ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1978

Seria: ELEKTRYKA z. 62 Nr kol. 573

Jan BRUSKI

Politechnika Śląska
Ośrodek Elektronicznej Techniki Obliczeniowej

WYKORZYSTANIE FUNKCJI ENERGETYCZNYCH DO ANALIZY LINIOWYCH UKŁADÓW ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. Artykuł zawiera omówienie możliwości wykorzystania funkcji energetycznych w analizie liniowych układów elektrycznych. Przedstawiono w nim dwa równoważne sposoby uzyskiwania równań analizy na podstawie funkcji energetycznych układu w postaci operatorowej.

Podstawą analizy układów elektrycznych jest stworzenie matematycznego opisu tych układów. W tym celu wykorzystuje się zwykle I i II prawo Kirchhoffa oraz związki topologiczne oparte najczęściej na teorii grafów, umożliwiające zapis równań wyjściowych analizy.

Wyłączając z ogólnego opisu te gałęzie, które zawierają idealne źródła prądowe I(t), zależność wyrażającą I prawo Kirchhoffa można zapisać w formie związku:

$$\Delta \underline{J}_G(t) + \Delta_I \underline{I}(t) = \underline{0}. \tag{1}$$

Natomiast równanie wyrażające II prawo Kirchhoffa w formie macierzowej przyjmuje postać:

$$\Gamma \underline{U}_G(t) = \underline{0}. \tag{2}$$

Składowe wektorów $\underline{J}_G(t)$ oraz $\underline{U}_G(t)$ stanowią odpowiednio prądy gałęziowe i napięcia poszczególnych gałęzi. Wektor $\underline{I}(t)$ zawiera wartości sił prądomotorycznych w układzie, a Δ_I jest macierzą strukturalną określającą usytuowanie w układzie źródeł prądowych. Macierz Δ jest macierzą strukturalną węzłową stopnia $(w - 1) \times g$, natomiast Γ jest macierzą strukturalną obwodową stopnia $(g - w + 1) \times g$, gdzie g jest liczbą gałęzi, w - liczbą węzłów układu. Elementy macierzy strukturalnych są równe +1, -1 lub 0, w zależności od tego, czy dana gałąź łączy się z rozpatrywanym węzłem lub znajduje się w rozpatrywanym obwodzie i dodatkowo od tego, czy jej zwrot jest zgodny z przyjętymi wcześniej zasadami.

Zbudowanie macierzy strukturalnej węzłowej $\underline{\Delta}$ nie nastręcza żadnych trudności; zbudowanie natomiast macierzy obwodowej $\underline{\Gamma}$ może dostarczyć wielu kłopotów. Aby uniknąć potrzeby tworzenia macierzy $\underline{\Gamma}$ dla układów liniowych można zaproponować metodę analizy opartą o wykorzystanie funkcji energetycznych w postaci operatorowej.

Ogólna funkcja energetyczna układu elektrycznego w postaci operatorowej posiada następującą postać:

$$F(p) = \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{Z}_G(p)\ \underline{J}_G(p). \tag{3}$$

Macierz $\underline{Z}_G(p)$ jest diagonalną macierzą impedancji gałęziowych w przypadku gdy w układzie nie występują sprzężenia lub macierzą symetryczną - w przypadku istnienia sprzężeń.

Określamy obecnie następującą formę $\Phi(p)$:

$$\Phi(p) = F(p) - 2\ \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{E}_G(p) \tag{4}$$

w której $\underline{E}_G(p)$ jest wektorem gałęziowych sił elektromotorycznych w postaci operatorowej.

Zgodnie z uogólnionym twierdzeniem Maxwella o minimalnym grzaniu, forma $\Phi(p)$ przyjmuje wartość minimalną przy takim rozpływie prądów gałęziowych, że spełnione są prawa Kirchhoffa. Zagadnienie to można rozpatrywać jako problem minimalizacji funkcji w obecności ograniczeń, co pozwala zastosować metodę mnożników Lagrange'a i minimalizować funkcję $Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda})$ określoną następująco:

$$\begin{gathered} Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda}) = F(p) - 2\ \underline{J}_{GT}(p)\ \underline{E}_G(p) + \\ + 2\ \underline{\lambda}_T(p)\ \left[\underline{\Delta}\ \underline{J}_G(p) + \underline{\Delta}_I\ \underline{I}(p)\right]. \end{gathered} \tag{5}$$

Warunkiem ekstremum jest, aby pierwsze pochodne funkcji $Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda})$ względem składowych wektora $\underline{J}_G$ oraz składowych wektora $\underline{\lambda}$ były równe zeru, czyli:

$$\underline{\nabla} Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda}) = \underline{0}. \tag{6}$$

Obliczając pochodne funkcji $Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda})$ i przyrównując je do zera otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_G(p) & \underline{\Delta}_T \\ \underline{\Delta} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_G(p) \\ \underline{\lambda}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_G(p) \\ -\underline{\Delta}_I\ \underline{I}(p) \end{bmatrix} \tag{7}$$

Zakładając, że rozpatrywany układ nie zawiera gałęzi o impedancji równej zeru, można łatwo sprawdzić, że istnieje zawsze macierz odwrotna do macierzy $\underline{Z}_G(p)$. Dzięki temu otrzymany układ równań (7) pozwala na obliczenie wektorów $\underline{J}_G(p)$ i $\underline{\lambda}(p)$:

$$\underline{\lambda}(p) = (\underline{\Delta}\ \underline{Z}_G^{-1}(p)\ \underline{\Delta}_T)^{-1}\ [\underline{\Delta}\ \underline{Z}_G^{-1}(p)\ \underline{E}_G(p) + \underline{\Delta}_I\ \underline{I}(p)] \tag{8}$$

$$\underline{J}_G(p) = \underline{Z}_G^{-1}(p)\Big\{\underline{E}_G(p) - \underline{\Delta}_T\ (\underline{\Delta}\ \underline{Z}_G^{-1}(p)\ \underline{\Delta}_T)^{-1} \cdot [\underline{\Delta}\ \underline{Z}_G^{-1}(p)\ \underline{E}_G(p) + \underline{\Delta}_I\ \underline{I}(p)]\Big\} \tag{9}$$

Chcąc wyznaczyć dalej napięcia poszczególnych gałęzi wystarczy skorzystać ze związku:

$$\underline{U}_G(p) = \underline{E}_G(p) - \underline{Z}_G(p)\ \underline{J}_G(p) \tag{10}$$

Wyznaczenie wektora $\underline{\lambda}(p)$ nie jest konieczne, można jednak zauważyć, że składowe tego wektora stanowią napięcia pomiędzy poszczególnymi węzłami a węzłem przyjętym jako węzeł odniesienia. Znając składowe wektora $\underline{\lambda}(p)$ wartości napięć gałęziowych można więc wyznaczyć w inny sposób, korzystając z zależności:

$$\underline{U}_G(p) = \underline{\Delta}_T\ \underline{\lambda}(p). \tag{11}$$

Mając wyznaczone wektory $\underline{J}_G(p)$, $\underline{U}_G(p)$ w postaci operatorowej, dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a - Carsona tych wektorów otrzymujemy zależności czasowe prądów i napięć gałęziowych, co stanowi wynik analizy.

Przedstawiony sposób analizy liniowych układów elektrycznych nie wymaga tworzenia strukturalnej macierzy obwodowej; w obliczeniach wykorzystuje się wyłącznie macierz strukturalną węzłową, którą tworzy się bardzo łatwo na podstawie topologii układu. W trakcie obliczeń występuje potrzeba dwukrotnego odwracania macierzy. Obliczenie macierzy $\underline{Z}_G^{-1}(p)$ jest jednak bardzo proste szczególnie wtedy, gdy w układzie nie występują sprzężenia. Jest to bowiem macierz diagonalna o elementach będących odwrotnościami elementów macierzy $\underline{Z}_G(p)$. Pewien kłopot może sprawić tylko odwracanie macierzy $(\underline{\Delta}\ \underline{Z}_G^{-1}(p)\ \underline{\Delta}_T)$, lecz stopień jej jest równy liczbie niezależnych węzłów, a więc zwykle znacznie mniejszy niż liczba gałęzi układu.

Przedstawiony sposób analizy może stać się obliczeniowo jeszcze prostszy, jeżeli potrafimy wyznaczyć drzewo grafu układu. Załóżmy przy tym, że w skład drzewa wejdą wszystkie gałęzie zawierające idealne siły elektromotoryczne, których impedancje są równe zeru. Ponumerujemy wszystkie gałęzie układu kolejnymi liczbami naturalnymi, tak aby najniższe numery miały gałęzie o impedancjach równych zeru, dalsze numery - pozostałe gałęzie drzewa i wreszcie końcowe - gałęzie nie wchodzące w skład drzewa grafu. Gałęzie zawierające idealne źródła prądowe wyłączmy jak poprzednio z ogólnego spisu gałęzi i traktujmy je niezależnie. Przy takim podejściu wektor prądów gałęziowych można przedstawić w postaci:

$$\underline{J}_G(p) = \begin{bmatrix} \underline{J}_{G1}(p) \\ \\ \underline{J}_{G2}(p) \end{bmatrix} \tag{12}$$

gdzie $\underline{J}_{G1}$ jest wektorem prądów gałęzi drzewa a $\underline{J}_{G2}$ - wektorem prądów cięciw grafu układu.

Topologia rozpatrywanego układu określona jest przez strukturalną macierz węzłową, którą można przedstawić następująco:

$$\underline{\Delta} = [\underline{\Delta}_1 \ \ \underline{\Delta}_2] \tag{13}$$

oraz przez macierz $\underline{\Delta}_I$, określającą usytuowanie idealnych źródeł prądowych w układzie.

Podobnie jak poprzednio określić można ogólną funkcję energetyczną układu w postaci operatorowej oraz funkcję $Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda})$ będącą przedmiotem minimalizacji.

$$\begin{aligned} Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda}) &= \underline{J}_{GT}(p)\,\underline{Z}_G(p)\,\underline{J}_G(p) - 2\,\underline{J}_{GT}(p)\,\underline{E}_G(p) + \\ &+ 2\,\underline{\lambda}_T(p)\left[\underline{\Delta}\,\underline{J}_G(p) + \underline{\Delta}_I\,\underline{I}(p)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Obliczając pochodne funkcji $Q(\underline{J}_G, \underline{\lambda})$ względem składowych wektorów $\underline{J}_G(p)$ oraz $\underline{\lambda}(p)$, przyrównując je do zera i wykorzystując wzory (12) i (13) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{G1}(p) & \underline{0} & \underline{\Delta}_{1T} \\ \underline{0} & \underline{Z}_{G2}(p) & \underline{\Delta}_{2T} \\ \underline{\Delta}_1 & \underline{\Delta}_2 & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_{G1}(p) \\ \underline{J}_{G2}(p) \\ \underline{\lambda}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{E}_{G1}(p) \\ \underline{E}_{G2}(p) \\ -\underline{\Delta}_I\,\underline{I}(p) \end{bmatrix} \tag{15}$$

Jeżeli macierz Δ została zbudowana poprawnie, wówczas macierz Δ_1 jest macierzą kwadratową i zawsze nieosobliwą. Wykorzystując ten fakt, z układu równań (15) można wyznaczyć wektory $\underline{J}_{G1}$, $\underline{J}_{G2}$, $\underline{\lambda}$:

$$\underline{J}_{G2}(p) = \left\{ \left[-\Delta_{2T}\Delta_{1T}^{-1} \quad \underline{1} \right] \begin{bmatrix} \underline{Z}_{G1}(p) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{Z}_{G2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta_1^{-1} & \Delta_2 \\ & \underline{1} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \left\{ \left[-\Delta_{2T}\Delta_{1T}^{-1} \quad \underline{1} \right] \begin{bmatrix} \underline{E}_{G1}(p) \\ \underline{E}_{G2}(p) \end{bmatrix} - \Delta_{2T}\Delta_{1T}^{-1}\underline{Z}_{G1}(p)\,\Delta_1^{-1}\,\Delta_I\,\underline{I}(p) \right\} \tag{16}$$

$$\underline{J}_{G1}(p) = -\Delta_1^{-1}\,\Delta_2\,\underline{J}_{G2}(p) - \Delta_1^{-1}\,\Delta_I\,\underline{I}(p) \tag{17}$$

$$\underline{\lambda}(p) = \Delta_{1T}^{-1}\,\underline{E}_{G1}(p) - \Delta_{1T}^{-1}\,\underline{Z}_{G1}(p)\,\underline{J}_{G1}(p). \tag{18}$$

Zauważmy, że wykorzystując związek (18) z układu równań (15) uzyskać można następującą zależność:

$$\underline{Z}_{G2}(p)\,\underline{J}_{G2}(p) + \Delta_{2T}\,\Delta_{1T}^{-1}\,\underline{E}_{G1}(p) - \Delta_{2T}\,\Delta_{1T}^{-1}\,\underline{Z}_{G1}(p)\,\underline{J}_{G1}(p) = \underline{E}_{G2}(p), \tag{19}$$

którą przekształcić można do postaci:

$$\left[-\Delta_{2T}\Delta_{1T}^{-1} \quad \underline{1} \right] \begin{bmatrix} \underline{Z}_{G1}(p) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{Z}_{G2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{J}_{G1}(p) \\ \underline{J}_{G2}(p) \end{bmatrix} = \left[-\Delta_{2T}\Delta_{1T}^{-1} \quad \underline{1} \right] \begin{bmatrix} \underline{E}_{G1}(p) \\ \underline{E}_{G2}(p) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Oznaczając:

$$\underline{\Gamma} = \left[-\underline{\Delta}_{2T}\underline{\Delta}_{1T}^{-1}\ \underline{1}\right] \tag{21}$$

otrzymamy dalej:

$$\underline{\Gamma}\left[\underline{Z}_G(p)\ \underline{J}_G(p) - \underline{E}_G(p)\right] = \underline{0}. \tag{22}$$

Zależność (22) jest identyczna ze związkiem (2) wyrażającym II prawo Kirchhoffa dla rozpatrywanego układu elektrycznego. Można również sprawdzić, że zachodzą równości:

$$\underline{\Delta}\,\underline{\Gamma}_T = \underline{0}, \tag{23}$$

$$\underline{\Gamma}\,\underline{\Delta}_T = \underline{0}. \tag{24}$$

Wynika stąd, że macierz $\underline{\Gamma}$, określona zależnością (21), jest macierzą strukturalną obwodową rozpatrywanego układu. Wyznaczenie macierzy $\underline{\Gamma}$ w podany sposób nie nastręcza żadnych trudności i wymaga jedynie określenia macierzy $\underline{\Delta}_1$ i $\underline{\Delta}_2$ oraz odwrócenia macierzy $\underline{\Delta}_1$, co ze względu na budowę tej macierzy jest czynnością bardzo prostą.

LITERATURA

[1] Calahan D.A.: Computer Aided Network Design. Mc Graw - Hill Book Company, New York 1968.

[2] Balabanian N., Bickart T.A.: Electrical Network Theory. John Wiley & Sons, New York 1969.

[3] Stern T.E.: Theory of Nonlinear Networks and Systems. Addison-Wesley, Massachusetts 1965.

[4] Ilin W.N.: Projektowanie układów elektronicznych przy użyciu maszyn cyfrowych, WNT, Warszawa 1975.

[5] Osiowski J.: Zarys rachunku operatorowego, WNT, Warszawa 1972.

[6] Chojcan J.: Zastosowanie programowania matematycznego do analizy obwodów nieliniowych. Praca doktorska. Politechnika Śląska, Gliwice.

ПРИМЕНЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
К АНАЛИЗУ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Р е з ю м е

В статье рассмотрена возможность использования энергетических функций к анализу линейных электрических систем. Представлены два эквивалентные метода получения уравнений анализа на основе энергетических функций системы в операторном виде.

APPLICATION OF ENERGETIC FUNCTIONS TO ANALYSE ELECTRIC CIRCUITS

S u m m a r y

Some application possibilities of energetic functions in analysing electric circuits have been described.

Two equivalent methods have been presented to obtain analysis equations by using the operator form of the energetic functions.