

Adam RÓŻYCKI

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechniki Śląskiej

PRZYBLIŻONE ANALOGI ELEKTRYCZNE ODWZOROWUJĄCE WYBRANY PUNKT KRYTYCZNY
W CIEPLNEJ SIECI MASZYNY ELEKTRYCZNEJ

Streszczenie. Przedstawiono uproszczony analog elektryczny odwzorowujący charakterystykę $\vartheta(t)$ w dowolnie wybranym węźle cieplnym sieci maszyny elektrycznej. Parametry analogu określono z porównania temperatury ustalonej, zastępczej stałej czasowej i początkowej stromości narastania temperatury w analizowanym węźle schematu cieplnego i analogu elektrycznego. Porównano charakterystykę $\vartheta(t)$ obliczoną metodą analityczną z odpowiednią charakterystyką przybliżonego analogu elektrycznego.

1. Transmitancje cieplne i ich przybliżone analogi elektryczne

W warunkach eksploatacyjnych maszyn elektrycznych nie zawsze jest konieczna znajomość czasowych przebiegów temperatury wszystkich elementów maszyny. Dla użytkownika wystarczająca jest informacja, gdzie w maszynie elektrycznej należy się spodziewać obciążenia o najwyższej temperaturze i jak zmiany obciążenia wpływają na temperaturę najgorętszego punktu [2].

Punkty o najwyższej temperaturze znajdują się w tych częściach maszyny, w których występują źródła ciepła. Są to najczęściej uzwojenia stojana lub wirnika. W obciążeniu najbardziej zagrożonym cieplnie instaluje się czujniki pomiarowe i według ich wskazań prowadzi się eksploatację maszyny. Względnie bezpieczeństwa (wysokie napięcie) lub trudności pomiarowe (elementy wirujące) niekiedy ograniczają taki sposób oceny temperatury najgorętszego punktu w maszynie elektrycznej [4].

Pożądanym jest opracowanie elektrycznego analogu, który odtwarzałby w sposób przybliżony przebieg temperatury wybranego, krytycznego punktu w maszynie.

Taki przybliżony analog elektryczny najłatwiej jest zrealizować za pomocą elementów sieci elektrycznej, w której źródła wydzielanej mocy w maszynie elektrycznej są symulowane źródłami prądowymi o zmienności czasowej odtwarzającej realne warunki w maszynie. Źródła strat zależne od kwadratu prądu można odtworzyć w analogu elektrycznym przekształtnikiem nieliniowym, kwadratującym, zasilanym z przekładnika prądowego, którego prąd wyjściowy odtwarza ΔP_1 . Źródła strat zależne od kwadratu napięcia są elektrycznie odwzorowane wyprostowanym prądem wyjściowym przekształtnika nie-

liniowego kwadratującego, zasilanego napięciem z przekładnika napięciowego. Prąd wyjściowy odtwarza wtedy ΔP_u .

Analog cieplny odwzorowujący w sposób ścisły całą sieć cieplną maszyny jest nader skomplikowany. Można zadowolić się analogiem przybliżonym. W celu uproszczenia budowy takiego przybliżonego analogu elektrycznego można założyć zerowy cieplny współczynnik rezystancyjny uzwojeń maszyny oraz założyć stałość parametrów sieci cieplnej maszyny elektrycznej, dzięki czemu sieć cieplna może być uważana za liniową [1]. Obowiązuje wówczas zasada superpozycji.

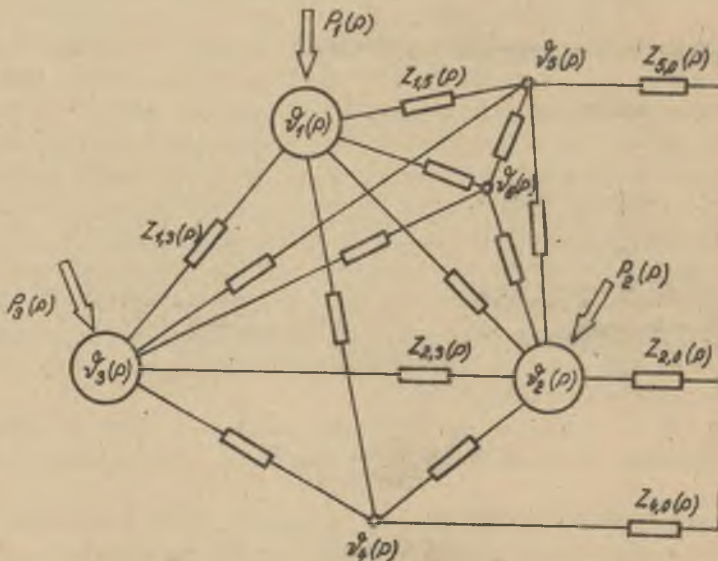
Przy założeniu zerowych warunków początkowych temperatura wybranego punktu sieci cieplnej (rys. 1) wyznaczona jest równaniem operatorowym:

$$v_x(p) = P_1(p) Z_{1x}(p) + P_2(p) Z_{2x}(p) + \dots + P_n(p) Z_{nx}(p) \quad (1)$$

gdzie:

$P_1(p) \dots P_n(p)$ - źródła strat cieplnych,

$Z_{1x}(p) \dots Z_{nx}(p)$ - impedancje cieplne.



Rys. 1. Sieć cieplna odwzorowująca stan cieplnie nieustalony w maszynie elektrycznej

Założono, że w rozpatrywanej sieci cieplnej czynnych jest n źródeł cieplnych, posiadających j stopni swobody. Przez j stopni swobody rozumie się, że spośród n źródeł cieplnych można wyodrębnić j grup, których źródła mają podobne przebiegi czasowe różniące się tylko współczyn-

nikami proporcjonalności. Źródła takie można zebrać formalnie w jedno źródło zastępcze.

Na przykład, typowe trzy źródła zastępcze są źródłami zależnymi od prądu obciążenia ΔP_1 , napięcia ΔP_U i strat tarcia i wentylacji ΔP_m .

$$\begin{aligned} P_1(p) &= k_1 P_1(p) \\ P_2(p) &= k_2 P_1(p) \\ &\dots\dots\dots \\ P_1(p) &= k_1 P_1(p) \end{aligned} \quad (2)$$

Z kolei

$$\begin{aligned} P_{1+1}(p) &= k_{1+1} P_U(p) \\ &\dots\dots\dots \\ P_m(p) &= k_m P_U(p) \end{aligned} \quad (3)$$

oraz

$$\begin{aligned} P_{m+1}(p) &= k_{m+1} P_m(p) \\ &\dots\dots\dots \\ P_n(p) &= k_n P_m(p) \end{aligned} \quad (4)$$

Wykorzystując te związki

$$\begin{aligned} \psi_x(p) &= \left[k_1 Z_{(1)x}(p) + k_2 Z_{(2)x}(p) + \dots + k_{(1)x} Z_{(1)x}(p) \right] P_1(p) + \\ &+ \left[k_{1+1} Z_{(1+1)x}(p) + \dots + k_m Z_{(m)x}(p) \right] P_U(p) + \\ &+ \left[k_{m+1} Z_{(m+1)x}(p) + \dots + k_n Z_{(n)x}(p) \right] P_m(p) \end{aligned} \quad (5)$$

bądź po zebraniu wyreżeń ujętych w nawiasach

$$\psi_x(p) = Z_{ix}(p) P_1(p) + Z_{ux}(p) P_U(p) + Z_{mx}(p) P_m(p) \quad (6)$$

Impedancje sieci $Z_{ix}(p)$, $Z_{ux}(p)$ oraz $Z_{mx}(p)$ traktuje się jako impedancje znane, wynikające z obliczeń sieci cieplnej bądź z pomiaru.

Przebieg czasowy temperatury jest odwrotną transformacją relacji operatorowej $\psi_x(p)$.

$$\begin{aligned} \psi_x(t) = \mathcal{L}^{-1} \psi_x(p) &= \mathcal{L}^{-1} Z_{ix}(p) P_1(p) + \mathcal{L}^{-1} Z_{ux}(p) P_U(p) + \mathcal{L}^{-1} Z_{mx}(p) P_m(p) = \\ &= \psi_{xi}(p) + \psi_{xu}(p) + \psi_{xm}(p) \end{aligned} \quad (7)$$

Przy skokowych przebiegach wydajności źródeł ciepłych

$$\begin{aligned} P_1(t) &= P_1 \mathcal{1}(t) \\ P_u(t) &= P_u \mathcal{1}(t) \\ P_m(t) &= P_m \mathcal{1}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie:

$$\mathcal{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$\psi_x(t) = P_1 \mathcal{L}^{-1} Z_{1x}(p) + P_u \mathcal{L}^{-1} Z_{ux}(p) + P_m \mathcal{L}^{-1} Z_{mx}(p) =$$

$$P_1 F_{1x}(t) + P_u F_{ux}(t) + P_m F_{mx}(t) =$$

$$= \psi_{x1}(t) + \psi_{xu}(t) + \psi_{xm}(t) \quad (10)$$

gdzie:

$F_{1x}(t), F_{ux}(t), F_{mx}(t)$ - przedstawiają odwrotne transformaty odpowiednich impedancji ciepłych (cieplne funkcje przejścia).

Odtworzenie za pomocą elektrycznego dokładnego analogu impedancji ciepłych prowadzi do bardzo skomplikowanej struktury. Uwzględniając, że požądane jest jedynie przybliżone przedstawienie przebiegu temperatury, można posłużyć się następującymi warunkami, które narzuca się przybliżonemu analogowi [6].

Przy uwzględnieniu tylko jednego z trzech (ogólnie z j) źródeł ciepła i przy założeniu, że w pozostałych węzłach straty ciepłne są równe zero, narzuca się:

- zgodność przyrostu temperatury w stanie ustalonym, statycznym,
- zgodność zastępczej stałej czasowej,
- zgodność początkowej stromości narastania temperatury,
- zgodność początkowej drugiej pochodnej narastania temperatury.

Ad a) częstotkowa temperatura ustalona

$$\psi_{(x1)}^{ust} = Z_{(x1)}(p=0) P_1 \quad (11)$$

Analogiczne warunki obowiązują dla $\psi_{(xu)}^{ust}$ oraz $\psi_{(xm)}^{ust}$.

Ad b) zastępcza częstkowa stała czasowa

$$T_{z(x1)} = \frac{\int_0^{\infty} [\psi_{(x1)ust} - \psi_{x1}(t)] dt}{\psi_{(x1)ust}} = \frac{\lim_{p \rightarrow 0} [-d\psi_{(x1)}(p)]}{\psi_{(x1)}(p=0)} \quad (12)$$

Analogicznie warunki obowiązują dla $T_{z(xu)}$ oraz $T_{z(xm)}$

Ad c) początkowa stromość narastania temperatury (początkowa pierwsza pochodna)

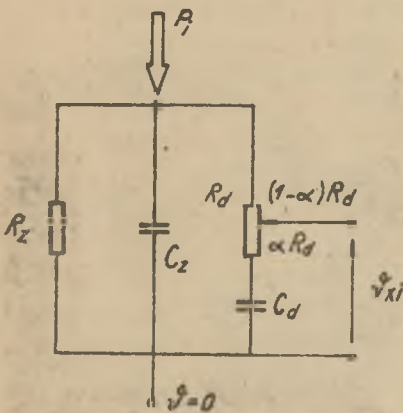
$$\left[\frac{d\psi_{(x1)}}{dt} \right]_{t=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} [p\psi_{(x1)}(p)] \quad (13)$$

Analogiczne warunki obowiązują dla $\left[\frac{d\psi_{(xu)}}{dt} \right]_{t=0}$ oraz $\left[\frac{d\psi_{(xm)}}{dt} \right]_{t=0}$

Ad d) początkowa druga pochodna narastania temperatury

$$\left[\frac{d^2\psi_{(x1)}}{dt^2} \right]_{t=0} = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \left[\psi_{(x1)}(p) - \frac{\psi_{(x1)}(t=0)}{p} \right] \quad (14)$$

Analogiczne warunki obowiązują dla $\left[\frac{d^2\psi_{(xu)}}{dt^2} \right]_{t=0}$ oraz $\left[\frac{d^2\psi_{(xm)}}{dt^2} \right]_{t=0}$



Rys. 2. Częstkowy przybliżony analog elektryczny reprezentujący wybrany punkt maszyny elektrycznej, którego nagrzanie zależy od częstkowych strat P_1

Elementy analogu elektrycznego są wyznaczone przez dane częstkowe temperatury ustalone, częstkowe stałe czasowe i częstkowe stromości narastania temperatury $\left(\frac{d\psi}{dt} \right)$ oraz $\left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right)$ dla $t=0$ dla rzeczywistego obiektu cieplnego. Narzuca się dla tego analogu zgodność tych samych parametrów. Rys. 2 przedstawia fragment analogu odtwarzającego przybliżony przebieg składowej temperatury zależnej od strat P_1 .

W analogu elektrycznym o bardziej rozbudowanej strukturze można otrzymać lepszą aproksymację, uwzględniając że dokładne odtworzenie przebie-

gu temperatury w wybranym punkcie maszyny jest jedynie możliwe przy ściśleym odtworzeniu analogowym impedancji Z_{x1} , Z_{xu} , Z_{xm} . Aczkolwiek parametry analogu są wyznaczone z warunku aproksymacji wywodzących się z porównania przebiegów przy wymuszeniach skokowych, z zerowych warunków początkowych otrzymuje się nadal zbliżenie przebiegów rzeczywistych i przybliżonych przy bardziej złożonych monotonicznych przebiegach wymuszenia.

Równość cząstkowej zastępczej stałej czasowej przebiegu rzeczywistego i przebiegu wyznaczonego przez przybliżony analog zawsze obowiązuje, jeżeli dochodzi do statycznego stanu ustalonego, z tym że chwilowe odstępstwa przebiegu temperatury w obiekcie rzeczywistym i analogu mogą być odpowiednio większe przy nieregularnych wymuszeniach (nieregularnych zmianach wydajności źródeł ciepła).

Niestety jedna metoda analitycznej oceny odstępstw krzywej aproksymującej i krzywej rzeczywistej polega na obliczeniu odchyłek przebiegu temperatury obiektu rzeczywistego i analogu elektrycznego.

Posłużenie się równością zastępczej stałej czasowej przebiegu rzeczywistego i przybliżonego jest bardzo pożyteczne przy wymuszeniach typu przebiegów monotonicznych. Wtedy odstępstwa przebiegów są stosunkowo małe.

Można wykazać, że łącznie cieplnych zastępczych impedancji w skomplikowanej sieci cieplnej (łączenie szeregowo, równoległe itp.) nie zmienia zgodności zastępczej stałej czasowej przebiegu temperatury rozbudowanego układu złożonego z impedancji zastępczych obiektu cieplnego i przybliżonego analogu elektrycznego. Wynika to ze zgodności granicznych wartości dla ($p=0$) zarówno impedancji jak i ich pochodnych względem p dla impedancji rzeczywistych obiektów i analogów przybliżonych. I tak, na przykład, przebieg cząstkowy temperatury odpowiednio do równania

$$v_x(t) = v_{(x1)}(t) + v_{(xu)}(t) + v_{(xm)}(t)$$

wykazuje tę samą wartość zastępczej stałej czasowej, jak przebieg aproksymujący z przybliżonego analogu

$$v_{(xs)}(t) = v_{(xis)}(t) + v_{(xus)}(t) + v_{(xms)}(t)$$

$$Tz_x = - \frac{\lim_{p=0} \left[\frac{dv_{(x1)}(p)}{dp} + \frac{dv_{(xu)}(p)}{dp} + \frac{dv_{(xm)}(p)}{dp} \right]}{v_{(x1)}^{ust} + v_{(xu)}^{ust} + v_{(xm)}^{ust}}$$

$$= - \frac{\lim_{p=0} \left[\frac{dv_{(xis)}(p)}{dp} + \frac{dv_{(xus)}(p)}{dp} + \frac{dv_{(xms)}(p)}{dp} \right]}{v_{(xis)}^{ust} + v_{(xus)}^{ust} + v_{(xms)}^{ust}}$$

Jeżeli nie skokowa, wymuszenie monotoniczne przy zerowych warunkach początkowych ma postać operatorową, np. dla źródła ciepła $P_1(p)$

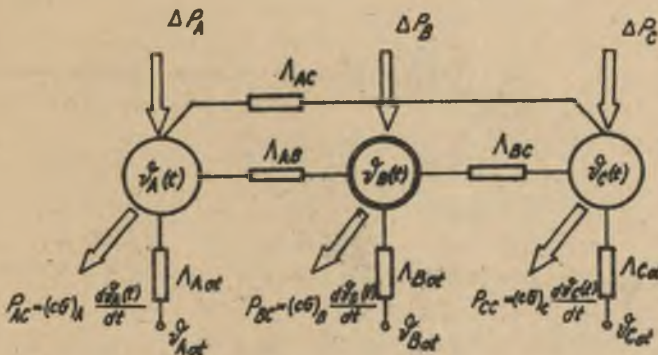
$$v_{(x_1)}(p) = P_1(p) Z_{(x_1)}(p)$$

$$Tz_{p1} = - \frac{\lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{d v_{(x_1)}(p)}{dp} \right]}{v_{(x_1)}(p)_{ust}} = Tz_p + Tz_i$$

Ponieważ $Tz_i = Tz_{ia}$, obowiązuje nadal równość zastępczej stałej czasowej przebiegu rzeczywistego i przybliżonego.

2. Parametry cieplne schematu zastępczego jako podstawa do przybliżonego schematu zastępczego analogu elektrycznego

Budowę przybliżonego analogu zilustrujemy na przykładzie cieplnego schematu zastępczego silnika indukcyjnego składającego się z układu trzech węzłów cieplnych A, B, C (rys. 3) [3, 4]. Przybliżony analog elektryczny



Rys. 3. Zastępczy schemat cieplny silnika indukcyjnego składający się z trzech węzłów cieplnych

ma odwzorować charakterystykę temperaturowo-czasową w dowolnie wybranym węzle cieplnym, np. B, przy dowolnych wymuszeniach strat mocy w węzłach A, B, C. Znałe są przewodności cieplne $\Lambda_{AB}, \Lambda_{BC}, \Lambda_{AC}$ oraz $\Lambda_{A,ot}, \Lambda_{B,ot}, \Lambda_{C,ot}$ schematu z rys. 3. W węzłach A, B, C wydzielają się straty ciepłne $\Delta P_A, \Delta P_B, \Delta P_C$ oraz zachodzi akumulacja energii cieplnej $P_{AC} = (cG)_A \frac{dT_A(t)}{dt}$

$P_{BC} = (cG)_B \frac{dT_B(t)}{dt}, P_{CC} = (cG)_C \frac{dT_C(t)}{dt}$, gdzie $(cG)_A, (cG)_B, (cG)_C$ są pojemnościami cieplnymi tych węzłów cieplnych.

Zgodnie z równaniem bilansu cieplnego dla schematu z rys. 3 przy założeniu $\psi_{A,ot} = \psi_{B,ot} = \psi_{C,ot} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_A(t)}{dt} + a_1\psi_A(t) - a_2\psi_B(t) - a_3\psi_C(t) &= a_4 \\ \frac{d\psi_B(t)}{dt} - b_1\psi_A(t) + b_2\psi_B(t) - b_3\psi_C(t) &= b_4 \\ \frac{d\psi_C(t)}{dt} - c_1\psi_A(t) - c_2\psi_B(t) + c_3\psi_C(t) &= c_4 \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\Delta_{AB} + \Delta_{AC} + \Delta_{A,ot}}{(cG)_A} & b_1 &= \frac{\Delta_{AB}}{(cG)_B} & c_1 &= \frac{\Delta_{AC}}{(cG)_C} \\ a_2 &= \frac{\Delta_{AB}}{(cG)_A} & b_2 &= \frac{\Delta_{AB} + \Delta_{BC} + \Delta_{B,ot}}{(cG)_B} & c_2 &= \frac{\Delta_{BC}}{(cG)_C} \\ a_3 &= \frac{\Delta_{AC}}{(cG)_A} & b_3 &= \frac{\Delta_{BC}}{(cG)_B} & c_3 &= \frac{\Delta_{AC} + \Delta_{BC} + \Delta_{C,ot}}{(cG)_C} \\ a_4 &= \frac{\Delta P_A}{(cG)_A} & b_4 &= \frac{\Delta P_B}{(cG)_B} & c_4 &= \frac{\Delta P_C}{(cG)_C} \end{aligned} \quad (16)$$

Po przejściu na postać operatorową otrzymujemy układ 3 równań

$$\begin{aligned} (p + a_1)\psi_A(p) - a_2\psi_B(p) - a_3\psi_C(p) &= a_4 \\ -b_1\psi_A(p) + (p + b_2)\psi_B(p) - b_3\psi_C(p) &= b_4 \\ -c_1\psi_A(p) - c_2\psi_B(p) + (p + c_3)\psi_C(p) &= c_4 \end{aligned} \quad (17)$$

Stąd dla węzła cieplnego B

$$\begin{aligned} \psi_B(p) &= \frac{p^2 b_4 + p[b_1 a_4 + (a_1 + c_3)b_4 + b_3 c_4] + [(b_1 c_3 + b_3 c_1)a_4 + (a_1 c_3 - a_3 c_1)b_4 + \\ &\quad + (a_1 b_3 + a_3 b_1)c_4]}{p^3 + p^2 a + p b + c} \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie:

$$a = a_1 + b_2 + c_3$$

$$b = (a_1 b_2 - a_2 b_1) + (a_1 c_3 - a_3 c_1) + (b_2 c_3 - b_3 c_2)$$

$$c = (b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 - (b_1 c_3 + b_3 c_1) a_2 - (b_1 c_2 + b_2 c_1) a_3$$

W stanie cieplnie ustalonym

$$v_B(p)_{p \rightarrow 0} = \frac{\Delta P_B + k_{BA} \Delta P_A + k_{BC} \Delta P_C}{k_B} \quad (19)$$

gdzie:

$$k_{BA} = \frac{b_1 c_3 + b_3 c_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} \frac{(cG)_B}{(cG)_A}$$

$$k_{BC} = \frac{a_1 b_3 + a_3 b_1}{a_1 c_3 - a_3 c_1} \frac{(cG)_B}{(cG)_C}$$

$$k_B = \frac{(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 - (b_1 c_3 + b_3 c_1) a_2 - (b_1 c_2 + b_2 c_1) a_3}{a_1 c_3 - a_3 c_1} (cG)_B$$

Zastępcza cieplna stała czasowa

$$Tz_B = T_1 + T_2 + T_3 - \left[\frac{b_1 \Delta P_A \frac{(cG)_B}{(cG)_A} + (a_1 + c_3) \Delta P_B + b_3 \Delta P_C \frac{(cG)_B}{(cG)_C}}{(a_1 c_3 - a_3 c_1) [k_{BA} \Delta P_A + \Delta P_B + k_{BC} \Delta P_C]} \right] \quad (20)$$

gdzie:

$T_1 + T_2 + T_3 = \frac{b}{c}$ - składowa zastępczej cieplnej stałej czasowej niezależnej od strat $\Delta P_A, \Delta P_B, \Delta P_C$.

Częstkowe zastępcze cieplne stałe czasowe wynoszą odpowiednio:

$$\left. \begin{aligned} Tz_{BA} &= T_1 + T_2 + T_3 - \frac{b_1 \frac{(cG)_B}{(cG)_A}}{(a_1 c_3 - a_3 c_1) k_{BA}} && \text{przy } \Delta P_B = 0, \Delta P_C = 0 \\ Tz_{BB} &= T_1 + T_2 + T_3 - \frac{a_1 + c_3}{(a_1 c_3 - a_3 c_1)} && \text{przy } \Delta P_A = 0, \Delta P_C = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$T_{BC} = T_1 + T_2 + T_3 - \frac{b_3 \frac{(cG)_B}{(cG)_C}}{(a_1 c_3 - a_3 c_1) k_{BC}} \quad \text{przy } \Delta P_A = 0, \Delta P_B = 0 \quad (21)$$

Pierwszą i drugą pochodną temperatury ψ_B dla $t \rightarrow 0$ obliczamy ze wzoru (13) oraz (14)

$$\left[\frac{d\psi_B(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{\Delta P_B}{(cG)_B} \quad (22)$$

$$\left[\frac{d^2\psi_B(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{b_1}{(cG)_A} \Delta P_A - \frac{b_2}{(cG)_B} \Delta P_B + \frac{b_3}{(cG)_C} \Delta P_C \quad (23)$$

Przy $\Delta P_B = 0$ i $\Delta P_C = 0$

$$\left[\frac{d\psi_{BA}(t)}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \left[\frac{d^2\psi_{BA}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{b_1}{(cG)_A} \Delta P_A$$

Przy $\Delta P_A = 0$ i $\Delta P_C = 0$

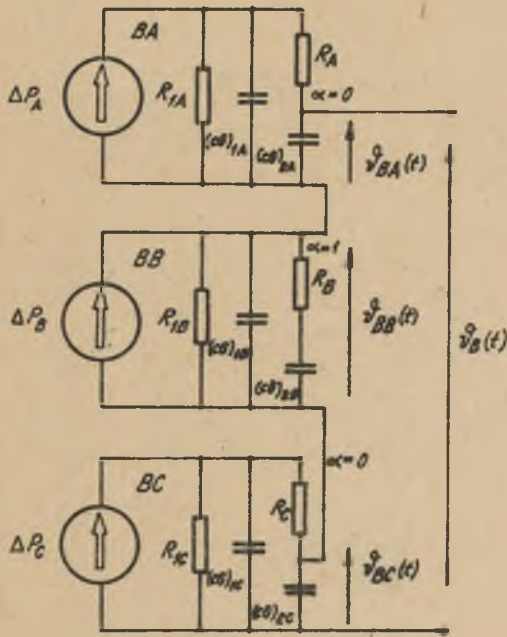
$$\left[\frac{d\psi_{BB}(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{\Delta P_B}{(cG)_B} \quad \left[\frac{d^2\psi_{BB}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{-b_2}{(cG)_B} \Delta P_B \quad (24)$$

Przy $\Delta P_A = 0$ i $\Delta P_B = 0$

$$\left[\frac{d\psi_{BC}(t)}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \left[\frac{d^2\psi_{BC}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{b_3}{(cG)_C} \Delta P_C$$

3. Parametry przybliżonego analogu elektrycznego

Przybliżony analog, przedstawiony na rys. 4, ma być równoważny pod względem temperatur ustalonych, zastępczych ciepłych stałych czasowych, początkowych pierwszych i drugich pochodnych temperatury względem czasu, przebiegowi temperaturowo-czasowemu w węzle cieplnym B rzeczywistego cieplnego schematu zastępczego z rys. 3. Wypadkową charakterystykę obliczo-

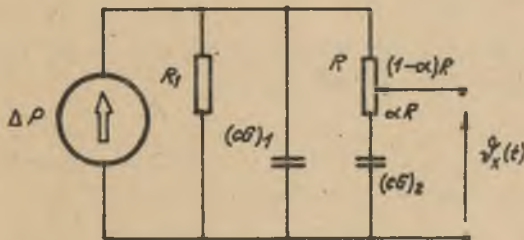


Rys. 4. Przybliżony analog elektryczny odwzorowujący charakterystykę temperaturowo-czasową w węzle B schematu cieplnego z rys.3

ną względnie zmierzoną w przypadku zastosowania przyrządu analogowego - analogu RC uzyskuje się przez superpozycję cząstkowych przebiegów temperaturowo czasowych

$$\psi_B(t) = \psi_{BA}(t) + \psi_{BB}(t) + \psi_{BC}(t) \quad (25)$$

Podstawowym cząstkowym składnikiem tego przybliżonego analogu elektrycznego jest schemat przedstawiony na rys. 5, z którego wynikają następujące zależności dla $\psi_x(t)$:



Rys. 5. Cząstkowy składnik przybliżonego analogu elektrycznego

Przy $\alpha = 0$

$$v_x(t) = -C_A(1-e^{-k_1 t}) - C_B(1-e^{-k_2 t}) \quad (26)$$

gdzie:

$$C_A = \frac{k_2 \Delta P R_1}{\sqrt{\Delta}} \quad C_B = \frac{-k_1 \Delta P R_1}{\sqrt{\Delta}}$$

$$k_1 = \frac{A + \sqrt{\Delta}}{2} \quad k_2 = \frac{A - \sqrt{\Delta}}{2} \quad (27)$$

$$A = \frac{(cG)_2 R + [(cG)_1 + (cG)_2] R_1}{(cG)_1 (cG)_2 R R_1} \quad \Delta = A^2 - 4B$$

$$B = \frac{1}{(cG)_1 (cG)_2 R R_1}$$

Przy $\alpha = 1$

$$v_x(t) = -C_A(1-e^{-k_1 t}) - C_B(1-e^{-k_2 t}) \quad (28)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} C_A &= \frac{k_2 \Delta P R_1}{\sqrt{\Delta}} [1 - k_1 (cG)_2] R \\ C_B &= \frac{-k_1 \Delta P R_1}{\sqrt{\Delta}} [1 - k_2 (cG)_2] R \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

zaś pozostałe parametry jak dla $\alpha = 0$.

Parametry uproszczonego analogu elektrycznego z rys. 4 wynikają z równania v_{ust} , Tz , $\frac{dv(t)}{dt}$ dla $t \rightarrow 0$, $\frac{d^2 v(t)}{dt^2}$ dla $t \rightarrow 0$ podanych zależnościami (19-25) z tymi samymi wielkościami wyliczonymi dla składowych analogu elektrycznego z rys. 5. Wynoszą one:

dla składowej BA

$$\left. \begin{aligned} v_{BA \text{ ust}} &= \Delta P_A R_{1A} \\ Tz_{BA} &= R_{1A} [(cG)_{1A} + (cG)_{2A}] + R_A (cG)_{2A} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\left[\frac{d\psi_{BA}(t)}{dt} \right]_{t=0} = 0$$

$$\left[\frac{d^2\psi_{BA}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{1}{R_A (cG)_{1A} (cG)_{2A}} \Delta P_A$$
(30)

dla składowej BB

$$\psi_{BB}^{ust} = \Delta P_B R_{1B}$$

$$T_{z\ BB} = R_{1B} (cG)_{1B} (cG)_{2B}$$

$$\left[\frac{d\psi_{BB}(t)}{dt} \right]_{t=0} = \frac{1}{(cG)_{1B}} \Delta P_B$$

$$\left[\frac{d^2\psi_{BB}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = - \frac{R_{1B} + R_B}{R_{1B} R_B (cG)_{1B}^2} \Delta P_B$$
(31)

dla składowej BC

$$\psi_{BC}^{ust} = \Delta P_C R_{1C}$$

$$T_{z\ BC} = R_{1C} [(cG)_{1C} + (cG)_{2C}] + R_C (cG)_{2C}$$

$$\left[\frac{d\psi_{BC}(t)}{dt} \right]_{t=0} = 0$$

$$\left[\frac{d^2\psi_{BC}(t)}{dt^2} \right]_{t=0} = \frac{1}{R_C (cG)_{1C} (cG)_{2C}} \Delta P_C$$
(32)

Stąd parametry przybliżonego analogu elektrycznego:
dla składowej BA

$$R_{1A} = B_1, \quad R_A = \frac{4 B_1^2}{B_3^2 B_2 - 4 B_1}, \quad (cG)_{1A} = \frac{B_3}{2 B_1}$$

$$(cG)_{2A} = \frac{1}{B_2 R_A (cG)_{1A}}$$
(33)

gdzie: $B_1 = \frac{k_{BA}}{R_B}, \quad B_2 = \frac{b_1}{(cG)_A}, \quad B_3 = T_{z_{BA}}$

dla składowej BB

$$R_{1B} = B_1, \quad R_B = \frac{B_1 B_2^2}{B_1 B_3 - B_2^2}, \quad (cG)_{1B} = \frac{1}{B_2}, \quad (cG)_{2B} = \frac{B_2 B_4 - B_1}{B_1 B_2} \quad (34)$$

gdzie: $B_1 = \frac{1}{k_B}, \quad B_2 = \frac{1}{(cG)_B}, \quad B_3 = \frac{b_2}{(cG)_B}, \quad B_4 = Tz_{BB}$

dla składowej BC

$$R_{1C} = B_1, \quad R_C = \frac{4 B_2^2}{B_3 B_2 - 4 B_1}, \quad (cG)_{1C} = \frac{B_3}{2 B_1}, \quad (cG)_{2C} = \frac{1}{B_2 R_C (cG)_{1C}} \quad (35)$$

gdzie: $B_1 = \frac{k_{BC}}{k_B}, \quad B_2 = \frac{b_3}{(cG)_C}, \quad B_3 = Tz_{BC}$

4. Przykład obliczeniowy

W celu sprawdzenia przedstawionej metody odwzorowania przybliżonym analogiem elektrycznym wybranego punktu krytycznego w cieplnej sieci maszyny elektrycznej, porównano charakterystykę temperaturowo-czasową w węzle B schematu cieplnego z rys. 3, obliczoną ściśle metodą analityczną z przebiegiem $\psi_B = f(t)$ uzyskanym z przybliżonego analogu elektrycznego (rys. 4).

Przyjęto następujące dane:

straty wydzielane w węzłach [W]

$$\Delta P_A = 143, \quad \Delta P_B = 271, \quad \Delta P_C = 143$$

przewodności cieplne $\left[\frac{W}{\text{deg}} \right]$

$$\Lambda_{AB} = 14,785, \quad \Lambda_{AC} = 2,59, \quad \Lambda_{BC} = 1,31$$

$$\Lambda_{A,ot} = 9,51, \quad \Lambda_{B,ot} = 0,927, \quad \Lambda_{C,ot} = 1,65$$

temperatury początkowe [deg]

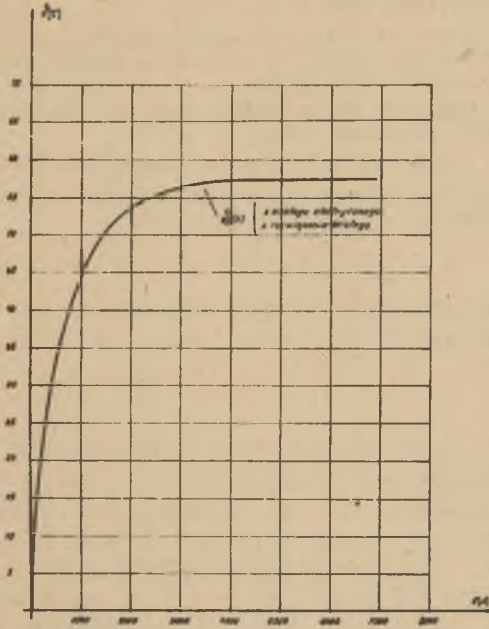
$$\psi_{Ap} = \psi_{Bp} = \psi_{Cp} = 0$$

temperatury czynnika chłodzącego [deg]

$$\psi_{A,ot} = \psi_{B,ot} = \psi_{C,ot} = 0$$

Na rys. 6 przedstawiono zależność $\psi_B = f(t)$ otrzymaną z przybliżonego analogu elektrycznego jako superpozycję częstkowych przebiegów

$$\psi_B(t) = \psi_{BA}(t) + \psi_{BB}(t) + \psi_{BC}(t)$$



Rys. 6. Porównanie charakterystyki $\psi_B(t)$ uzyskanych z analogu elektrycznego i z rozwiązania ściślego cieplnego schematu zastępczego

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \psi_{BA}(t) &= -0,67 \left(1 - e^{-\frac{t}{37,41}}\right) + 12,14 \left(1 - e^{-\frac{t}{676,96}}\right) \\ \psi_{BB}(t) &= +12,24 \left(1 - e^{-\frac{t}{52,26}}\right) + 24,01 \left(1 - e^{-\frac{t}{698,45}}\right) \\ \psi_{BC}(t) &= -1,94 \left(1 - e^{-\frac{t}{173,85}}\right) + 11,8 \left(1 - e^{-\frac{t}{1054,59}}\right) \end{aligned} \right\} (36)$$

Stwierdzono niemal identyczną zbieżność z charakterystyką $\psi_B(t)$ obliczoną ściśle metodą analityczną dla węzła cieplnego B schematu zastępczego z rys. 3.

$$\psi_B(t) = 9,53 \left(1 - e^{-\frac{t}{49,64}}\right) + 12,68 \left(1 - e^{-\frac{t}{325,09}}\right) + 35,37 \left(1 - e^{-\frac{t}{939,1}}\right) \quad (37)$$

LITERATURA

- [1] Bach G.: Über die Erwärmung des "n" Körper Systems. Archiv für Elektrotechnik H. 11, 1933.
- [2] Kessler A.: Versuch einer genaueren Vorausberechnung des zeitlichen Erwärmungsverlaufes elektrischer Maschinen mittels Wärmequellenetzen. Archiv für Elektrotechnik H. 1, 1960.
- [3] Kessler A.: Vzorcy pro výpočet neustáleného oteplování elektrických strojů metodou ekvivalentních tepelných obvodu jako dvou těles. Elektrotechnický Obzor č. 9, 1958.
- [4] Mukosiej J., Zapaśnik R.: Badania cieplne i wentylacyjne maszyn elektrycznych. WNT, Warszawa 1964.
- [5] Osłowski J.: Zarys rachunku operatorowego. WNT, Warszawa 1972.
- [6] Paszek W.: Analiza stanów nieustalonych amplitudyny. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 4, 1957.

ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ОТРАЖАЮЩИЕ
ИЗБРАННУЮ КРИТИЧЕСКУЮ ТОЧКУ В ТЕПЛОВОЙ СХЕМЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

Р е з ю м е

Предложили упрощённый электрический аналог отражающий тепловую характеристику $\psi(t)$ в произвольной точке тепловой схемы электрической машины. Параметры аналога определили сравнивая: установившуюся температуру, эквивалентную тепловую постоянную времени, начальную крутизну роста температуры, а рассматриваемой точке тепловой схемы и в электрическом аналогу.

Предложили пример в котором сравнили тепловую характеристику $\psi(t)$ рассчитанную аналитическим методом с приближённой характеристикой электрического аналога.

APPROXIMATE ELECTRICAL ANALOGS REPRESENTING A CHOSEN POINT
IN THERMAL NETWORK OF AN ELECTRICAL MACHINE

S u m m a r y

The paper presents the approximative electrical analog representing the temperature in transient conditions of a chosen point in thermal network of an electrical machine.

The analog elements were determined at corresponding values of steady state temperature, equivalent time constant and initial temperature rise, the real thermal object and analog.

The temperature plots calculated for the real thermal network and for the electrical analog were compared.