

Maria BOJARSKA

Politechnika Śląska
Instytut Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej

PARAMETRY CHARAKTERYZUJĄCE PRZENOSZENIE SYGNAŁÓW STOCHASTYCZNYCH PRZEZ PRZETWORNIKI POMIAROWE

Streszczenie. W artykule omówiono parametry charakteryzujące jakość przenoszenia sygnałów stochastycznych przez przetworniki pomiarowe w zastosowaniu do przetworników II rzędu.

Ekperymentalne metody wyznaczenia charakterystyk dynamicznych przetworników pomiarowych można podzielić na deterministyczne i probabilistyczne - w zależności od wykorzystywanych sygnałów testowych.

Stosowanie metod probabilistycznych jest celowe wtedy, gdy:

- sygnałami użytecznymi przetworników pomiarowych są sygnały stochastyczne,
- wymagania dotyczące warunków pracy przetwornika nie dopuszczają wprowadzenia specjalnych wymuszeń,
- nie ma możliwości odizolowania badanego przetwornika od zakłóceń, w wyniku czego powstają duże zafałszowania odpowiedzi przetwornika na zdefiniowane wymuszenia testowe,
- wytworzenie testowego sygnału zdeterminowanego jest bardzo trudne ze względu na wymagania dotyczące jego kształtu.

Dynamiczne właściwości przetworników pomiarowych określa się za pomocą pełnych i niepełnych charakterystyk dynamicznych. Przykładami charakterystyk pełnych są transmitancja, charakterystyki częstotliwościowe, odpowiedź impulsowa i odpowiedź skokowa przetwornika. Poszczególne parametry charakterystyk pełnych tworzą charakterystyki niepełne przetwornika.

Dla zdeterminowanych sygnałów wejściowych wymienia się następujące parametry przetworników pomiarowych [3], [7], [8]:

- w dziedzinie czasu: czas odpowiedzi, czas połówkowy, czas narastania, przelot, czas charakterystyczny,
- w dziedzinie częstotliwości: częstotliwość graniczna, szczyt rezonansowy.

Również w przypadku stochastycznych sygnałów wejściowych można stosować charakterystyki niepełne dla określania jakości przenoszenia tych sy-

gnałów przez przetworniki pomiarowe. Znajomość tych charakterystyk pozwala na porównanie właściwości dynamicznych przetworników przy przenoszeniu sygnałów przypadkowych. Jest to użyteczne szczególnie wtedy, gdy rezygnuje się z podawania pełnych charakterystyk dynamicznych przetwornika z powodu trudności związanych z ich wyznaczaniem.

Dla oceny przenoszenia sygnałów stochastycznych przez przetworniki pomiarowe najczęściej stosuje się parametr zwany błędem średnim kwadratowym przetwornika pomiarowego [5], [12]. Błąd ten zdefiniowany jest następująco:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [y(t) - x(t)]^2 dt, \quad (1)$$

przy czym:

$y(t)$ - sygnał wyjściowy przetwornika pomiarowego,
 $x(t)$ - sygnał wejściowy przetwornika pomiarowego.

Sygnały $x(t)$ i $y(t)$, występujące we wzorze definicyjnym (1), muszą być unormowane. Pozwala to na wykluczenie wpływu współczynnika wzmocnienia statycznego na wartości błędu średniego kwadratowego przetwornika pomiarowego.

Przekształcając wzór (1) otrzymuje się zależność:

$$\overline{\varepsilon^2(t)} = R_x(0) + R_y(0) - 2R_{xy}(0), \quad (2)$$

przy czym:

$R_x(0)$ - wartość funkcji autokorelacji sygnału wejściowego przetwornika dla $\tau = 0$,
 $R_y(0)$ - wartość funkcji autokorelacji sygnału wyjściowego przetwornika dla $\tau = 0$,
 $R_{xy}(0)$ - wartość funkcji korelacji wzajemnej sygnału wejściowego i wyjściowego przetwornika dla $\tau = 0$.

Normowany błąd średni kwadratowy przedstawiony jest równaniem

$$\overline{\varepsilon^2(t)}_n = \frac{\overline{\varepsilon^2(t)}}{R_x(0)} = 1 + \frac{R_y(0)}{R_x(0)} - 2 \frac{R_{xy}(0)}{R_x(0)}. \quad (3)$$

Innym parametrem określającym właściwości dynamiczne przetwornika przy przenoszeniu sygnałów stochastycznych jest błąd odtworzenia wariancji sygnału wejściowego [1]:

$$\Delta_D = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2}, \quad (4)$$

przy czym:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dt \quad \text{- wariancja sygnału wejściowego przetwornika,}$$

$$\mu_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{- wartość średnia sygnału wejściowego przetwornika,}$$

$$\sigma_y^2 \quad \text{- wariancja sygnału wyjściowego przetwornika.}$$

Zakładając, że wartości średnie sygnałów stochastycznych (wejściowego i wyjściowego) są równe zeru, czyli $\mu_x = \mu_y = 0$, otrzymuje się:

$$\sigma_x^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt = \psi_x^2 = R_x(0), \quad (4a)$$

przy czym:

ψ_x^2 - wartość średnia kwadratowa sygnału wejściowego przetwornika.

Po uwzględnieniu zależności (4a) wsr definicyjny (4) przybiera postać:

$$\Delta_D = 1 - \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = 1 - \frac{\psi_y^2}{\psi_x^2} = 1 - \frac{R_y(0)}{R_x(0)}. \quad (5)$$

Sygnały $x(t)$ i $y(t)$ muszą być uernowane.

Błąd odtworzenia wariancji sygnału wejściowego nie zawiera informacji o zniekształceniach fazowych sygnału wejściowego spowodowanych przez przetwornik pomiarowy.

Wykorzystując wartości charakterystyczne funkcji korelacyjnych sygnału wejściowego i wyjściowego przetwornika pomiarowego można wyznaczyć parametr zwany korelacyjną dobrocią przenoszenia sygnałów [12]

$$\rho_{xy}(0) = \frac{R_{xy}(0)}{\sqrt{R_x(0)} \sqrt{R_y(0)}} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t) dt}{\sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt}}. \quad (6)$$

W celu uproszczenia dalszych rozważań przyjęte zostały następujące założenia:

- obiektem analizy są liniowe, stacjonarne przetworniki pomiarowe o parametrach skupionych,
- sygnały stochastyczne są stacjonarne i ergodyczne,
- wartości średnie (momenty I rzędu) tych sygnałów są równe zero.

Jak widać z zależności (3), (5) i (6) przy badaniu jakości przenoszenia sygnałów stochastycznych przez przetworniki pomiarowe należy założyć określoną postać funkcji autokorelacji sygnału wejściowego. Duże znaczenie praktyczne, ze względu na częste występowanie w zagadnieniach fizycznych, ma sygnał o właściwościach zbliżonych do białego szumu oraz sygnał o wykładniczej postaci funkcji autokorelacji.

Dla praktycznie realizowalnego szumu białego czyli szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości funkcje autokorelacji oraz widmowej gęstości mocy (jednostronna) mają postać:

$$R_x(\tau) = a B \operatorname{si} 2\pi B\tau, \quad (7)$$

$$S_x(f) = \begin{cases} a & \text{dla } 0 \leq f \leq B \\ 0 & \text{poza tym przedziałem.} \end{cases} \quad (8)$$

Funkcja widmowej gęstości mocy dla sygnału stochastycznego o funkcji autokorelacji zgodnej z równaniem

$$R_x(\tau) = De^{-a|\tau|} \quad (9)$$

przebiega według zależności:

$$S_x(f) = \frac{4aD}{a^2 + 4\pi^2 f^2}. \quad (10)$$

W celu wyznaczenia wartości charakterystycznych funkcji korelacyjnych wykorzystano związki:

$$R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |G(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega, \quad (11)$$

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[G(j\omega) S_x(\omega)] d\omega. \quad (12)$$

Parametry Δ_D , $\overline{\varepsilon^2(t)}$ i $\varphi_{xy}(0)$ w odniesieniu do przetworników pomiarowych I rzędu omówiono w pracy [4]. Obecnie zostanie rozpatrzony przebieg tych parametrów dla przetworników II rzędu o transmitancji opisanej równaniem:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad (13)$$

1. Sygnał testowy w postaci szumu białego a ograniczonym pasmie częstotliwości

Dla tłumienia względnego przetwornika pomiarowego zawartego w przedziale $0 < \xi < 1$ otrzymano następujące równania:

$$\Delta_D = 1 - \frac{1}{4\eta_B} \left[\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{\eta_B^2 + 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1}{\eta_B^2 - 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1} + \frac{1}{\xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta_B + \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} + \operatorname{arctg} \frac{\eta_B - \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (14)$$

$$\overline{\varepsilon^2(t)}_n = 1 + \frac{3}{8\eta_B\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{\eta_B^2 + 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1}{\eta_B^2 - 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1} + \frac{1}{4\eta_B\xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta_B + \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} + \operatorname{arctg} \frac{\eta_B - \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \quad (15)$$

$$\varphi_{xy}(0) = \frac{\ln \frac{\eta_B^2 + 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1}{\eta_B^2 - 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1}}{\sqrt{4\eta_B(1-\xi^2)}} \left[\frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} \ln \frac{\eta_B^2 + 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1}{\eta_B^2 - 2\eta_B\sqrt{1-\xi^2} + 1} + \frac{1}{\xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta_B + \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} + \operatorname{arctg} \frac{\eta_B - \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right) \right] \quad (16)$$

$$+ \operatorname{arctg} \frac{\eta_B - \sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \Big]$$

rzy czym:

$$\gamma_B = \frac{2\pi B}{\omega_0}$$

- B - szerokość pasma częstotliwości białego szumu,
 ω_0 - pulsacja drgań swobodnych nietłumionych przetwornika pomiarowego,
 k - współczynnik wzmocnienia statycznego przetwornika.

Z równań (14), (15) i (16) można wyprowadzić zależności dla pozostałych wartości tłumienia względnego przetwornika, a mianowicie:

dla $\xi = 1$ obliczając granicę zależności (14), (15) i (16) przy $\xi \rightarrow 1$ np.

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \Delta D_{0 \leq \xi < 1} = \Delta D_{\xi=1}$$

dla $\xi > 1$ dokonując przekształceń związanych z występowaniem we wzorach (14), (15) i (16) liczb zespolonych, gdyż wtedy:

$$\sqrt{1 - \xi^2} = j \sqrt{\xi^2 - 1}.$$

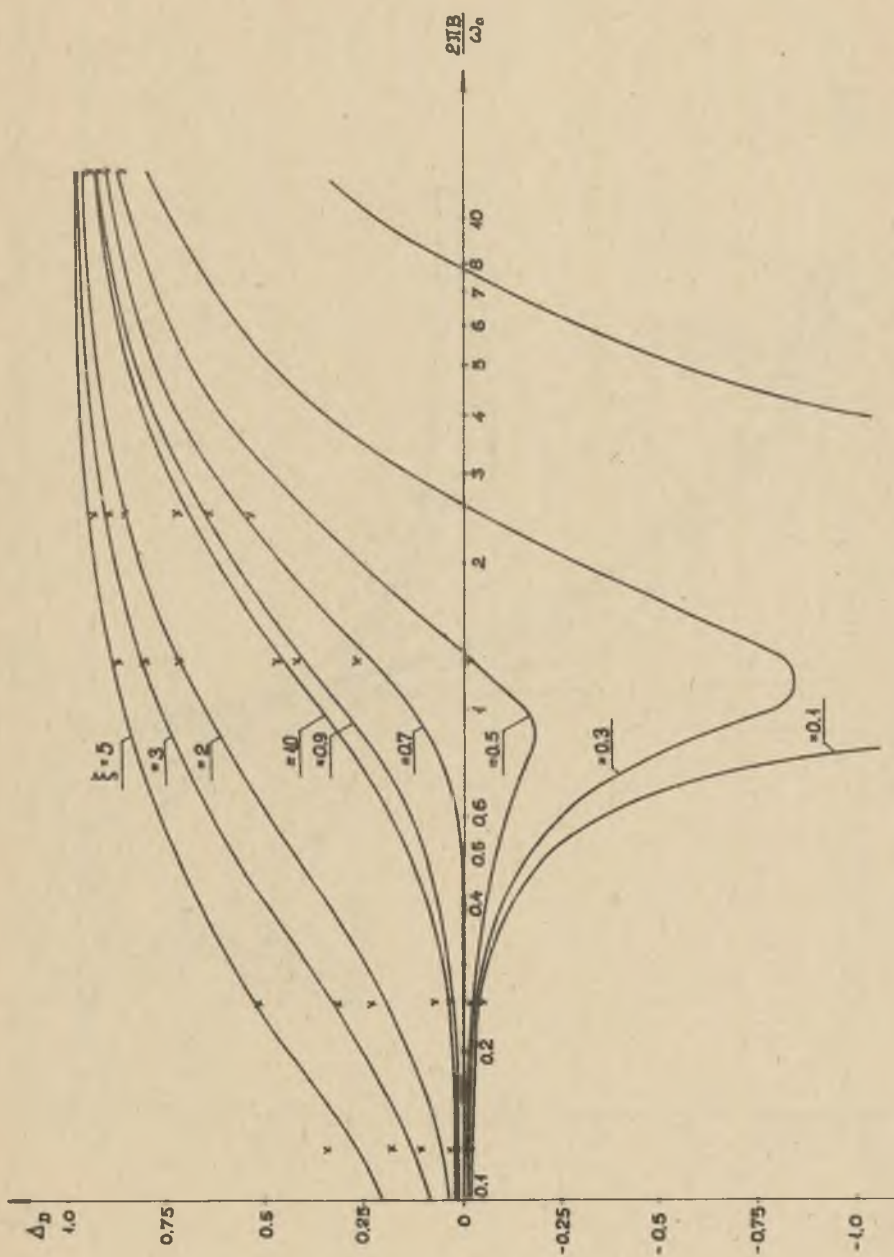
Wzory te mają równie skomplikowaną postać jak w przypadku $0 \leq \xi < 1$ i dlatego zrezygnowano z podawania ich w artykule.

Przebiegi parametrów Δ_D , $\varepsilon^2(t)_n$ i $\varphi_{xy}(0)$ w funkcji wielkości bezwymiarowej γ_B przedstawione są odpowiednio na rys. 1, 2 i 3.

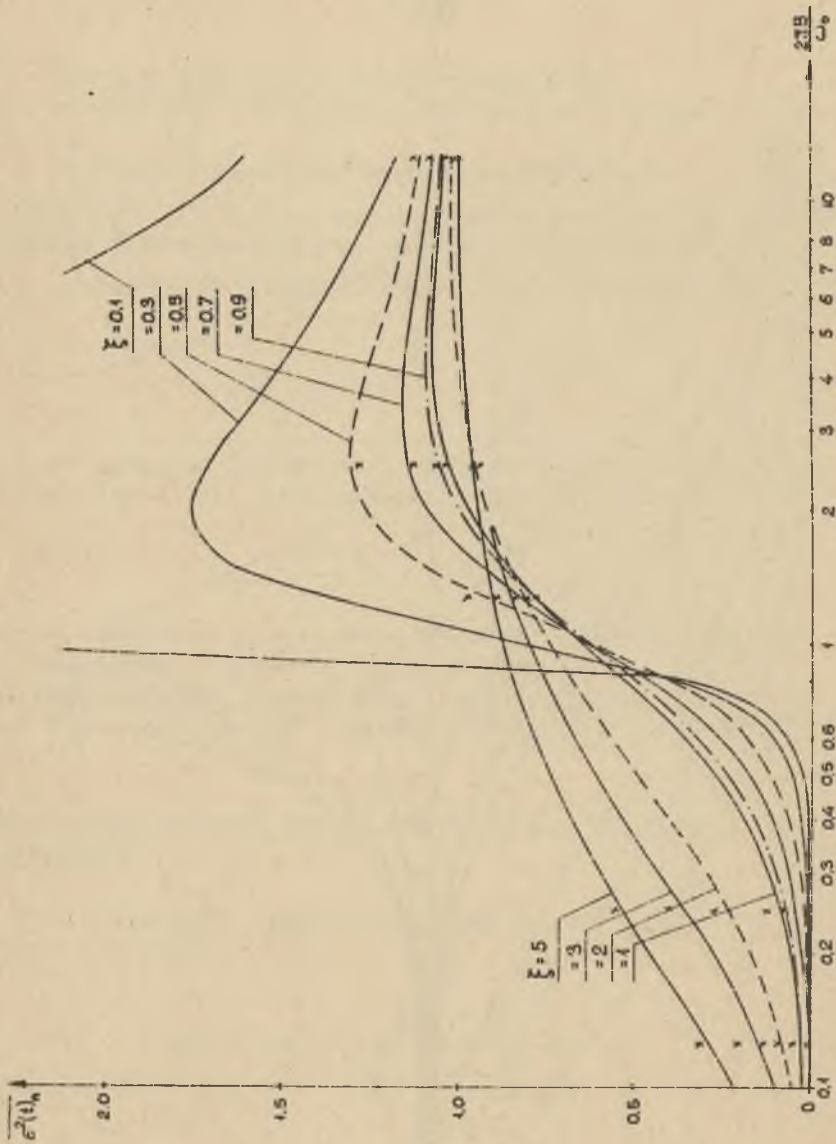
• Sygnał testowy w postaci sygnału przypadkowego o wykładniczej funkcji autokorelacji

Dla dowolnej wartości tłumienia względnego ξ przetwornika obowiązują następujące zależności:

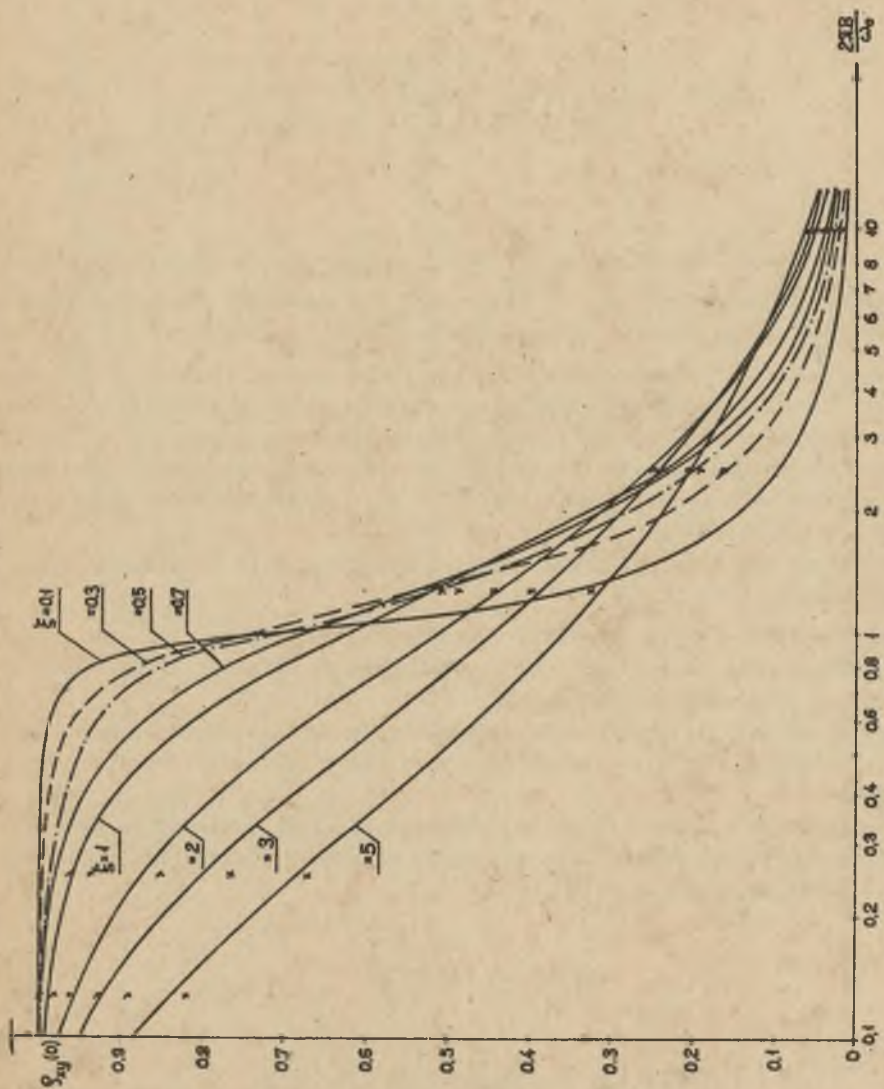
$$\Delta_D = 1 - \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\frac{a}{\omega_0} + 2\xi}{\frac{a^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{a}{\omega_0} + 1}, \quad (17)$$



Rys. 1. Błąd odtworzenia wariancji sygnału wejściowego przetwornika II rzędu dla sygnału w postaci szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości



Rys. 2. Błąd średni kwadratowy przetwornika II rzędu dla sygnału testowego w postaci szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości



Rys.3. Korrelacyjna dobroć przenoszenia sygnałów przetwornika II rzędu dla szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości

$$\overline{\varepsilon^2(t)}_n = 1 + \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\frac{a}{\omega_0} - 2\xi}{\frac{a}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{a}{\omega_0} + 1}, \quad (18)$$

$$\varrho_{xy}(0) = \sqrt{\frac{2\xi}{\left(\frac{a}{\omega_0} + 2\xi\right) \left(\frac{a}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{a}{\omega_0} + 1\right)}}, \quad (19)$$

przy czym:

a - odwrotność stałej czasowej funkcji autokorelacji sygnału testowego.

Przebiegi parametrów Δ_D , $\overline{\varepsilon^2(t)}_n$ i $\varrho_{xy}(0)$ w funkcji wielkości bezwymiarowej $\frac{a}{\omega_0}$ przedstawione są odpowiednio na rys. 4, 5 i 6.

Rozważania teoretyczne sprawdzono eksperymentalnie, mierząc wartości funkcji korelacji sygnałów wejściowego i wyjściowego przetwornika II rzędu za pomocą korelatora. Dla testowych sygnałów stochastycznych o przebiegach funkcji autokorelacji podanych na rys. 7 i 8 wyznaczono parametry zdefiniowane według zależności (3), (5) i (6). Wyniki pomiarów zaznaczono na rys. 1 - 6 krzyżykami.

Przyczyny rozbieżności między krzywymi teoretycznymi a wynikami pomiarów są następujące:

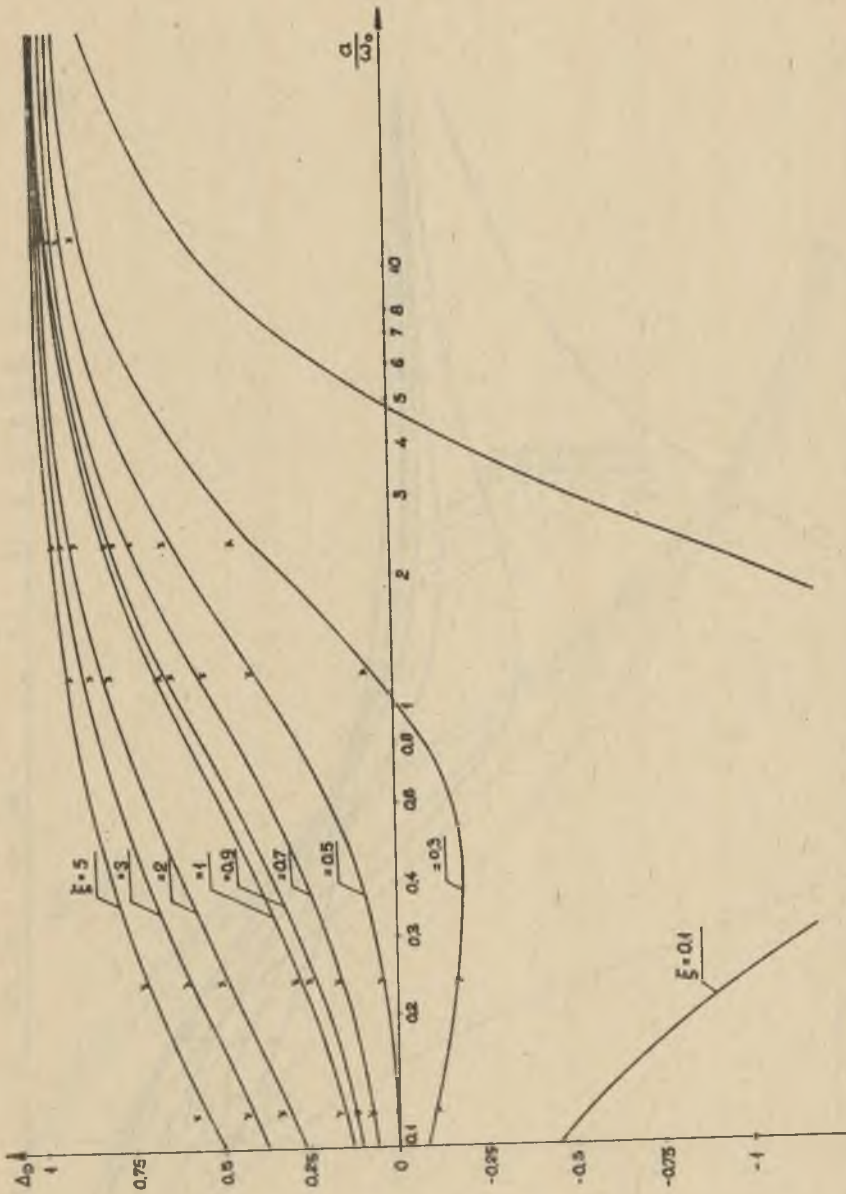
- dokładność korelatora wynosząca 2% wartości wyjściowej,
- dokładność określenia tłumienia względnego ξ i pulsacji drgań swobodnych ω_0 przetwornika pomiarowego,
- błąd wynikający ze skończonego przedziału czasu obserwacji sygnałów stochastycznych, wskutek czego możliwa jest tylko estymacja funkcji korelacji;

przykładowo dla szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości B i wartości średniej równej zeru wariancje estymacji funkcji korelacji dla $\tau = 0$ wyrażają się odpowiednio:

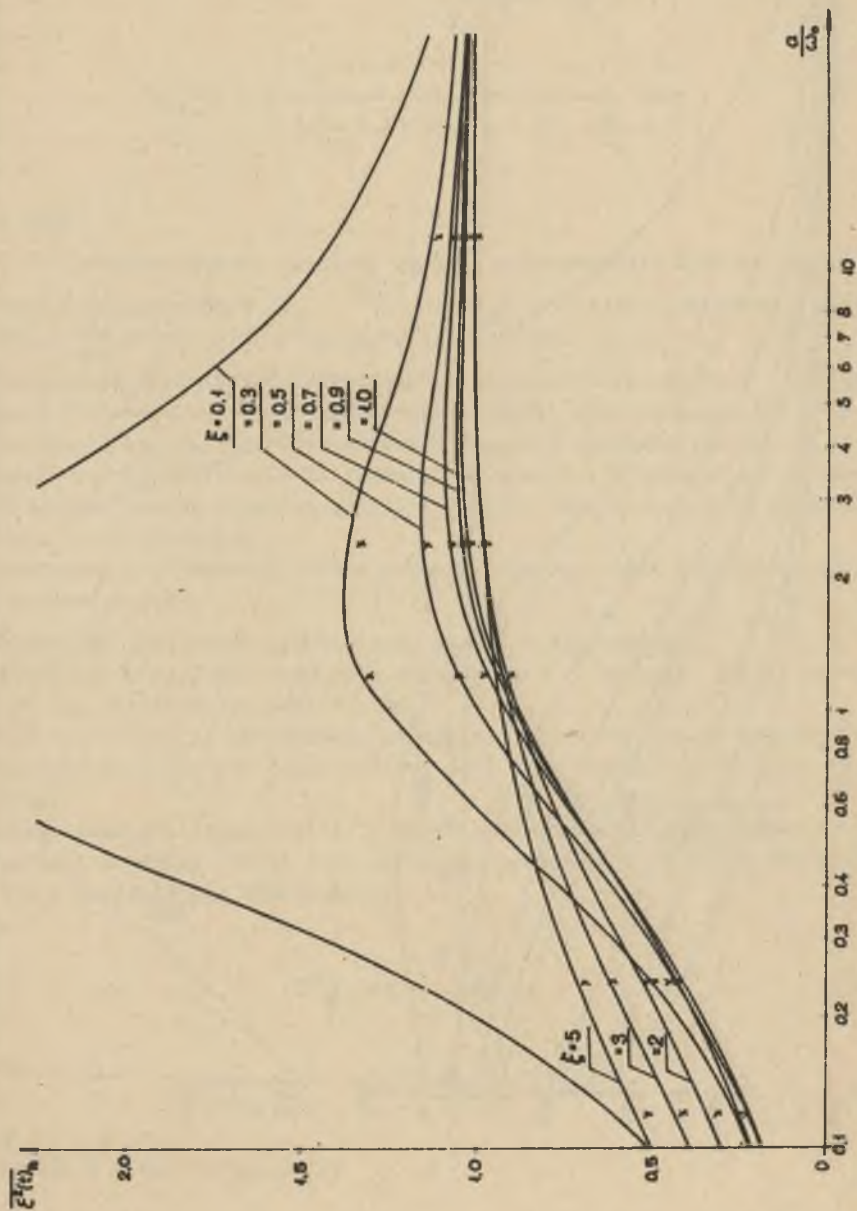
$$D^2[\hat{R}_x(0)] \approx \frac{R_x^2(0)}{BT} \quad (20)$$

$$D^2[\hat{R}_{xy}(0)] \approx \frac{R_x(0) R_v(0) + R_{xy}^2(0)}{2BT}, \quad (21)$$

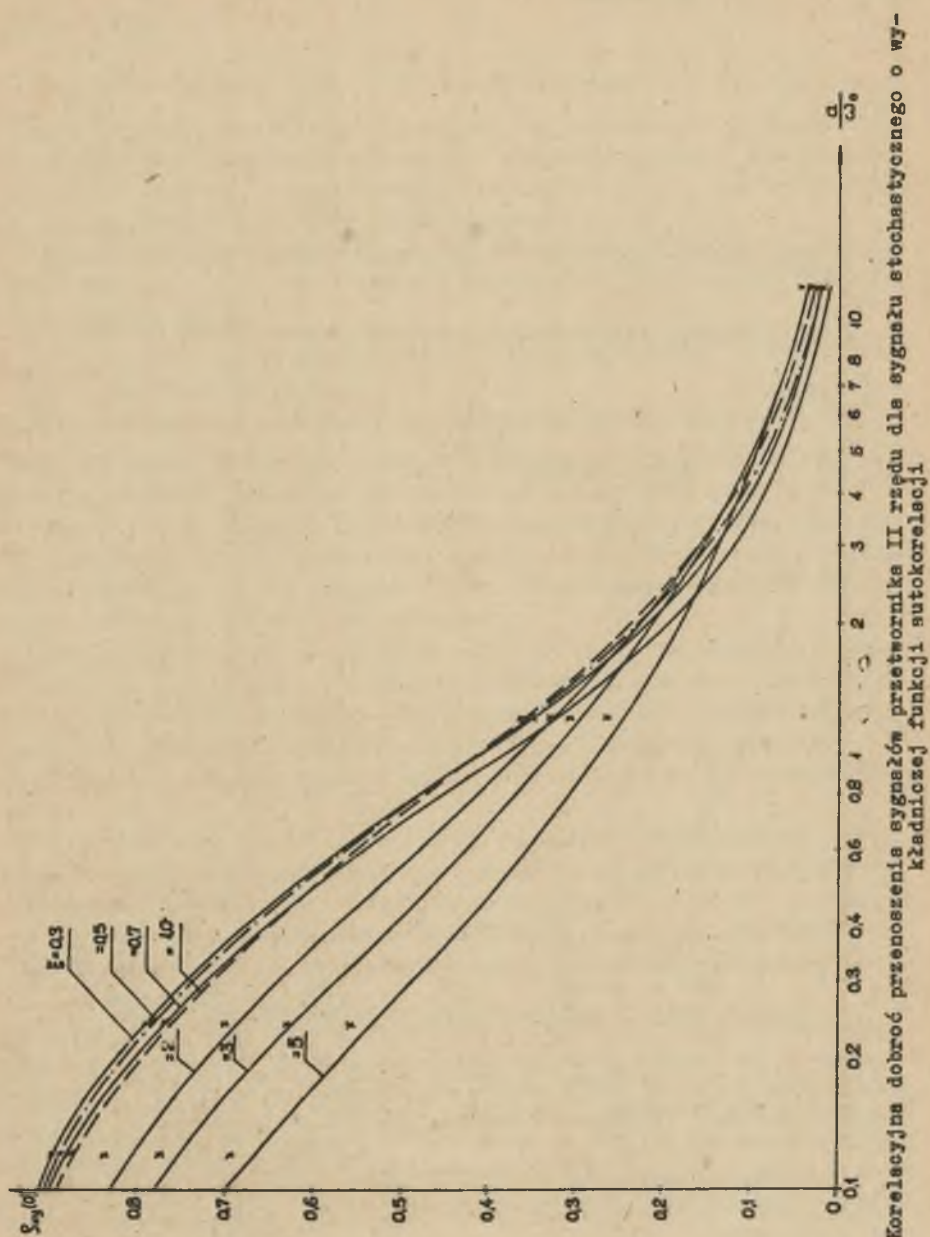
przy czym T - czas obserwacji.



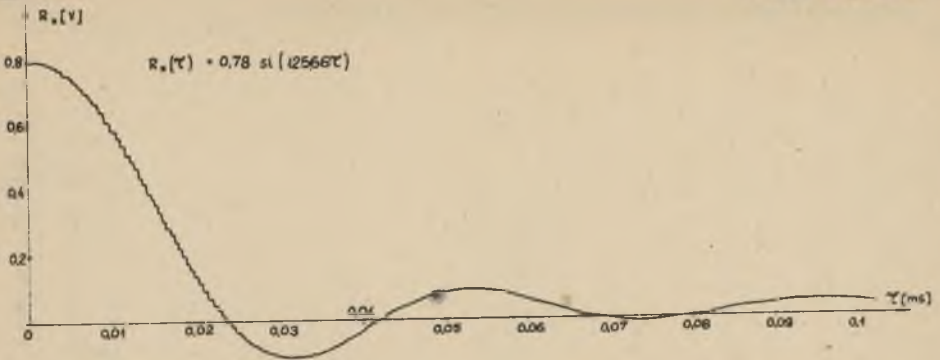
Rys. 4. Błąd odtworzenia wariancji sygnału wejściowego przetwornika II rzędu dla sygnału stochastycznego o wykładniczej funkcji autokorelacji



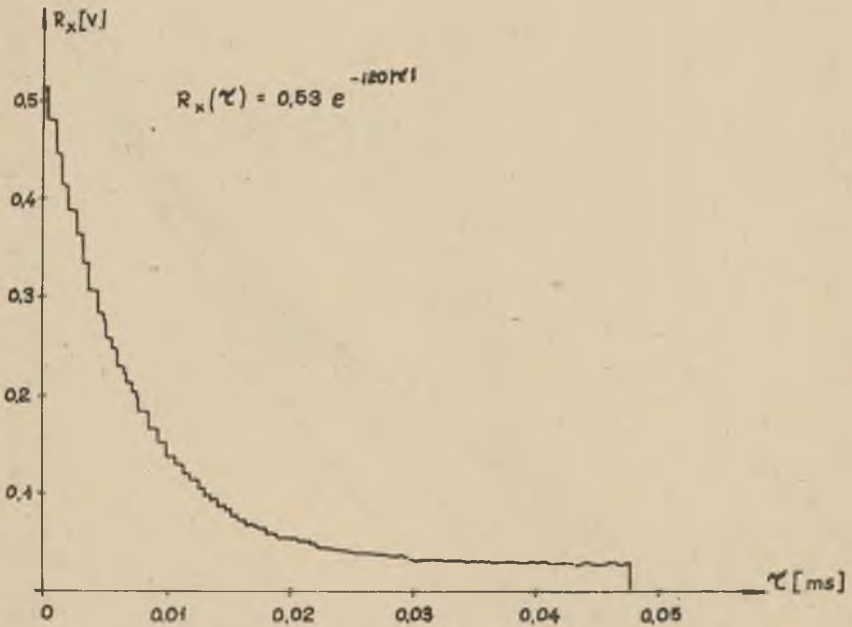
Rys. 5. Błąd średni kwadratowy przetwornika II rzędu dla sygnału stochastycznego o wyższej częstotliwości autokorelacji.



Rys. 6. Korelacyjna dobroć przenoszenia sygnałów przetworzonymi II rzędu dla sygnału stochastycznego o wy-
kładniczej funkcji autokorelacji



Rys. 7. Funkcja autokorelacji testowego sygnału szumu białego



Rys. 8. Funkcja autokorelacji testowego sygnału szumu

Równania te są spełnione dla czasów T dostatecznie długich, co w praktyce wyraża się warunkami $T > 10|\tau|$ oraz $BT = 5$. Dla przeprowadzonych pomiarów zmierzono wartość B , która wynosi $B = 2 \cdot 10^4$ Hz oraz przyjęto wartości $T = 10$ s i $\tau_{\max} = 10^{-4}$ s. Jak wynika ze wzorów (23) i (24) względne błędy średnie kwadratowe są proporcjonalne do $1/BT = 5 \cdot 10^{-6}$, a więc są pomijalnie małe.

3. Podsumowanie

Na podstawie wykresów (rys. 1-6) można stwierdzić, że:

- zwiększenie wartości pulsacji naturalnej ω_0 przetwornika prowadzi do zmniejszenia wartości błędu odtworzenia wariancji sygnału wejściowego Δ_D i błędu średniego kwadratowego przetwornika $\varepsilon^2(t)_n$ oraz powiększenia korelacyjnej dobroci przenoszenia sygnałów $\rho_{xy}(0)$,
- najmniejsze wartości parametrów Δ_D i $\varepsilon^2(t)_n$ oraz największe wartości $\rho_{xy}(0)$ otrzymuje się przy tłumieniu względnym $\xi = 0,6 \dots 0,7$ w szerokim zakresie zmian:
 - a) $2\pi B / \omega_0$ dla sygnału testowego w postaci szumu białego o ograniczonym pasmie częstotliwości,
 - b) a / ω_0 dla sygnału testowego o wykładniczej funkcji autokorelacji.

Także dla zdeterminowanych sygnałów wejściowych te wartości tłumienia zapewniają najlepszy przebieg charakterystyk częstotliwościowych. A więc tłumienie od 0,6 do 0,7 jest optymalne dla przetworników II rzędu zarówno w przypadku rozpatrywania właściwości dynamicznych przetworników w ujęciu częstotliwościowym jak i w przypadku oceny przenoszenia sygnałów stochastycznych za pomocą wymienionych parametrów.

Stosowanie proponowanych kryteriów oceny przenoszenia sygnałów stochastycznych jest celowe także w przypadku przetworników wyższych rzędów. Porównanie czasochłonności metody analitycznego wyznaczenia zależności określających te parametry i metody eksperymentalnej przemawia na korzyść tej drugiej (pomijając przetworniki I rzędu, gdzie zależności są nieskomplikowane).

W celu określenia jakości przenoszenia sygnałów stochastycznych przez przetwornik pomiarowy najczęściej stosuje się parametr zwany błędem średnim kwadratowym przetwornika. Eksperymentalne wyznaczenie tego parametru polega na pomiarze wartości charakterystycznych funkcji autokorelacji oraz korelacji wzajemnej sygnału wejściowego i wyjściowego przetwornika, co wymaga zastosowania korelatora.

Korelacyjna dobroć przenoszenia sygnałów jest wartością charakterystyczną znormalizowanej funkcji korelacji wzajemnej sygnału wejściowego i wyjściowego. W przypadku przetworników oscylacyjnych II rzędu nie odzwierciedla ona wzmocnienia sygnałów wejściowych w zakresie wartości modułu transmitancji większych od $G(0)$.

Oceniając przenoszenie sygnałów stochastycznych przez przetwornik na podstawie tego parametru (rys. 3 i 6) można wysnuć wniosek, że stopień zniekształcenia sygnałów wejściowych przez przetworniki oscylacyjne II rzędu jest prawie jednakowy, niezależnie od wartości tłumienia względnego ξ .

Najprostszy do wyznaczenia doświadczalnego jest błąd odtworzenia wariancji sygnału wejściowego. Zakłada on tylko znajomość wartości średnich kwadratowych sygnału wejściowego i wyjściowego (pomiar można wykonać za

pomocą woltomierza wartości skutecznej o odpowiedniej stałej czasowej). Jeżeli sygnał przypadkowy jest sygnałem zakłócającym, znając wartość błędu odtworzenia wariancji sygnału wejściowego można wyznaczyć stopień tłumienia danego zakłócenia przez przetwornik pomiarowy.

LITERATURA

- [1] Azizow A.M., Gordow A.N.: Tocznost izmeritelnykh preobrazovateliej, Leningrad 1975.
- [2] Bendat I.S., Piersol A.G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, Warszawa 1976.
- [3] Bojarska M.: Parametry charakterystyczne przetworników pomiarowych, Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Elektryka z. 53, Gliwice 1976.
- [4] Bojarska M.: Ocena przenoszenia sygnałów stochastycznych przez przetworniki pomiarowe, materiały XII Narady Metrologów, Poznań, IX 1977.
- [5] Lange P.H.: Korrelationselektronik, Berlin 1962.
- [6] Bubnicki Z.: Identyfikacja obiektów sterowania, PWN, Warszawa 1974.
- [7] Douglas J.M.: Dynamika i sterowanie procesów, WNT, Warszawa 1976.
- [8] Hagel R.: Miernictwo dynamiczne, WNT, Warszawa 1975.
- [9] Isermann R.: Prozess-identifikation, Berlin 1974.
- [10] Ordyncew W.M.: Opis matematyczny obiektów regulacji automatycznej, WNT, Warszawa 1968.
- [11] Wierzbicki A.: Modele i wrażliwość układów sterowania, WNT, Warszawa 1977.
- [12] Neidhardt P.: Informationstheorie und automatische Informationsverarbeitung, Berlin 1964.

ХАРАКТЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ПЕРЕДАЧИ

СТОХАСТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯМИ

Р е з ю м е

В статье обсуждены параметры характеризующие качество передачи стохастических сигналов измерительными преобразователями в применении к преобразователям II порядка.

CHARACTERISTIC PARAMETERS FOR THE TRANSFER OF STOCHASTIC SIGNALS BY MEASURING TRANSDUCERS

S u m m a r y

The paper presents parameters characterising dynamic properties of measuring transducers while input signals of the transducers are the stochastic processes. Application of these parameters is described basing on the II order transducers.