

Aleksander L. ŁATKA

Politechnika Śląska
Instytut Metrologii Elektrycznej i Elektronicznej

METODA GRAFICZNA WYZNACZENIA CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH FAZOWYCH
NA PODSTAWIE ZNANYCH CHARAKTERYSTYK CZĘSTOTLIWOŚCIOWYCH AMPLITUDOWYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono twierdzenia i ich dowody określające własności charakterystyk częstotliwościowych fazowych i amplitudowych obiektów minimalnofazowych. Pokazano matematyczne uzasadnienie metody graficznej i samą metodę wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych fazowych na podstawie wykresu charakterystyk częstotliwościowych amplitudowych. Metodę zilustrowano przykładem.

1. Wprowadzenie

Właściwości dynamiczne obiektów określają jednoznacznie ich charakterystyki częstotliwościowe: amplitudowe i fazowe. Pomiar tych charakterystyk szczególnie w warunkach normalnej pracy obiektów może natrafić na trudności.

Obecnie pojawiły się nowe możliwości przy zastosowaniu wymuszania sygnałami stochastycznymi, chociaż i w tym przypadku nie ma możliwości bezpośredniego uzyskania zależności fazowych. Także w przypadku pobudzenia obiektów sygnałami harmonicznymi pomiar charakterystyk częstotliwościowych fazowych (ch.cz.faz.) jest trudniejszy niż pomiar charakterystyk częstotliwościowych amplitudowych (ch.cz.ampl.).

W artykule przedstawiono niektóre wyniki badań, a mianowicie twierdzenia opisujące zależności między ch.cz.faz. i ch.cz.ampl. oraz graficzną metodę obliczania fazy na podstawie danej wykreslinie ch.cz.ampl. Metoda graficzna została zasygnalizowana przez Bodego [1], a potem m.in. przez Opełta [5]. W obu przypadkach nie podano uzasadnienia matematycznego metody. W pracy przedstawiono przesłanki matematyczne metody graficznej.

2. Własności zachodzące między charakterystykami częstotliwościowymi: amplitudowa i fazowa

W przypadku układów minimalnofazowych między charakterystykami częstotliwościowymi: fazową i amplitudową zachodzą ściśle określone zależności opisane uogólnionym przekształceniem Hilberta [2]:

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda, \quad (1)$$

przy czym:

- $G(\lambda)$ - charakterystyka częstotliwościowa amplitudowa,
- $\varphi(\omega)$ - charakterystyka częstotliwościowa fazowa,
- ω - pulsacja,
- λ - pulsacja będąca zmienną całkowania.

Wzór (1) można przekształcić do postaci wzoru całkowego Bodego [1]:

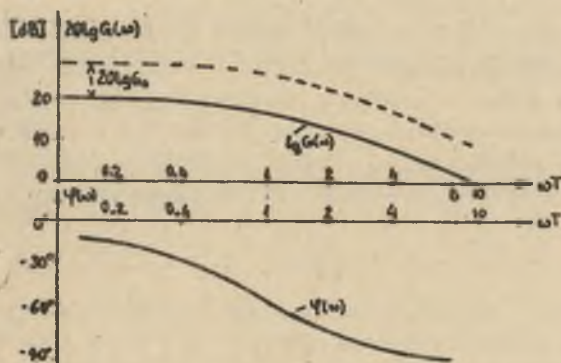
$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda. \quad (2)$$

Można udowodnić szereg twierdzeń o charakterystykach częstotliwościowych: amplitudowych i fazowych [3].

Tw. I. Twierdzenie o przesunięciu ch.cz.ampl. w pionie (rys. 1).

Jeśli $\ln G(\lambda) \hat{=} \varphi(\omega)$ oraz $G_0 > 0$, to:

$$\ln G(\lambda) + \ln G_0 \hat{=} \varphi(\omega) \quad (3)$$



Rys. 1. Ilustracja Tw. I o przesunięciu ch.cz.ampl. w pionie

D o w ó d: Dla dowodu wykonano przekształcenia wykorzystując wzór (2):

$$\varphi(\omega)^* = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(\lambda) + \ln G_0}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda + \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G_0}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda \quad (4)$$

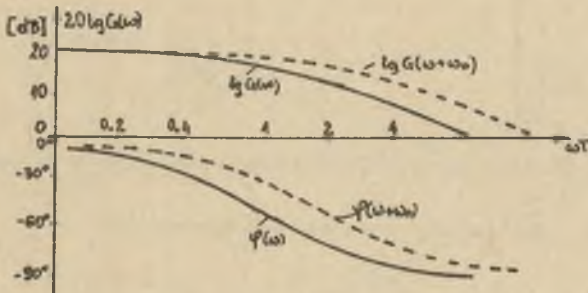
Ponieważ druga całka we wzorze (4) (na podstawie tablic [4]) wynosi zero, więc:

$$\varphi^*(\omega) = \varphi(\omega).$$

Tw. II. Twierdzenie o przesunięciu ch.cz.ampl. w dziedzinie częstotliwości (rys. 2).

Jeśli $\ln G(\lambda) \hat{=} \varphi(\omega)$ oraz $\omega_0 \geq 0$, to:

$$\ln G(\lambda + \omega_0) \hat{=} \varphi(\omega_0 + \omega). \quad (5)$$



Rys. 2. Ilustracja Tw. II o przesunięciu ch.cz.ampl. w dziedzinie częstotliwości

D o w ó d: Dla dowodu wykonano przekształcenie wzoru (1):

$$\varphi^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(\lambda + \omega_0)}{\lambda - \omega} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(\lambda + \omega_0)}{(\lambda + \omega_0) - (\omega + \omega_0)} d\lambda =$$

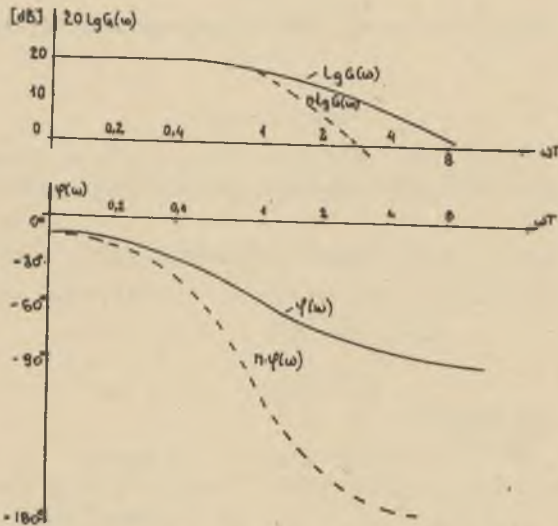
podstawiono $z = \lambda + \omega_0$, $dz = d\lambda$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(z)}{z - (\omega + \omega_0)} dz = \varphi(\omega + \omega_0).$$

Tw. III. Twierdzenie o zmianie współczynnika nachylenia ch.cz.ampl. (rys. 3).

Jeśli $\ln G(\lambda) \doteq \varphi(\omega)$ oraz n - dowolna l. rzeczywista, to:

$$n \ln G(\lambda) \doteq n \varphi(\omega) \quad (6)$$



Rys. 3. Ilustracja Tw. III o zmianie nachylenia ch.cz.ampl.

D o w ó d: Dla dowodu posłużono się wzorem (2):

$$\varphi^*(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{n \ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = n \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = n \varphi(\omega).$$

Tw. IV. Twierdzenie o przeciwności charakterystyki częstotliwościowej amplitudowej (rys. 4).

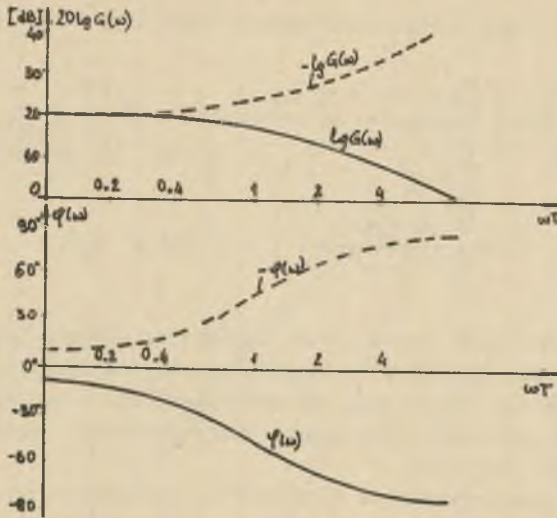
Jeśli $\ln G(\lambda) \doteq \varphi(\omega)$, to:

$$- \ln G(\lambda) = - \varphi(\omega). \quad (7)$$

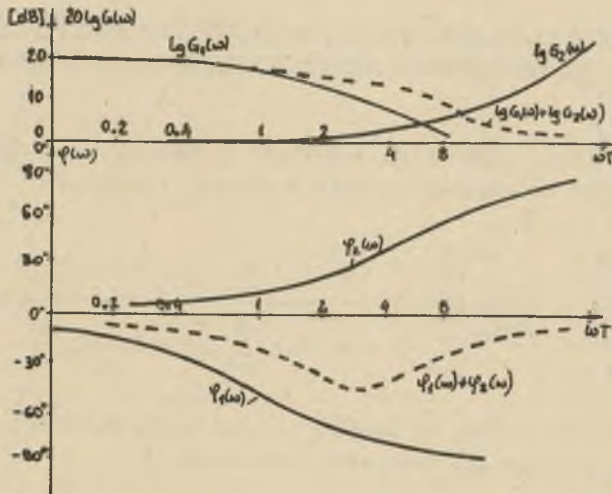
D o w ó d: Dla dowodu wykonano przekształcenia wykorzystując wzór (2):

$$\varphi^*(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-\ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = - \varphi(\omega).$$

Twierdzenie IV jest szczególnym przypadkiem Tw. III.



Rys. 4. Ilustracja Tw. IV o charakterystyce przeciwnej



Rys. 5. Ilustracja Tw. V o superpozycji charakterystyk

Tw. V. Twierdzenie o superpozycji charakterystyk (rys. 5).

Jeśli $\ln G_1(\lambda) \triangleq \varphi_1(\omega)$, $\ln G_2(\lambda) \triangleq \varphi_2(\omega)$, to:

$$\ln G(\lambda) = \ln G_1(\lambda) + \ln G_2(\lambda) \triangleq \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega). \quad (8)$$

D o w ó d: Dla dowodu wykorzystano wzór (2):

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln G_1(\lambda) + \ln G_2(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda = \frac{2\omega}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \frac{\ln G_1(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\infty} \frac{\ln G_2(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda \right] = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega), \end{aligned}$$

Twierdzenie V jest oczywiste ze względu na warunek liniowości transmitancji widmowych zawarty w założeniach przetworników minimalnofazowych.

Twierdzenia od I do V mogą być wykorzystywane w praktyce przy rozwiązywaniu wielu problemów przy użyciu charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowych i fazowych.

Wnioski z przedstawionych twierdzeń są szczególnie użyteczne w metodzie graficznej wyznaczania ch.cz.faz. na podstawie wykresu ch.cz. amplitudowej, pokazanej w p. 3.

3. Graficzna metoda wyznaczania charakterystyki częstotliwościowej fazowej na podstawie wykresu charakterystyki częstotliwościowej amplitudowej

Transmitancję widmową przetworników spełniających warunek minimalnofazowości można przedstawić ogólnie w postaci iloczynowej:

$$G(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^N} \frac{\prod_{d=1}^D (1 + j\omega T_d)}{\prod_{r=1}^R (1 + j\omega T_r)} \frac{\prod_{l=1}^L [1 + j\omega 2b_l T_l + (j\omega T_l)^2]}{\prod_{m=1}^M [1 + j\omega 2b_m T_m + (j\omega T_m)^2]} \quad (9)$$

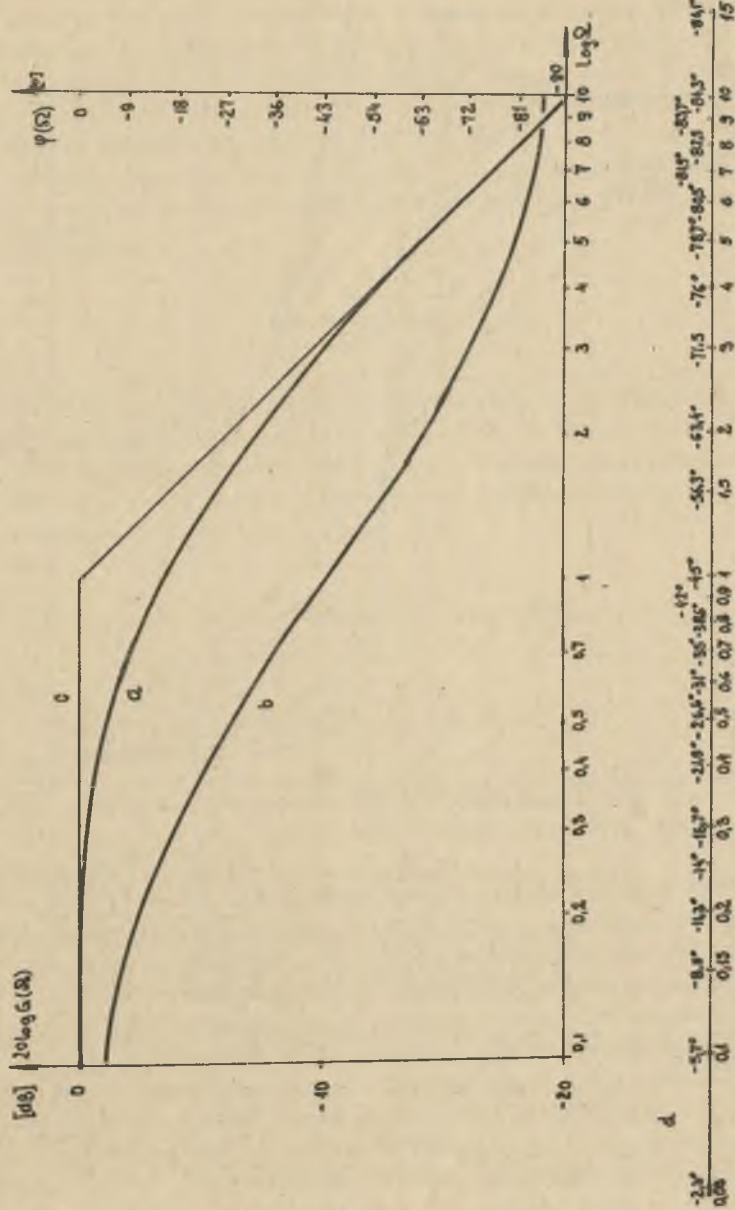
Ze wzoru (9) widać, że dowolną transmitancję widmową można złożyć z (względnie rozłożyć na) kombinacji czynników:

$$\left(\frac{1}{1 + j\Omega} \right)^{\pm 1} \quad (10a)$$

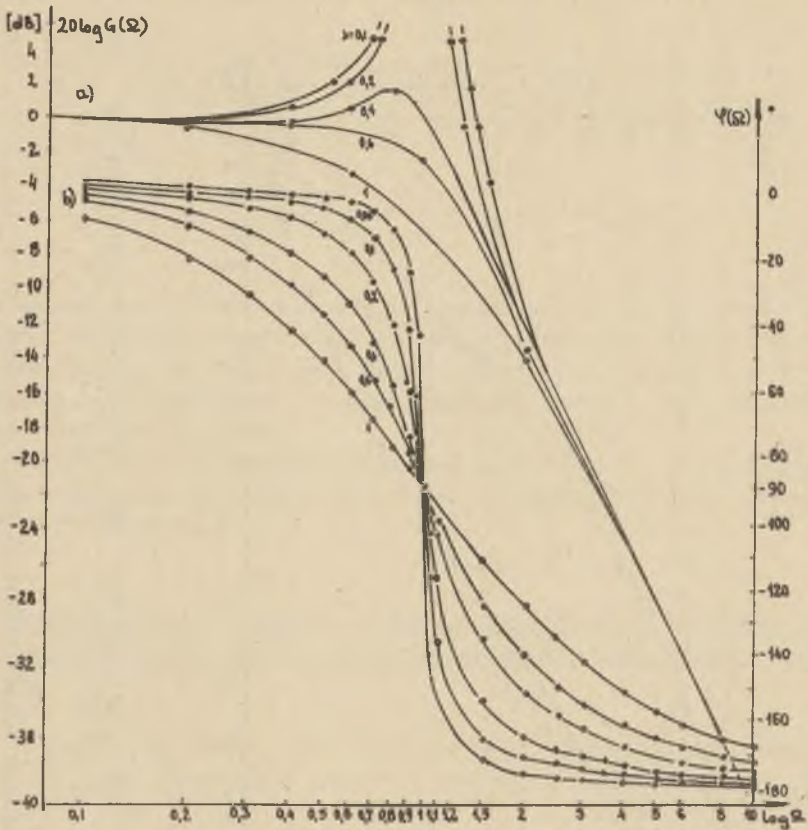
1

$$\left(\frac{1}{1 + j\Omega \frac{1}{2b} + (j\Omega)^2} \right)^{\pm 1} \quad (10b)$$

przy czym: $\Omega = \omega T$ jest częstotliwością bezwymiarową.



Rys. 6. Szablony transmitancji widmowej $(1 + j\Omega)^{-1}$;
 a) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka częstotliwościowa fazowa, c) asymptotyczna charakterystyka amplitudowa, d) nomogram charakterystyki cz. fazowej.



c)

b = 0.05		b = 0.1		b = 0.2		b = 0.4		b = 0.6		b = 1	
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-0.38°	-0.38°	-1.2°	-1.5°	-2.1°	-2.5°	-3.1°	-3.8°	-4.5°	-5.2°	-6.0°	-12.6°
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-0.31°	-1.2°	-2.1°	-2.5°	-3.1°	-3.8°	-4.5°	-5.2°	-6.0°	-6.8°	-7.6°	-14.6°
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-1.1°	-2.8°	-4.8°	-5.8°	-6.8°	-7.8°	-8.8°	-9.8°	-10.8°	-11.8°	-12.8°	-19.8°
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-2.3°	-4.4°	-6.8°	-8.2°	-9.5°	-10.8°	-12.1°	-13.4°	-14.7°	-16.0°	-17.3°	-24.3°
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-3.4°	-7.1°	-11.4°	-14.6°	-17.8°	-21.0°	-24.2°	-27.4°	-30.6°	-33.8°	-37.0°	-44.0°
0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	2
-5.2°	-10.4°	-16.6°	-22.8°	-29.0°	-35.2°	-41.4°	-47.6°	-53.8°	-60.0°	-66.2°	-73.2°

Rys. 7. Szablony transmitancji widmowej $[1 + j\Omega 2b + (j\Omega)^2]^{-1}$

a) logarytmiczna charakterystyka amplitudowa, b) charakterystyka częstotliwościowa fazowa, c) nomogram charakterystyki cz. fazowej dla różnych współczynników tłumienia b

Czynniki (10a) i (10b) można przedstawić wykreślnie na płaszczyźnie Bodego w postaci uniwersalnych szablonów.

Na rys. 6a i b oraz na rys. 7a i b pokazano przykład wykonania szablonów oddzielnie dla logarytmicznej ch.cz.ampl. w dB i oddzielnie dla ch.cz.faz. w funkcji częstotliwości w skali logarytmicznej. Wykresy szablonów dla przypadków wykładników +1 i -1 we wzorach (10a i b) są lustrzany- mi odbiciami względem linii 0 dB i 0°. Na rys. 6d i 7c zamieszczono nomogramy odpowiadające wykresom ch.cz.faz.

Człon $\frac{k}{(j\omega)^N}$ ze wzoru (9) daje stałe przesunięcie fazowe zależne od stopnia wykładnika N:

$$\arg \frac{k}{(j\omega)^N} = -90^\circ N. \quad (11)$$

Na podstawie szablonów względnie nomogramów można skomplikowane wykresy logarytmicznych charakterystyk amplitudowych rozłożyć na człony podstawowe. Wykorzystując przy tym fakt, że zarówno amplitudę w postaci $\log|G(j\omega)|$ jak i kąt fazowy w postaci $\arg G(j\omega)$ poszczególnych członów podstawowych sumuje się:

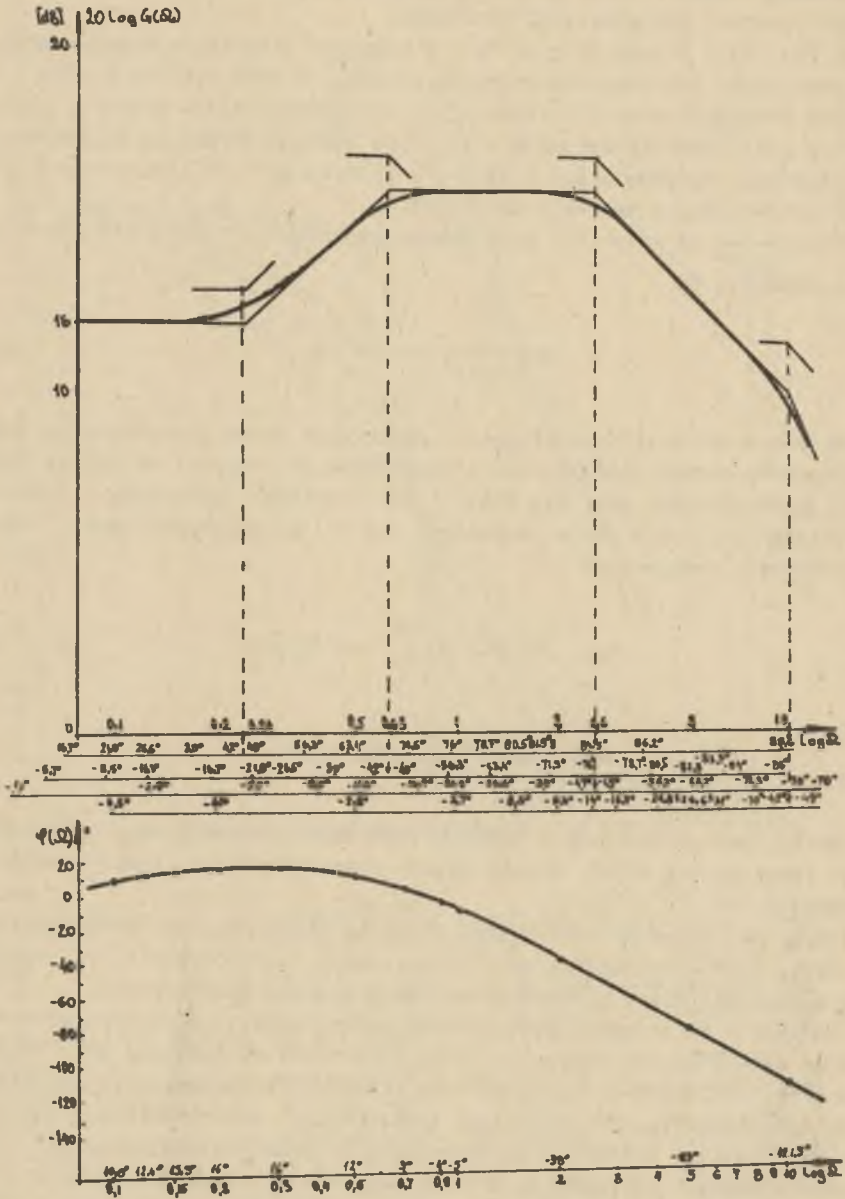
$$\log |G(j\omega)| = \sum_1 \log G_1(j\omega), \quad (12)$$

$$\arg G(j\omega) = \sum_1 \arg G_1(j\omega). \quad (13)$$

Można, przyporządkowując każdemu członowi $\log|G(j\omega)|$ jego odpowiednik kąta fazowego $\arg G(j\omega)$, złożyć wykres charakterystyki częstotliwościowej fazowej.

Czynności manualne metody graficznej są ułatwione, gdy rozpatrywana ch.cz.ampl. jest wykreślona w identycznej skali częstotliwości co szablon lub nomogramy, np. na dwulogarytmicznym papierze milimetrym.

Na rys. 8 zilustrowano proponowaną metodę graficzną przykładem - wyznaczając ch.cz.faz. na podstawie danej wykreślnie ch.cz.ampl. Dla ułatwienia oraz wyeliminowania pomyłek logarytmiczną charakterystykę amplitudową aproksymowano stycznymi uzyskując asymptotyczną charakterystykę amplitudową. Nad punktami załamania charakterystyki umieszczono symbolicznie oznaczenia elementów składowych. Przy składaniu ch.cz.faz. posłużono się nomogramem, którego konstrukcja jest pokazana na rys. 6d. Dokładność metody graficznej zależy od wielu czynników: np. wprawy osoby posługującej się metodą, ilości członów, na które rozłożono ch.cz.ampl., dokładności wykonania szablonów lub nomogramów, dokładności wyrysowania wykresów itp.



Rys. 8. Ilustracja metody graficznej wyznaczania oh.cz.faz. na podstawie ch.cz.ampl.

4. Zakończenie

W rozwiązywaniu zagadnień mających na celu uzyskanie ch.cz.faz. z powodzeniem można powszechnie stosować metodę graficzną z uwzględnieniem treści twierdzeń od I do V.

Pewną niedogodnością metody graficznej jest pracochłonność (widać to z przytoczonego przykładu) oraz problematyczność w precyzyjnym określeniu dokładności.

LITERATURA

- [1] Bode H.W.: Network Analysis and Feedback Amplifier Design, New York 1946.
- [2] Osłowski J.: Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1972.
- [3] Peters J.: Einschwingvorgänge. Gegenkopplung. Stabilität, Springer - Verlag 1954.
- [4] Bizik I.M., Gradsztejn I.S.: Tablicy intygralów, sum, rjadow i pro-izwiedienij, GITTA Moskwa 1951.
- [5] Oppelt W.: Poradnik techniki regulacji, PWNT, Warszawa 1958.
- [6] Takahashi Y., Rabins M.J., Auslander D.M.: Sterowanie i systemy dynamiczne, WNT, Warszawa 1976.

ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФАЗОЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НА ОСНОВАНИИ ЗНАКОМСТВА АМПЛИТУДНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Р е з ю м е

В статье приведены теоремы и их доказательства определяющие свойства фазочастотных и амплитудных частотных характеристик минимально-фазовых объектов. Дано математическое обоснование графического метода и сам метод определения фазочастотных характеристик на основе графика амплитудных частотных характеристик. Метод иллюстрируется примером.

A GRAPHICAL METHOD OF PHASE FREQUENCY CHARACTERISTICS ON THE BASIS OF KNOWN ATTENUATION CHARACTERISTICS

S u m m a r y

The paper presents theorems and their proofs determining properties of phase frequency characteristics and attenuation characteristics for objects of a minimum phase shift type.

A mathematical justification of the graphical for a phase frequency characteristics calculation has been shown on the basis of graphical attenuation characteristics. The method been illustrated exemplarily.