ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ELEKTRYKA z. 61 Nr kol. 553

Władysław PASZEK
Adam RÓŻYCKI

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

OPERATOROWY SCHEMAT ZASTĘPCZY MODUŁU CIEPLNEGO W MASZYNACH ELEKTRYCZNYCH W STANIE CIEPLNIE NIEUSTALONYM I JEGO APROKSYMACJA PRZYBLIŻONYMI ANALOGAMI ELEKTRYCZNYMI

Streszczenie. Stosując przekształcenie Laplace-Carsona równań różniczkowych przewodnictwa cieplnego, opisujących stan cieplnie nieustalony w prostym odcinku pręta uzwojenia, zbudowano operatorowy schemat zastępczy modułu cieplnego maszyny elektrycznej, traktując temperaturę średnią jako zmienną stanu. Przedstawiono aproksymację tego modułu cieplnego za pomocą elektrycznych schematów analogowych. Przedyskutowano wpływ wymiarów geometrycznych wyodrębnionego elementu pręta na rozbieżność modułowo-fazowych charakterystyk częstotliwości przybliżonego analogu elektrycznego w stosunku do modułu cieplnego.

1. Wstęp

Obraz pola temperaturowego maszyny elektrycznej w stanach cieplnie nieustalonych wynika z układu równań różniczkowych przewodnictwa cieplnego

$$c\gamma \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \operatorname{div}(-\lambda \operatorname{grad}) + q(x,y,z,t), \tag{1}$$

gdzie funkcja $\vartheta(x,y,z,t)$ spełniająca powyższe równanie opisuje zmienne w czasie źródłowe trójwymiarowe pole temperatury.

Dla rozwiązania układu równań (1) trzeba znać początkowy rozkład temperatury, kształt geometryczny elementów maszyny oraz wzajemne powiązanie cieplne rozważanego elementu maszyny z innymi elementami i z medium chłodzącym.

Maszyna elektryczna stanowi jednak tak skomplikowany układ cieplny, że rozwiązanie równań przewodnictwa cieplnego, przy uwzględnieniu warunków brzegowych, dla całej maszyny staje się praktycznie niemożliwe.

W literaturze dotyczącej nieustalonych stanów cieplnych w maszynach elektrycznych spotyka się rozwiązania analityczne zagadnień przewodnictwa cieplnego (na ogół jednowymiarowego) [2], [7] dla jednego a co najwyżej dwu wybranych [1], [3] elementów maszyny cieplnie powiązanych równolegle (np. pakiet blach stojana i uzwojenie w części żłobkowej) lub szeregowo (np. uzwojenie w części żłobkowej i czołowej).

Otrzymane rozwiązania analityczne są mało użyteczne ze względu na skomplikowaną postać końcową. Najskuteczniejszym środkiem rozwiązującym tego typu układ równań jest zastąpienie stałych rozłożonych uproszczonym układem stałych skupionych. Wymagana jest tutaj dyskretyzacja pola cieplnego a więc przejście ze środowiska ciągłego opisanego równaniami różniczkowymi przewodnictwa cieplnego na siatkę przestrzenno-czasową.

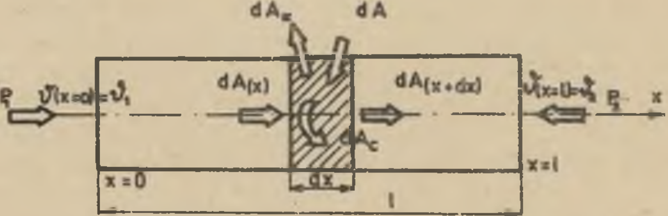
Jednak i w tym przypadku, nawet przy zastosowaniu elektronicznej techniki obliczeniowej; jak np. maszyn cyfrowych (MC), maszyn analogowych (MA) względnie przyrządów analogowych (analogów) rezystancyjno-pojemnościowych (RC) lub przyrządów analogowych (analogów) rezystancyjnych (R), metoda ta jest na ogół zbyt skomplikowana ze względu na bardzo złożony układ cieplny maszyny elektrycznej.

Zarówno dla konstruktora, jak i dla użytkownika maszyn elektrycznych, wystarczająca jest w szeregu przypadkach znajomość uśrednionych przebiegów temperaturowo-czasowych w elementach, na które podzielono całą maszynę elektryczną. Przy podziale na małą liczbę elementów względnie przy zastąpieniu większych fragmentów maszyny elektrycznej ciałem zastępczym o uśrednionej temperaturze i wkomponowaniu tego ciała w schemat zastępczy całej maszyny, można określić średnie pole temperatur w funkcji czasu, przy znacznie obniżonej pracochłonności i kosztach oprogramowania.

Warunkiem realizacji tego zamierzenia jest opracowanie schematów modułów cieplnych wybranych elementów maszyny elektrycznej, które najczęściej da się przedstawić w postaci przewodzących cieplnie ścianek, prętów czy wycinków walca wiernie odwzorowujących stan cieplnie nieustalony.

2. Schemat zastępczy modułu cieplnego elementu maszyny

Sporządzanie schematu zastępczego modułu cieplnego przedstawiono na przykładzie nagrzewania się pręta (rys. 1), reprezentującego wydzielony element maszyny elektrycznej, w którym nieustalony ruch ciepła opisany jest jednowymiarowym równaniem przewodzenia ciepła. Założono, że pręt o długości (l) i stałym przekroju poprzecznym dowolnego kształtu o powierzchni przekroju (s) i obwodzie (O_k) ma przewodność cieplną (λ), ciepło właści-



Rys. 1. Bilans cieplny w pręcie w stanie nieustalonym

we (c) i gęstość właściwą (γ). Pręt nagrzewany jest rozłożonymi stratami własnymi zależnymi od temperatury $p_o sl\,(1+\alpha\vartheta)$, gdzie przez ($p_o$) oznaczono umowną jednostkową moc strat własnych przy stałej temperaturze ciała równej 0^oC, zaś przez (α) temperaturowy współczynnik rezystancyjny. Założono również wymianę ciepła z czołowych i bocznych krawędzi pręta, przyjmując stałą wartość współczynnika przejmowania ciepła (k) z krawędzi bocznych do sąsiedniego elementu, względnie otaczającego czynnika chłodzącego o temperaturze $\vartheta_{k,śr}$.

Dla elementu o długości dx (rys. 1) obowiązuje następujące równanie bilansu cieplnego:

$$dA_x - dA_{(x+dx)} + dA - dA_k - dA_c = 0, \tag{2}$$

gdzie:

$dA_x = -\lambda s \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,dt$ – energia cieplna dopływająca do elementu dx w czasie dt,

$dA_{(x+dx)} = -\lambda s \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\,dt - \lambda s \frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}\,dx\,dt$ – energia cieplna odpływająca z elementu dx w czasie dt,

$dA = p_o s(1+\alpha\vartheta)\,dx\,dt$ – energia cieplna wydzielana w elemencie dx w czasie dt,

$dA_k = k\,O_k(\vartheta - \vartheta_{k,śr})\,dx\,dt$ – energia cieplna wymieniana przez element dx w czasie dt z sąsiednim elementem lub z otoczeniem o temperaturze $\vartheta_{k,śr}$,

$dA_c = c\gamma s \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,dx\,dt$ – energia cieplna akumulowana w elemencie dx w czasie dt.

Po podstawieniu do wzoru (2) i uporządkowaniu

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} - \left(\frac{k\,O_k - \alpha p_o s}{\lambda s}\right)\vartheta + \frac{k\,O_k}{\lambda s}\vartheta_{k,śr} + \frac{p_o}{\lambda} - \frac{c\gamma}{\lambda}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

W wyniku przyjętych założeń

$$\frac{k\,O_k - \alpha p_o s}{\lambda s} = \text{const}, \quad \frac{k\,O_k}{\lambda s} = \text{const}, \quad \frac{p_o}{\lambda} = \text{const}, \quad \frac{c\gamma}{\lambda} = \text{const}. \tag{4}$$

Uwzględniono warunki:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{początkowe} & \text{dla } t = 0 & \vartheta(x,t) = \vartheta(x,o) & \\ \text{brzegowe} & \text{dla } t \geq 0 & P_1 = -\lambda s \frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial x} & \text{przy } x = 0 \\ & & P_2 = +\lambda s \frac{\partial\vartheta(x,t)}{\partial x} & \text{przy } x = l \end{array}\right] \tag{5}$$

Stosując przekształcenie Laplace'a-Carsona względem zmiennej czasu, można przedstawić równanie liniowe o stałych współczynnikach (3) równaniem w postaci operatorowej:

$$\frac{d^2\vartheta(x,p)}{dx^2} - \frac{1}{\lambda s}\left[k\,O_k - \alpha p_o s + c\gamma s p\right]\vartheta(x,p) + \frac{k\,O_k}{\lambda s}\vartheta_{k,śr}(p) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda s}\left[p_o s + c\gamma s p \vartheta(x,o)\right] = 0. \tag{6}$$

Podstawiając:

$$\frac{1}{\lambda s}\left[k\,O_k - \alpha p_o s + c\gamma s p\right] = a^2$$

$$\frac{1}{\lambda s}\left[k\,O_k\vartheta_{k,śr}(p) + p_o s + c\gamma s p\vartheta(x,o)\right] = b \tag{7}$$

otrzymamy równanie różniczkowe względem zmiennej położenia:

$$\frac{d^2\vartheta(x,p)}{dx^2} - a^2\vartheta(x,p) + b = 0 \tag{8}$$

z warunkami początkowymi

$$\vartheta(x,t) = \vartheta(x,o)$$

brzegowymi

$$P_1(x,p) = -\lambda s\frac{d\vartheta(x,p)}{dx} \quad \text{dla} \quad x = 0$$

$$P_2(x,p) = \lambda s\frac{d\vartheta(x,p)}{dx} \quad \text{dla} \quad x = 1, \tag{9}$$

którego rozwiązanie

$$\vartheta(x,p) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + \frac{b}{a^2}, \tag{10}$$

gdzie:

$$\frac{b}{a^2} = \frac{p_o s + k\,O_k\vartheta_{k,śr}(p) + c\gamma s\,p\vartheta(x,o)}{k\,O_k - \alpha p_o s + c\gamma s\,p}, \tag{11}$$

$$\frac{d\vartheta(x,p)}{dx} = a(C_1 e^{ax} - C_2 e^{-ax}). \tag{12}$$

Stałe C_1, C_2 wynikają z układu równań (9)

$$C_1 = \frac{P_1(p)\,e^{-al} + P_2(p)}{2\lambda s\ a\ sh\ al} \qquad C_2 = \frac{P_1(p)\,e^{al} + P_2(p)}{2\lambda s\ a\ sh\ al}. \tag{13}$$

Po podstawieniu do wzoru (10)

$$\vartheta(x,p) = \frac{P_1(p)}{\lambda s\ a}\cdot\frac{ch\ a(x-l)}{sh\ al} + \frac{P_2(p)}{\lambda s\ a}\cdot\frac{ch\ ax}{sh\ al} + \frac{b}{a^2} \tag{14}$$

Średnia wartość temperatury pręta

$$\vartheta_{śr}(p) = \frac{1}{l}\int_0^l \vartheta(x,p)\,dx \tag{15a}$$

stąd

$$\vartheta_{śr}(p) = \frac{P_1(p) + P_2(p)}{\lambda s\ a^2 l} + \frac{b}{a^2}. \tag{15b}$$

Oznaczając $P_o = p_o sl$, $\Lambda_k = k\ O_k l$, $cG = c\gamma sl$ po podstawieniu do wyrażeń (7) i wykorzystując równanie (15b)

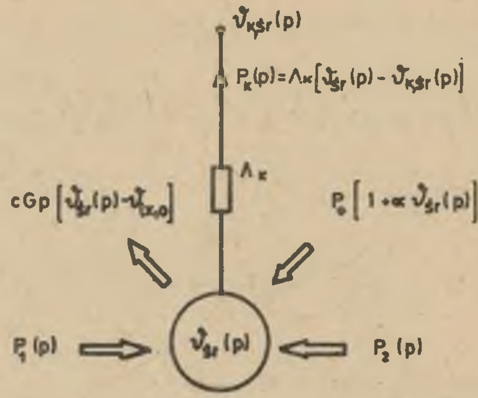
$$\vartheta_{śr}(p) = \frac{P_1(p) + P_2(p)}{\Lambda_k - \alpha P_o + cGp} + \frac{P_o + \Lambda_k\vartheta_{śr}(p) + cGp\vartheta(x,o)}{\Lambda_k - \alpha P_o + cGp}. \tag{16}$$

Po uporządkowaniu

$$P_1(p) + P_2(p) + P_o\left[1 + \alpha\vartheta_{śr}(p)\right] - \Lambda_k\left[\vartheta_{śr}(p) - \vartheta_{k,śr}(p)\right] -$$

$$- cGp\left[\vartheta_{śr}(p) - \vartheta(x,o)\right] = 0 \tag{17}$$

Równaniu (17) odpowiada schemat zastępczy w stanie cieplnie nieustalonym przedstawiony na rys. 2.



Rys. 2. Cieplny schemat zastępczy modułu odwzorowujący temperaturę średnią pręta w stanie nieustalonym, zgodnie z równaniem (17)

Korzystając z zależności (14), (16)

$$\vartheta_1(p) - \vartheta_{śr}(p) = P_1(p)\left[\frac{\mathrm{ctgh}\,al - \frac{1}{al}}{\lambda s a}\right] + P_2(p)\left[\frac{\frac{1}{\mathrm{sh}\,al} - \frac{1}{al}}{\lambda s a}\right], \tag{18a}$$

$$\vartheta_2(p) - \vartheta_{śr}(p) = P_2(p)\left[\frac{\mathrm{ctgh}\,al - \frac{1}{al}}{\lambda s a}\right] + P_1(p)\left[\frac{\frac{1}{\mathrm{sh}\,al} - \frac{1}{al}}{\lambda s a}\right]. \tag{18b}$$

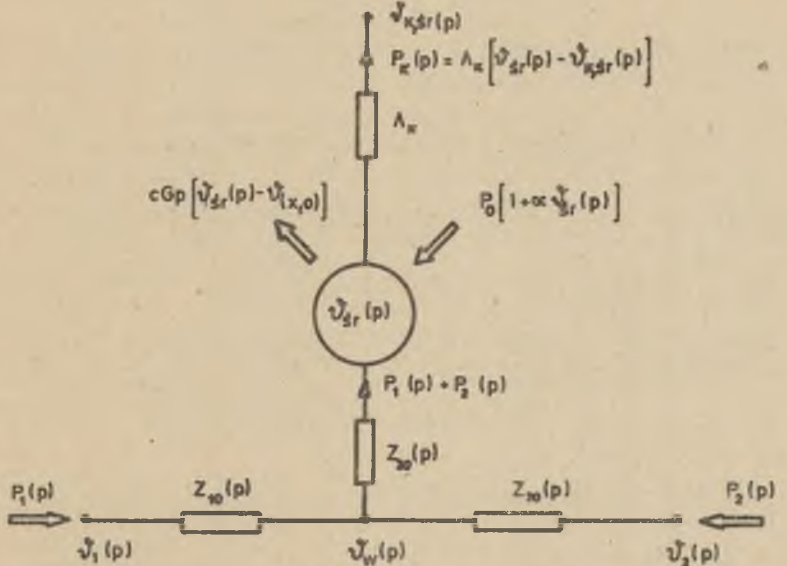
Po podstawieniu za operatorową admitancję względnie impedancję cieplną:

$$\Lambda_1(p) = \frac{1}{Z_1(p)} = \frac{\lambda s a}{\frac{1}{\mathrm{sh}\,al} - \frac{1}{al}} \qquad \Lambda_2(p) = \frac{1}{Z_2(p)} = \frac{\lambda s a}{\mathrm{ctgh}\,al - \frac{1}{al}} \tag{19}$$

$$\vartheta_1(p) - \vartheta_{śr}(p) = \frac{P_1(p)}{\Lambda_2(p)} + \frac{P_2(p)}{\Lambda_1(p)} \tag{20a}$$

$$\vartheta_2(p) - \vartheta_{śr}(p) = \frac{P_2(p)}{\Lambda_2(p)} + \frac{P_1(p)}{\Lambda_1(p)}. \tag{20b}$$

Wprowadzając schemat zastępczy podany na rys. 3 można z równań (20a,b) wyliczyć impedancje operatorowe do punktu gwiazdowego schematu zastępczego.



Rys. 3. Cieplny schemat zastępczy modułu odwzorowujący temperaturę średnią pręta w stanie nieustalonym

Z równania (20a) wynika:

$$\text{przy } P_1(p) = 0 \quad Z_{30}(p) = Z_1(p)$$

oraz

$$\text{przy } P_2(p) = 0 \quad Z_{30}(p) + Z_{10}(p) = Z_2(p). \tag{21a}$$

Z równania (20b) wynika:

$$\text{przy } P_2(p) = 0 \quad Z_{30}(p) = Z_1(p)$$

oraz

$$\text{przy } P_1(p) = 0 \quad Z_{20}(p) + Z_{30}(p) = Z_2(p). \tag{21b}$$

Stąd wynika ostatecznie:

$$Z_{10}(p) = Z_{20}(p) = \frac{\operatorname{ch} al - 1}{\lambda s a \operatorname{sh} al} \tag{22a}$$

$$Z_{30}(p) = \frac{al - \operatorname{sh} al}{\lambda s a^2 l \operatorname{sh} al}. \tag{22b}$$

gdzie

$$al = \sqrt{\frac{1}{\lambda s}\,(k\,l\,O_k - \alpha p_o\,s\,l + c\gamma s\,l\,p)} \tag{23}$$

$$\lambda s\,a = \sqrt{\frac{\lambda s}{l}\,(k\,l\,O_k - \alpha p_o\,s\,l + c\gamma s\,l\,p)}. \tag{24}$$

Można wyrazić al oraz λsa za pomocą wielkości pomocniczych:

$R_\lambda = \frac{l}{\lambda s}$ - opór cieplny pręta dla ruchu ciepła wzdłuż osi x,

$R_k = \frac{1}{k\,l\,O_k}$ - opór cieplny dla ruchu ciepła z bocznej powierzchni pręta, (25)

$P_o = p_o\,s\,l$ - znane straty własne wydzielane w pręcie (stałe),

$cG = c\gamma s\,l$ - pojemność cieplna pręta.

Po podstawieniu wzorów (25) do (24)

$$al = \sqrt{R_\lambda}\,\sqrt{\left(\frac{1}{R_k} - \alpha P_o\right) + cGp}$$

$$\lambda sa = \frac{1}{\sqrt{R_\lambda}}\,\sqrt{\left(\frac{1}{R_k} - \alpha P_o\right) + cGp}. \tag{26}$$

Przyjmując:

$$\frac{1}{R_k^*} = \frac{1}{R_k} - \alpha P_o \qquad \beta = \sqrt{\frac{R_\lambda}{R_k^*}} \tag{27}$$

oraz wprowadziwszy cieplną stałą czasową $T_k^* = R_k^*\,cG$, operatorowe impedancje cieplne (22a,b) przyjmują postać:

$$Z_{10}(p) = Z_{20}(p) = \frac{R_\lambda}{\beta\sqrt{1+p\,T_k^*}}\;\frac{\mathrm{ch}\,\beta\sqrt{1+pT_k^*} - 1}{\mathrm{sh}\,\beta\sqrt{1+pT_k^*}} \tag{28}$$

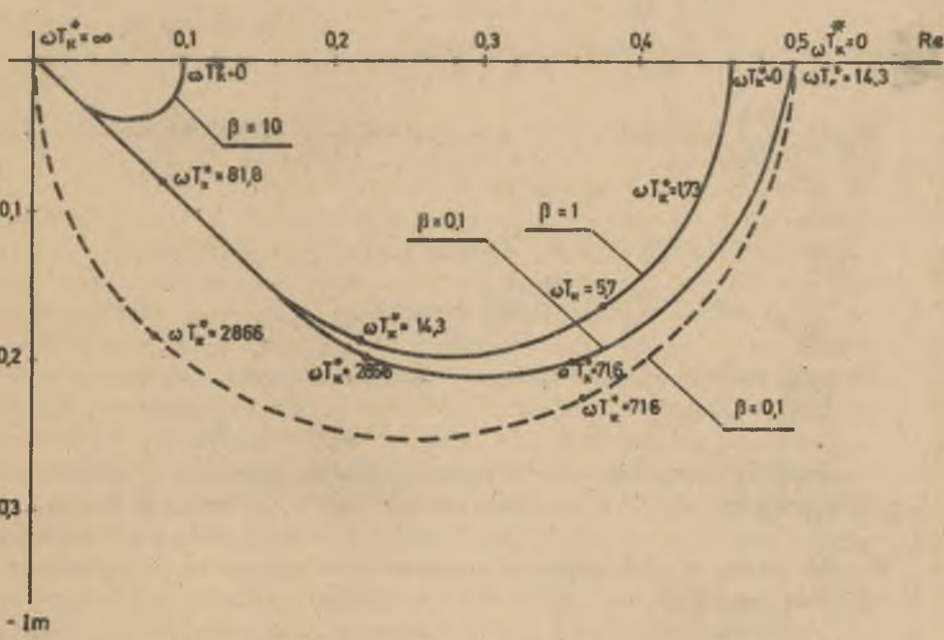
$$Z_{30}(p) = \frac{R_\lambda}{\beta\sqrt{1+pT_k^*}}\left[\frac{1}{\mathrm{sh}\,\beta\sqrt{1+pT_k^*}} - \frac{1}{\beta\sqrt{1+pT_k^*}}\right] \tag{29}$$

Wykorzystanie ścisłego schematu zastępczego modułu cieplnego z rys. 3 do analizy temperatury średniej jest utrudnione ze względu na skomplikowaną postać operatorowych impedancji cieplnych, będących funkcjami niewymiernymi, których odwrotne przekształcenie do postaci czasowych nastręcza trudności.

3. Aproksymacja schematu zastępczego modułu cieplnego przybliżonym elektrycznym schematem analogowym

O skomplikowaniu ścisłego schematu zastępczego i o możliwości aproksymacji tego modułu cieplnego za pomocą analogowej sieci elektrycznej można zorientować się na podstawie charakterystyki modułowo-fazowej impedancji cieplnej, podstawiając do równań (28) i (29) $p = j\omega$ dla $p \in (0, \infty)$.

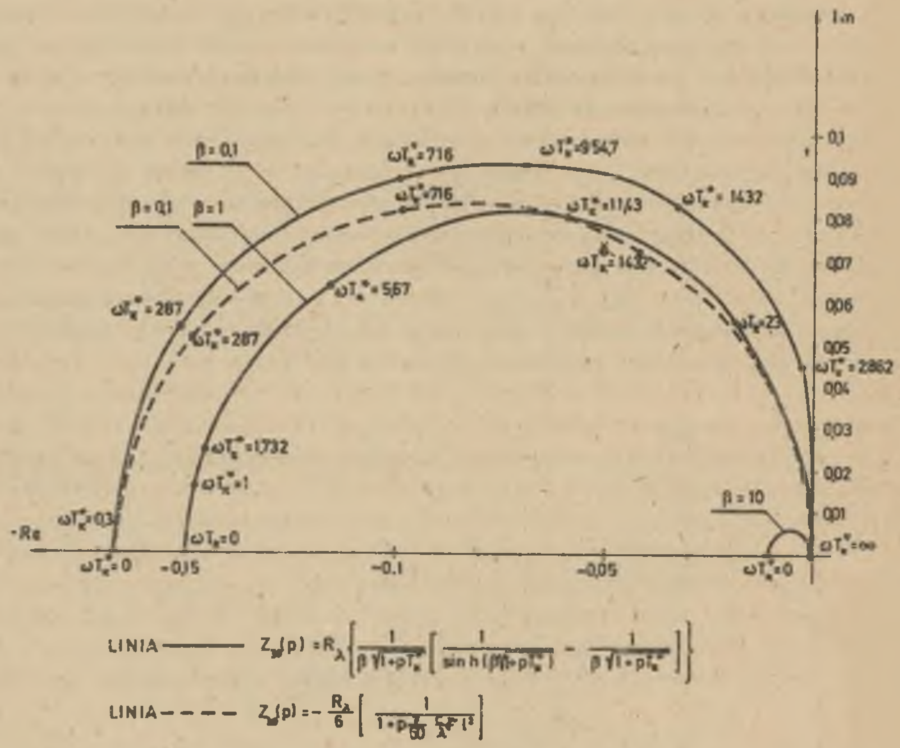
Na rys. 4 i 5 przedstawiono charakterystykę modułowo-fazową impedancji cieplnej $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ oraz $Z_{30}(p)$ dla różnych wartości β (linia ciągła). Dla $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ charakterystyka zbliżona jest swoją postacią do lemniskaty, która dla $\omega \to \infty$ przecina oś liczb rzeczywistych pod kątem 45°, a dla $\omega = 0$ pod kątem 90°. Charakterystyka dla $Z_{30}(p)$ przecina oś liczb rzeczywistych pod kątem 90° dla $\omega = 0$ i $\omega \to \infty$. Wszelkie analogowe sieci elektryczne o stałych skupionych wykazują naturalną własność przecinania osi liczb rzeczywistych pod kątem 90° dla $\omega \to \infty$



LINIA ———— $Z_{10}(p) = Z_{20}(p) = R_{\lambda}\left\{\frac{1}{\beta\sqrt{1+pT_{\kappa}^{*}}}\left[\frac{\cos h(\beta\sqrt{1+pT_{\kappa}^{*}})-1}{\sin h(\beta\sqrt{1+pT_{\kappa}^{*}})}\right]\right\}$

LINIA – – – – $Z_{10}(p) = Z_{20}(p) = \frac{R_{\lambda}}{2}\left[\frac{1}{1+p\frac{c\rho}{12\lambda}l^{2}}\right]$

Rys. 4. Charakterystyki modułowo-fazowe impedancji $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ dla różnych wartości β



Rys. 5. Charakterystyki modułowo-fazowe impedancji $Z_{30}(p)$ dla różnych wartości β

W konsekwencji nie da się sporządzić analogowej sieci elektrycznej o stałych skupionych, odwzorowującej tę impedancję cieplną, dla dużych częstotliwości. Poszukiwania sieci zastępczych linii długich, o parametrach rozłożonych odwzorowujących tę impedancję cieplną, są jeszcze w stadium studialnym.

Rezygnując przeto z możliwie dokładnego odwzorowania $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ za pomocą sieci elektrycznej dla dużych częstotliwości, można postawić zadanie budowy sieci aproksymującej charakterystykę modułowo-fazową w pozostałym zakresie częstotliwości.

Dla budowy analogu elektrycznego odwzorowującego stan cieplnie nieustalony, w modułowym schemacie zastępczym wybranego fragmentu maszyny elektrycznej jest przydatne posłużenie się pojęciem zastępczej cieplnej stałej czasowej przebiegu temperatury [6]. Na impedancji cieplnej $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$, bądź $Z_{30}(p)$ przy skokowym wymuszeniu mocy od zerowych warunków początkowych

$$T_{zc} = \frac{\int\limits_0^{\infty}\left[\vartheta_{ust} - \vartheta(t)\right] dt}{\vartheta_{ust}}. \tag{30}$$

Można wykazać [6], że zastępcza cieplna stała czasowa może być obliczona bezpośrednio z operatorowej formy $\vartheta(p)$

$$T_{zc} = \frac{\lim\limits_{p\to 0}\left[-\frac{d\vartheta(p)}{dp}\right]}{\vartheta(p)_{p=0}}. \tag{31}$$

Przy wymuszeniach nieskokowych od zerowych warunków początkowych obowiązuje:

$$\vartheta(p) = P(p)\, Z(p), \tag{32}$$

której konsekwencją jest wartość zastępczej cieplnej stałej czasowej przebiegu temperatury

$$T_z = T_{zp} + T_{zc},$$

przy czym

$$T_{zp} = \frac{\lim\limits_{p\to 0} -\left[\frac{d\,P(p)}{dp}\right]}{P(p)_{p=0}}. \tag{33}$$

Posłużenie się zastępczą stałą czasową jest szczególnie przydatne dla monotonicznych przebiegów temperatury.

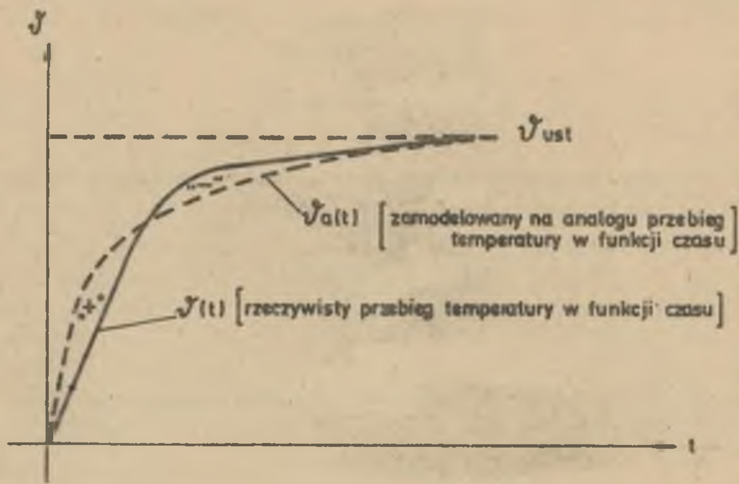
Jeżeli analogowa sieć elektryczna o impedancji $Z_a(p)$ aproksymująca impedancję cieplną $Z(p)$, wykaże zgodność zastępczej stałej czasowej, co sprowadza się do ścisłego odtworzenia wartości granicznej

$$Z_a(p=0) = Z(p=0) \tag{34}$$

oraz pierwszej pochodnej względem p dla $p \to 0$

$$\left[\frac{d\,Z_a(p)}{dp}\right]_{p=0} = \left[\frac{d\,Z(p)}{dp}\right]_{p=0}, \tag{35}$$

wówczas przebiegi temperatury wykażą tę samą wartość powierzchni całkowej, określonej przez całkę z równania (30) (rys. 6).



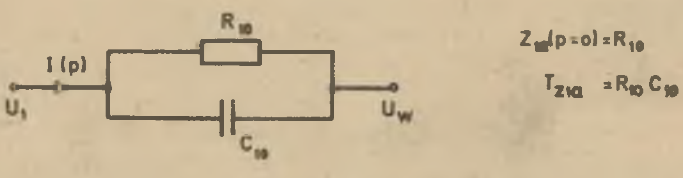
Rys. 6. Charakterystyki temperaturowo-czasowe charakteryzujące się tę samą powierzchnią całkową z równania (30)

Jako przybliżanie impedancji $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ może być uważany dwójnik RC o impedancji

$$Z_{1a}(p) = R_{1a}\,\frac{1}{1 + pT_1}$$

przedstawiony na rys. 7, w którym odpowiednio do równań (34) i (35) obowiązuje zgodność oporów dla p = 0 oraz zgodność pochodnej $\left[\frac{d\,Z}{dp}\right]$ dla p = 0. Elementy R i C dwójnika z rys. 7 obliczamy z zależności:

$$\begin{aligned} Z_{1a}(p=0) &= Z_{10}(p=0), \\ C &= \frac{T_{z1a}}{Z_{1a}(p=0)} = \frac{T_{z10}}{Z_{10}(p=0)}, \end{aligned} \qquad (36)$$



Rys. 7. Analog elektryczny odwzorowujący impedancje cieplne $Z_{10}(p)=Z_{20}(p)$

gdzie

$$Z_{10}(p=0) = \frac{R_\lambda}{\beta}\left[\frac{ch\beta-1}{sh\beta}\right] \tag{37}$$

$$T_{z10} = \frac{cG\,R_\lambda}{2\beta}\left[\frac{1}{\beta} - \frac{1}{sh\beta}\right]. \tag{38}$$

Jeżeli jest pożądane otrzymanie lepszych przybliżeń, trzeba odpowiednio skomplikować elektryczną sieć analogową. Przy wymuszeniu skokowym przebieg temperatury średniej, odtworzony za pomocą przybliżonego schematu analogowego, jest wykładniczy o stałej czasowej T_{z10}, natomiast rzeczywisty przebieg temperatury jest krzywą skomplikowaną o tej samej powierzchni całkowej z równania (30).

Można wykazać, że początkowy rzeczywisty przebieg temperatury $(p \to \infty)$ jest asymptotyczny do funkcji

$$\frac{R_\lambda}{\beta}\,\mathcal{L}^{-1}\frac{P(p)}{\sqrt{1+pT_k^*}}.$$

Przy skokowym wymuszeniu $P(t)$ jest to funkcja przejścia elementu półinercyjnego II rzędu [5]. Na rys. 4 linią przerywaną (dla $\beta = 0,1$) zaznaczono charakterystykę modułowo-fazową impedancji $Z_{10}(p) = Z_{20}(p)$ dwójnika RC.

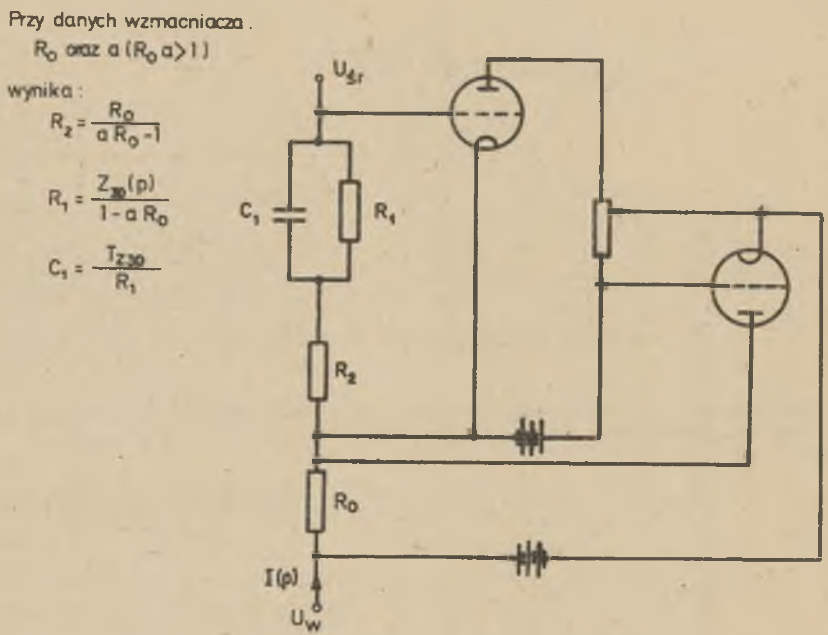
Dla zmodelowania impedancji $Z_{30}(p)$ można również posłużyć się podobnym przybliżonym schematem analogowym RC, z tym że opór $Z_{30}(p=0)$ jest ujemny. Analog elektryczny, w którym otrzymuje się ujemną wartość oporu $Z_{30}(p)$ przy dodatniej zastępczej stałej czasowej można zabudować w układzie wzmacniacza elektronicznego (rys. 8).

Elementy R_1, R_2, R_0, C_1 schematu analogowego z rys. 8 oraz wzmocnienie a wzmacniacza elektronicznego obliczamy jak poprzednio z porównania granicznych wartości impedancji analogu aproksymującego i impedancji $Z_{30}(p=0)$:

$$Z_{3a}(p=0) = Z_{30}(p=0) = \frac{U_{ust}}{I_{ust}} \tag{39}$$

oraz ze zgodności pomiędzy zastępczymi stałymi czasowymi obliczonymi dla analogowej sieci aproksymującej i dla impedancji $Z_{30}(p)$:

$$T_{z3a} = T_{z30}, \tag{40}$$



Rys. 8. Analog elektryczny odwzorowujący impedancję cieplną $Z_{30}(p)$

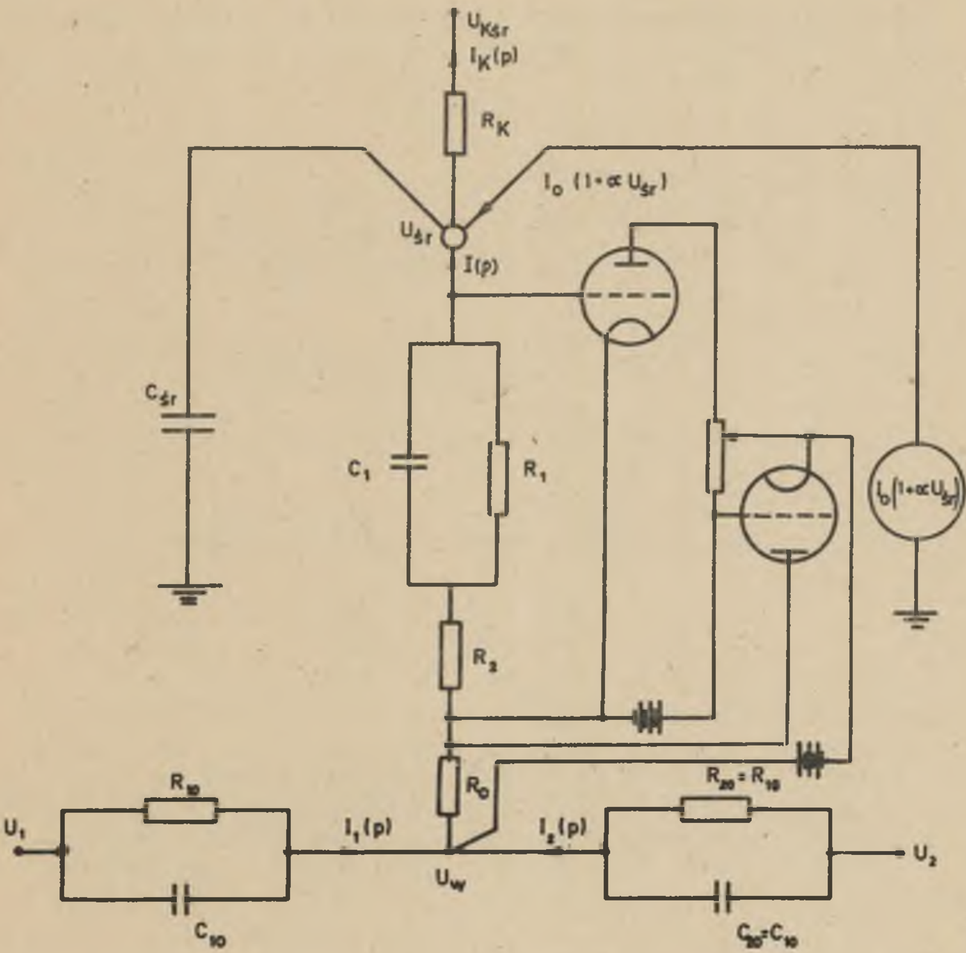
gdzie:

$$Z_{30}(p=0) = \frac{R_\lambda}{\beta}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\beta} - \frac{1}{\beta}\right] \tag{41}$$

$$T_{z30} = \frac{cG\ R_\lambda}{2\beta^2}\left[\frac{\beta\operatorname{ch}\beta + 2\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{sh}\beta}\right] - \frac{cG\ R_\lambda}{2\beta}\left[\frac{1 - \operatorname{ch}\beta}{\beta - \operatorname{sh}\beta}\right]. \tag{42}$$

Na rys. 5 linią przerywaną (dla $\beta = 0,1$) zaznaczono charakterystykę modułowo-fazową impedancji $Z_{30}(p)$ analogu RC.

Pozostałe parametry przybliżonego schematu analogowego modułu cieplnego, tj. podstawową pojemność cieplną cG pręta, wewnętrzne źródła wydzielanych strat cieplnych $P_0\left[1+\alpha\vartheta_{śr}(t)\right]$ oraz opór cieplny R_k dla ruchu ciepła z bocznej powierzchni pręta, odwzorowuje się również za pomocą wielkości elektrycznych (pojemności $C_{śr}$, źródeł prądowych uzależniających prąd źródła od napięcia występującego w węźle $U_{śr}$ oraz rezystancji R_k). Przybliżony analogowy schemat zastępczy modułu cieplnego pręta w stanie cieplnie nieustalonym jest przedstawiony na rys. 9.



Rys. 9. Przybliżony analogowy schemat zastępczy modułu cieplnego pręta w stanie nieustalonym

W wyniku zbieżności tylko pochodnej impedancji cieplnej dla p=0 i oporów cieplnych dla p=0 dla schematu modułowego i przybliżonego analogu złożonego z dwójników RC nie występuje ścisła zbieżność charakterystyk modułowo-fazowych schematu modułowego z kołowymi charakterystykami analogu przybliżonego. Interesująca jest dyskusja wpływu wymiarów geometrycznych wyodrębnionego fragmentu nagrzewanego ciała na rozbieżność charakterystyk modułowo-fazowych przybliżonego analogu w stosunku do schematu modułowego.

Uwzględniając, że w związkach na impedancje operatorowe występują wyrażenia sh al oraz ctgh al w których argumenty są proporcjonalne do długości nagrzewanego ciała l (23) można posłużyć się rozwinięciem w szereg potęgowy Maclaurina tych funkcji względem al, aż do pierwszych znaczących wyrazów szeregu. Wprowadzając oznaczenia:

$$\varkappa(p) = al \tag{43}$$

operatorowe impedancje cieplne

$$Z_{10}(p) = Z_{20}(p) = \frac{R_\lambda}{\varkappa(p)}\left[\frac{ch\varkappa(p) - 1}{sh\varkappa(p)}\right]. \tag{44}$$

$$Z_{30}(p) = \frac{R_\lambda}{\varkappa(p)}\left[\frac{1}{sh\varkappa(p)} - \frac{1}{\varkappa(p)}\right]. \tag{45}$$

Z rozwinięcia wyrażenia $Z_{10}(p)$, $Z_{30}(p)$ w szereg potęgowy względem $\varkappa(p)$

$$\left.\begin{aligned} ch\varkappa(p) &= 1 + \frac{\varkappa^2(p)}{2!} + \frac{\varkappa^4(p)}{4!} + \frac{\varkappa^6(p)}{6!} + \ldots + \frac{\varkappa^{2n}(p)}{2n!} \\ sh\varkappa(p) &= \varkappa(p) + \frac{\varkappa^3(p)}{3!} + \frac{\varkappa^5(p)}{5!} + \frac{\varkappa^7(p)}{7!} + \ldots + \frac{\varkappa^{2n+1}(p)}{2n+1!} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

uwzględniamy dla małych $\varkappa(p)$ pierwsze znaczące wyrazy szeregu

$$Z_{10}(p) = Z_{20}(p) \cong \frac{R_\lambda}{\varkappa(p)}\left[\frac{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{2!} + \frac{\varkappa^4(p)}{4!} - 1}{\varkappa(p) + \frac{\varkappa^3(p)}{3!}}\right] \cong \frac{R_\lambda}{2}\left[\frac{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{12}}{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{6}}\right] =$$

$$\cong \frac{R}{2}\left[\frac{1}{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{12}}\right] \tag{47}$$

$$Z_{30}(p) \cong \frac{R_\lambda}{\varkappa(p)}\left[\frac{1}{\varkappa(p) + \frac{\varkappa^3(p)}{3!} + \frac{\varkappa^5(p)}{5!}} - \frac{1}{\varkappa(p)}\right] \cong -\frac{R_\lambda}{6}\left[\frac{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{20}}{1 + \frac{\varkappa^2(p)}{6} + \frac{\varkappa^4(p)}{120}}\right] \cong$$

$$\cong -\frac{R_\lambda}{6}\left[\frac{1}{1 + \frac{7}{60}\varkappa^2(p)}\right]. \tag{48}$$

Podstawiając za $\varkappa^2(p) = (a\ l)^2$, otrzymujemy przybliżone operatorowe impedancje cieplne dla małych $\varkappa(p)$.

$$Z_{10}(p) \cong Z_{20}(p) = \frac{R_\lambda}{2}\left[\frac{1}{1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{c\gamma}{\lambda}l^2 p}\right] \cong \frac{R_\lambda}{2}\left[\frac{1}{1 + pT_1}\right] \tag{49}$$

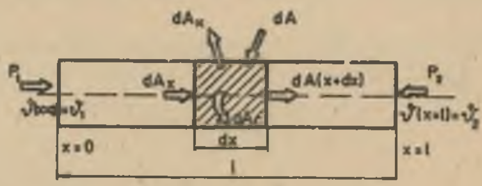
$$Z_{30}(p) \cong -\frac{R_\lambda}{6}\left[\frac{1}{1 + \frac{7}{60}\cdot\frac{c\gamma}{\lambda}l^2 p}\right] \cong -\frac{R_\lambda}{6}\left[\frac{1}{1 + pT_3}\right], \tag{50}$$

gdzie:

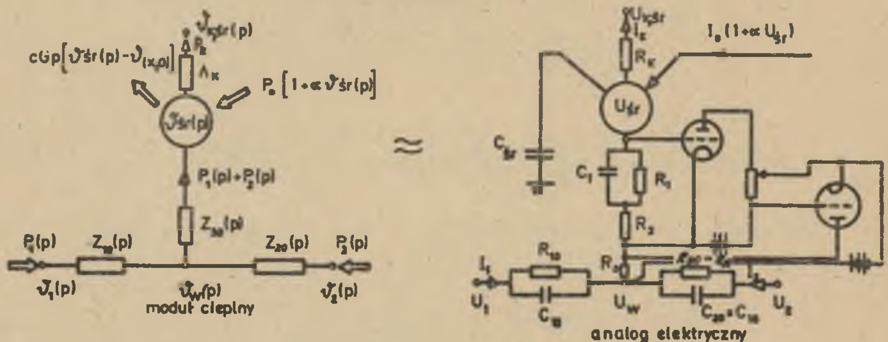
$$T_1 = \frac{1}{12}\frac{c\gamma}{\lambda}l^2, \qquad T_3 = \frac{7}{60}\frac{c\gamma}{\lambda}l^2 \tag{51}$$

Dla małych wymiarów geometrycznych schematy ścisłe modułów cieplnych zbliżają się do schematów analogów przybliżonych. Uwzględniając z równań (25) (51) że opory cieplne R_λ maleją proporcjonalnie do wymiarów geometrycznych l, zaś stałe czasowe do kwadratu wymiarów geometrycznych l^2, można dla malejących wymiarów geometrycznych pominąć pojemności bocznikujące opory cieplne $Z_{10}(p=0)$, $Z_{20}(p=0)$ (rys. 3). Jeżeli uwzględni się w równaniach (25) i (50), że podział ciała na coraz mniejsze odcinki powoduje zwiększenie się oporu R_k a jednocześnie zmniejszanie się oporu $Z_{30}(p=0)$ proporcjonalnie do wymiarów liniowych l, można w miarę gęstości podziału ciała pominąć opory $Z_{30}(p=0)$ w schematach modułowych (rys. 3).

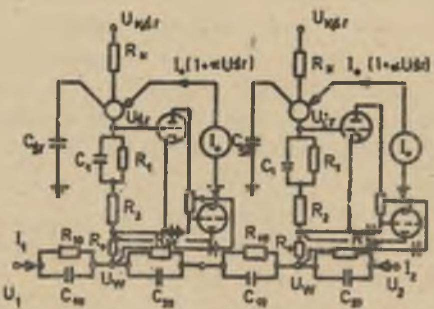
W ten sposób dochodzi się ze schematów modułowych w relacjach operatorowych do siatek cieplnych o rozłożeniu dyskretnym, rozwiązujących problem nagrzewania ciała (rys. 10), przy czym widoczna jest w tym przejściu malejąca rola pojemności bocznikujących i ujemnego oporu $Z_{30}(p=0)$ w miarę wzrostu ilości podziałów ciała na fragmenty, których temperatura średnia jest identyfikowana jako temperatura lokalna. Ilustruje to rys. 10.



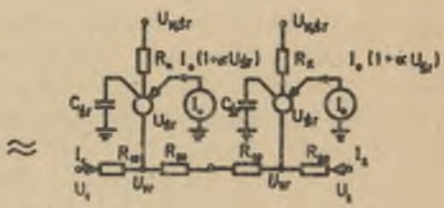
Bilans cieplny w pręcie w stanie nieustalonym



Relacje do temperatur średnich pręta o długości l



Rozkład temperatur średnich w fragmentach sieci cieplnej całego pręta o długości l



Rozkład temperatur lokalnych w pręcie o długości l /rozkład ciągły przy nieskończonej liczbie podziałów pręta /

Rys. 10. Rozwój schematu zastępczego modułu cieplnego i jego przejście od stałych skupionych (temperatura średnia) do stałych rozłożonych (temperatury lokalne)

4. Wnioski

Schemat zastępczy modułu cieplnego odwzorowuje stan cieplnie nieustalony w pręcie i może być zaadaptowany dla elementów maszyny elektrycznej o dowolnym kształcie, jak np. ścianki przewodzącej względnie wycinka walca.

Przyjęte warunki brzegowe, ujmujące zarówno zgodność mocy jak i zgodność temperatur występujących na krawędziach czołowych pręta, pozwalają na skompletowanie cieplnego schematu zastępczego dla całej maszyny, złożonego z modułów cieplnych.

Zaproponowano aproksymację modułów cieplnych elektrycznymi przybliżonymi schematami analogowymi RC dla wyznaczania temperatur średnich w poszczególnych fragmentach maszyny.

Przez podział ciała na fragmenty zmniejszają się podmoduły cieplne a w miarę zwiększania liczby podziałów rośnie dokładność odwzorowania modułów cieplnych przez schematy analogowe RC, w których relacje temperatur średnich odnoszą się do podzielonych fragmentów ciała. W granicy przy rosnącej nieskończenie liczbie podziałów ciała, temperatura średnia fragmentu może być identyfikowana z temperaturą lokalną o rozłożeniu ciągłym.

LITERATURA

[1] Hajek M.: Die Ermittlung des unbeständigen eindimensionalen Wärmeflusses in zwei Körpern. Archiv fur Elektrotechnik H. 5, 1973.

[2] Hak J.: Zur Berechnung des zeitabhängigen Temperaturverlaufs in einem Stab mit innerer Wärmeerzeugung. Archiv für Elektrotechnik H. 6, 1966.

[3] Kessler A.: Zur Theorie des Wärmequellennetzes. Archiv für Elektrotechnik H. 2, 1964.

[4] Mukosiej J.: Opory przewodzenia zastępczej sieci cieplnej maszyn elektrycznych. Archiwum Elektrotechniki z. 4, 1973.

[5] Nietušil A.V., Lyčkina G.P., Miljukova T.F.: Poluinercionnoje zveno II roda i modeli elektrotermičeskich obiektov. Izvestija Vysšich Učebnych Zavedenii Nr 7, 1972.

[6] Paszek W.: Analiza podstawowych parametrów maszyn synchronicznych z uwzględnieniem sposobów ich pomiaru. Przegląd Elektrotechniczny Nr 1, 1962.

[7] Provaznik F.: Neustálené jednodimenzionálni tepelné prouděni v tyčovem vodiči. Elektrotechnický Obzor Nr 6, 1963.

Przyjęto do druku w lipcu 1977 r.

ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА ЗАМЕЩЕНИЯ "ТЁПЛОВОЙ МОДУЛИ"
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН В ТЕПЛОВОМ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ
РЕЖИМЕ И ЕГО АППРОКСИМАЦИЯ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ АНАЛОГАМИ

Р е з ю м е

Применяя преобразование Лапласа-Карсона в дифференциальных уравнениях теплороводимости описывающих тепловые переходные процессы в прямом отрезке стерженя обмотки, построили операторную схему замещения "тепловой модули" электрической машины, принимая средную температуру, как переменную состояния. Предложили аппроксимацию этой "тепловой модули" при помощи электрических аналоговых схем замещения. Обсудили влияние геометрических размеров выделенного отрывка стержня на расхождение амплитудно-фазных частотных характеристик приблизительного электрического аналога в отношении к "тепловой модули".

THE OPERATIONAL EQUIVALENT CIRCUIT OF A "THERMAL UNIT"
IN ELECTRICAL MACHINES AND ITS APPROXIMATION BY ELECTRICAL ANALOGS

S u m m a r y

The Laplace-Carson transformation of the partial differential equations, describing the heat flow in straight part of the winding bar, enables to compose the operational equivalent circuit of a "thermal unit" of the electrical machine under consideration of the average temperature as state variable. The approximation possibilities of this equivalent circuit by electrical analog circuits were discussed. It was presented how the geometrical size of the heated bar part influences the frequency response discrepancy of the "thermal unit" and its approximative electrical analog.