machine with solid ferromagnetic parts in the yoke was derived. The equivalent circuit for the exciting winding was presented at different approximation degrees of the solid ferromagnetic parts. The rising flux and exciting current plots were exemplified.