ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ELEKTRYKA z. 62 Nr kol. 573

Jan BRUSKI

Politechnika Śląska
Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej

FUNKCJE ENERGETYCZNE W TEORII LINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. W artykule przedstawiono możliwości zastosowania funkcji energetycznych w teorii liniowych układów elektrycznych. Zdefiniowano funkcje energetyczne układu w postaci operatorowej i wprowadzono uogólnienie twierdzenia Maxwella o minimalnym grzaniu na liniowe układy elektryczne z dowolnymi elementami. Omówiono również własności funkcji energetycznych w stanach granicznych.

Tradycyjne sposoby analizy liniowych układów elektrycznych opierają się na wykorzystaniu I i II prawa Kirchhoffa względnie metod prądów obwodowych (Maxwella) lub potencjałów węzłowych (Coltriego). Metody te stosuje się zarówno dla układów stałoprądowych, zmiennoprądowych jak i pobudzanych w dowolny sposób, tak w stanach ustalonych jak i nieustalonych.

Uzyskanie rozwiązań liniowego układu elektrycznego zaproponować można również inną metodą. Można bowiem wprowadzić pojęcie tzw. operatorowych funkcji energetycznych, odpowiednio: rezystancyjnej, indukcyjnej, pojemnościowej.

$$P(p) = \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{R}_G\ \underline{J}_G(p), \tag{1a}$$

$$T(p) = \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{L}_G\ \underline{J}_G(p), \tag{1b}$$

$$U(p) = \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{S}_G\ \underline{J}_G(p) \tag{1c}$$

Jeżeli w rozpatrywanym układzie nie występują sprzężenia, wówczas macierze $\underline{R}_G$, $\underline{L}_G$, $\underline{S}_G$ w tych zależnościach są diagonalnymi macierzami: rezystancji gałęziowych, indukcyjności gałęziowych oraz odwrotności pojemności gałęziowych.

Jeżeli w układzie istnieją sprzężenia indukcyjne, wtedy macierz $\underline{L}_G$ przestaje być macierzą diagonalną, pozostaje jednak macierzą symetryczną. Wektor $\underline{J}_G(p)$ jest wektorem prądów gałęziowych w postaci operatorowej, a $\underline{J}_{GT}(p)$ jest transpozycją wektora $\underline{J}_G(p)$.

Suma funkcji energetycznej rezystancyjnej oraz indukcyjnej pomnożonej przez operator p i pojemnościowej pomnożonej przez $\frac{1}{p}$ daje w wyniku ogólną funkcję energetyczną układu w postaci operatorowej.

$$F(p) = P(p) + p\,T(p) + \frac{1}{p}\,U(p). \tag{2}$$

Ogólna funkcja energetyczna układu może zostać przedstawiona w postaci:

$$\begin{aligned} F(p) = {} & \underline{J}_{GT}(p)\,\underline{R}_G\,\underline{J}_G(p) + p\,\underline{J}_{GT}(p)\,\underline{L}_G\,\underline{J}_G(p) + \\ & + \frac{1}{p}\,\underline{J}_{GT}(p)\,\underline{S}_G\,\underline{J}_G(p). \end{aligned} \tag{3}$$

Wykorzystując fakt, że macierz impedancji gałęziowych układu można zawsze przedstawić w postaci:

$$\underline{Z}_G(p) = \underline{R}_G + p\,\underline{L}_G + \frac{1}{p}\,\underline{S}_G \tag{4}$$

ogólną funkcję energetyczną można zapisać jako:

$$F(p) = \underline{J}_{GT}(p)\,\underline{Z}_G(p)\,\underline{J}_G(p). \tag{5}$$

Wprowadzając do rozważań strukturalną macierz obwodową $\underline{\Gamma}$ można uzyskać następujące związki:

$$\underline{J}_G(p) = \underline{\Gamma}_T\,\underline{J}(p) \tag{6a}$$

$$\underline{E}(p) = \underline{\Gamma}\,\underline{E}_G(p) \tag{6b}$$

$$\underline{Z}(p) = \underline{\Gamma}\,\underline{Z}_G(p)\,\underline{\Gamma}_T, \tag{7}$$

gdzie $\underline{J}(p)$ jest wektorem prądów obwodowych, $\underline{E}_G(p)$ wektorem sił elektromotorycznych poszczególnych gałęzi, $\underline{E}(p)$ wektorem sił elektromotorycznych działających w utworzonych obwodach, a $\underline{Z}(p)$ jest macierzą impedancji obwodowych.

Macierz strukturalna obwodowa $\underline{\Gamma}$ jest macierzą stopnia $(g - w + 1) \times g$, gdzie g jest liczbą gałęzi a w - liczbą węzłów. Elementy macierzy $\underline{\Gamma}$ są równe +1, -1 lub 0, w zależności od tego, czy dana gałąź znajduje się w rozpatrywanym obwodzie i dodatkowo od tego, czy jej orientacja jest zgodna z przyjętymi wcześniej regułami.

Wykorzystując związki (6) i (7), zależność (5) można przedstawić w postaci:

$$F(p) = \underline{J}_T(p)\ \underline{Z}(p)\ \underline{J}(p) \tag{8}$$

lub odpowiednio:

$$F(p) = \underline{J}_T(p)\ \underline{R}\ \underline{J}(p) + p\ \underline{J}_T(p)\ \underline{L}\ \underline{J}(p) + \\ + \frac{1}{p}\ \underline{J}_T(p)\ \underline{S}\ \underline{J}(p), \tag{9}$$

przy czym oczywiście spełnione są związki:

$$\underline{Z}(p) = \underline{R} + p\ \underline{L} + \frac{1}{p}\ \underline{S}\ , \tag{10}$$

$$P(p) = \underline{J}_T(p)\ \underline{R}\ \underline{J}(p), \tag{11a}$$

$$T(p) = \underline{J}_T(p)\ \underline{L}\ \underline{J}(p), \tag{11b}$$

$$U(p) = \underline{J}_T(p)\ \underline{S}\ \underline{J}(p). \tag{11c}$$

Operatorowe funkcje energetyczne nie mają takiej interpretacji energetycznej, jak jest to w przypadku układów elektrycznych w stanie ustalonym, zasilanych napięciami stałymi lub sinusoidalnie zmiennymi.

Podobnie jednak jak w tamtych przypadkach funkcje te są formami kwadratowymi o macierzach dodatnio półokreślonych. Wartości więc tych funkcji dla każdego p są rzeczywiste nieujemne, czyli:

$$P(p) > 0 \tag{12a}$$

$$T(p) > 0 \tag{12b}$$

$$U(p) > 0 \tag{12c}$$

$$F(p) > 0 \tag{12d}$$

Wprowadzenie operatorowych funkcji energetycznych pozwala na uogólnienie twierdzenia Maxwella o minimalnym grzaniu na liniowe układy elektryczne z dowolnymi elementami:

"W liniowym układzie elektrycznym, rozpatrywanym w dowolnym momencie czasu, ogólna operatorowa funkcja energetyczna, pomniejszona o podwojoną wartość sumy iloczynów prądów gałęziowych w postaci operatorowej, działających w gałęziach układu elektrycznego:

$$\Phi(p) = F(p) - 2\,\underline{J}_{GT}(p)\,\underline{E}_G(p) \tag{13}$$

przyjmuje wartość minimalną przy takim rozpływie prądów gałęziowych, że spełnione są prawa Kirchhoffa".

Korzystając ze związków (6a) i (6b) zależność (13) można przekształcić do postaci:

$$\Phi(p) = F(p) - 2\,\underline{J}_T(p)\,\underline{E}(p). \tag{13a}$$

Warunkiem ekstremum jest, aby pierwsze pochodne funkcji $\Phi(p)$ względem prądów obwodowych były równe zeru, czyli:

$$\underline{\nabla}_J\ \Phi(p) = \underline{0}. \tag{14}$$

Ponieważ ogólna funkcja energetyczna może być przedstawiona w postaci rezystancyjnej funkcji energetycznej oraz indukcyjnej i pojemnościowej funkcji energetycznych pomnożonych przez p oraz $\frac{1}{p}$, a składniki te są formami kwadratowymi o macierzach symetrycznych ze współczynnikami rzeczywistymi, można w związku z tym napisać:

$$\underline{\nabla}_J\ \Phi(p) = 2\Big[\underline{R}\,\underline{J}(p) + p\,\underline{L}\,\underline{J}(p) + \frac{1}{p}\,\underline{S}\,\underline{J}(p) - \underline{E}(p)\Big] = \underline{0} \tag{15}$$

lub wykorzystując zależność (10):

$$\underline{\nabla}_J\ \Phi(p) = 2\big[\underline{Z}(p)\,\underline{J}(p) - \underline{E}(p)\big] = \underline{0}. \tag{16}$$

Ostatnio uzyskany związek jest jednoznaczny z równaniami obwodowymi Maxwella, a stąd wynika również spełnienie praw Kirchhoffa. Z podanych wyżej własności funkcji F(p) oraz postaci funkcji $\Phi(p)$ wynika dodatkowo, że otrzymane rozwiązanie jest jedyne.

Stwarza to możliwość otrzymania rozwiązań liniowych układów elektrycznych w stanie nieustalonym w sposób następujący: Określa się macierze $\underline{R}$, $\underline{L}$, $\underline{S}$:

$$\underline{R} = \underline{\Gamma}\,\underline{R}_G\,\underline{\Gamma}_T, \tag{17a}$$

$$\underline{L} = \Gamma \underline{L}_G \Gamma_T, \tag{17b}$$

$$\underline{S} = \Gamma \underline{S}_G \Gamma_T. \tag{17c}$$

Następnie tworzy się funkcje energetyczne zgodnie z zależnościami (11) i (2) a wreszcie funkcję $\Phi(p)$, zgodnie z (13a). Na koniec wyznacza się funkcje prądów obwodowych, poprzez znalezienie ekstremum funkcji $\Phi(p)$. Mając określone prądy obwodowe można już łatwo znaleźć prądy i napięcia gałęziowe, najpierw w postaci operatorowej a następnie dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a - Carsona uzyskać odpowiednie wielkości w formie czasowej.

Zaproponowana metoda może być szczególnie przydatna do bezpośredniego numerycznego uzyskiwania oryginałów funkcji prądów i napięć w układach elektrycznych na podstawie danych funkcji w formie operatorowej.

Operatorowe funkcje energetyczne zdefiniowane w podany sposób posiadają pewne ciekawe własności dotyczące ich wartości granicznych.

Moc czynna wydzielana na elementach rezystancyjnych układu elektrycznego w chwili t = 0 oraz w stanie ustalonym, czyli dla $t \to \infty$ jest równa wartościom granicznym rezystancyjnej funkcji energetycznej odpowiednio przy $p \to \infty$ i $p \to 0$.

$$P_{RO} = \lim_{t \to 0+} \left\{ \underline{J}_{GT}(t) \, \underline{R}_G \, \underline{J}_G(t) \right\} = \lim_{p \to \infty} \left\{ P(p) \right\} \tag{18a}$$

$$P_{R\infty} = \lim_{t \to \infty} \left\{ \underline{J}_{GT}(t) \, \underline{R}_G \, \underline{J}_G(t) \right\} = \lim_{p \to 0+} \left\{ P(p) \right\} \tag{18b}$$

Moc dostarczona elementom indukcyjnym układu w stanach granicznych jest równa wartościom granicznym indukcyjnej funkcji energetycznej pomnożonej przez p, natomiast w tych samych stanach moc pobierana przez elementy pojemnościowe jest równa wartościom granicznym pojemnościowej funkcji energetycznej dzielonej przez p:

$$P_{LO} = \lim_{t \to 0+} \left\{ \underline{J}_{GT}(t) \, \underline{L}_G \frac{d}{dt} \underline{J}_G(t) \right\} = \lim_{p \to \infty} \left\{ p \; T(p) \right\} \tag{19a}$$

$$P_{L\infty} = \lim_{t \to \infty} \left\{ \underline{J}_{GT}(t) \, \underline{L}_G \frac{d}{dt} \underline{J}_G(t) \right\} = \lim_{p \to 0+} \left\{ p \; T(p) \right\} \tag{19b}$$

$$P_{C0} = \lim_{t \to 0+} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{S}_G \int_0^t \underline{J}_G(\tau)\, d\tau \right\} = \lim_{p \to \infty} \left\{ \frac{1}{p}\, U(p) \right\} \tag{20a}$$

$$P_{C\infty} = \lim_{t \to \infty} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{S}_G \int_0^t \underline{J}_G(\tau)\, d\tau \right\} = \lim_{p \to 0+} \left\{ \frac{1}{p}\, U(p) \right\} \tag{20b}$$

Własności te będą oczywiście istniały w przypadku spełnienia ogólnych warunków dotyczących wartości granicznych zależności czasowych i ich transformat.

Podobne własności posiada ogólna funkcja energetyczna. Całkowita moc dostarczona do układu przez wszystkie źródła napięciowe w chwili początkowej oraz w stanie ustalonym jest równa wartościom granicznym ogólnej operatorowej funkcji energetycznej:

$$P_{Z0} = \lim_{t \to 0+} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{E}_G(t) \right\} = \lim_{p \to \infty} \left\{ F(p) \right\} \tag{21a}$$

$$P_{Z\infty} = \lim_{t \to \infty} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{E}_G(t) \right\} = \lim_{p \to 0+} \left\{ F(p) \right\} \tag{21b}$$

W analogiczny sposób jak dla mocy, określić można związki między wartościami energii elementów indukcyjnych i pojemnościowych w stanach granicznych a wartościami funkcji energetycznych w takich stanach.

$$\begin{aligned} W_{L0} &= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0+} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{L}_G\ \underline{J}_G(t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \left\{ T(p) \right\} \end{aligned} \tag{22a}$$

$$\begin{aligned} W_{L\infty} &= \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} \left\{ \underline{J}_{GT}(t)\ \underline{L}_G\ \underline{J}_G(t) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \to 0+} \left\{ T(p) \right\} \end{aligned} \tag{22b}$$

$$\begin{aligned} W_{C0} &= \frac{1}{2} \lim_{t \to 0+} \left\{ \int_0^t \underline{J}_{GT}(\tau)\, d\tau\ \ \underline{S}_G \int_0^t \underline{J}_G(\tau)\, d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \to \infty} \left\{ \frac{1}{p^2}\, U(p) \right\} \end{aligned} \tag{23a}$$

$$W_{C\infty} = \frac{1}{2} \lim_{t \to \infty} \left\{ \int_0^t \underline{J}_{GT}(\tau)\, d\tau \;\; \underline{S}_G \int_0^t \underline{J}_G(\tau)\, d\tau \right\} = \tag{23b}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{p \to 0+} \left\{ \frac{1}{p^2} U(p) \right\}$$

Zależności te, w przypadku posługiwania się operatorowymi funkcjami energetycznymi, pozwalają na wykorzystanie zasady zachowania energii. Może to mieć znaczenie wtedy, gdy rozpatruje się układy elektryczne z niezerowanymi warunkami początkowymi.

W takich wypadkach ogólna operatorowa funkcja energetyczna określona jest jak poprzednio zależnością (2), natomiast forma podlegająca minimalizacji przybiera wtedy postać:

$$\Phi(p) = F(p) - 2\, \underline{J}_T(p) \left[\underline{E}(p) + \underline{U}_0(p) \right]. \tag{24}$$

$\underline{U}_0(p)$ określa się jako wektor napięć obwodowych wynikających z faktu istnienia w chwili początkowej napięć na elementach pojemnościowych układu oraz prądów płynących w tym momencie przez elementy indukcyjne.

LITERATURA

[1] Balabanian N., Bickart T.A.: Electrical Network Theory. John Wiley & Sons, New York 1968.

[2] Stern T.E.: Theory of Nonlinear Networks and Systems. Addison-Wesley, Massachusetts 1965.

[3] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego. PWN, Warszawa 1972.

[4] Millar W.: Some General Theorems for Non - Linear Systems Possesing Resistance.

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ В ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье показаны возможности применения энергетических функций к теории линейных электрических систем. Определены энергетические функции системы в операторном виде и введено обобщение теоремы Максвелла о минимальном рассеянии энергии, на линейные электрические системы с любыми элементами. Рассмотрены свойства энергетических функций в предельных состояниях.

ENERGETIC FUNCTIONS IN THE THEORY OF LINEAR ELECTRIC CIRCUITS

S u m m a r y

Some possible applications of energetic functions in the theory of linear electric circuits have been discussed. An operator form of a circuit's energetic function has been defined and the Maxwell theorem of minimum energy dissipation in electric circuits with arbitrary elements has been introduced in a generalised form. Some prepertie s of energetic functions in border conditions have been also shown.