

Zbigniew Budzianowski

Nieliniowy rozkład naprężeń w belkach żelbetowych

1. Wstęp

Ustalenie zależności między naprężeniami i odkształceniami materiału, z którego konstrukcja jest wykonana, ma podstawowe znaczenie dla teorii konstrukcji.

Niemal wszystkie usankcjonowane przez praktykę inżynierską zasady i prawa mechaniki budowli opierają się na liniowym związku obu wielkości, wyrażonym przez prawo Hooke'a, względnie na bardziej złożonym, choć również wyidealizowanym modelu ciała elastoplastycznego. W rzeczywistości jednak znaczna ilość materiałów budowlanych wykazuje mniejsze lub większe odstępstwa od liniowej sprężystości, zwłaszcza w obszarze średnich i dużych odkształceń. Odstępstwa te ilustrują najlepiej wykresy ε , σ wyznaczone dla osiowego stanu naprężeń. Wielkość ich uzależniona jest od struktury badanego materiału.

Z tego też powodu ten typ nieliniowej sprężystości określa się mianem nieliniowości fizycznej w odróżnieniu od nieliniowości geometrycznej powstającej przy pewnych tylko układach ciał liniowo sprężystych i sił nań działających¹. Istnieje również możliwość wspólnego wystąpienia obu typów nieliniowości. Ma się wtedy do czynienia z bardzo już skomplikowanym zagadnieniem nieliniowości fizyko-geometrycznej.

Typowym przykładem materiału budowlanego wykazującego wyraźne odstępstwa od prawa Hooke'a jest beton. Liczne badania zmierzające do ustalenia zależności między naprężeniami i wywołanymi przez nie odkształceniami pozwoliły na sformułowanie pewnych funkcji, które jednak zachowują swą ważność tylko dla elementów poddanych działaniu sił osiowych.

Ustalenie rozkładu naprężeń w przekroju belki zginanej może nastąpić jedynie na drodze hipotetycznych założeń. Przyjmując bowiem nawet, że liniowy rozkład odkształceń (hipoteza Bernoulliego) z uwagi na potwierdzenie go wieloma doświadczeniami jest możliwy do przyjęcia,

¹ Jerzy Nowiński, Waclaw Olszak, *Podstawy teorii ciał sprężystych fizycznie nieliniowych*, referat wygłoszony w PAN w 1953 r.

stajemy wobec trudności podporządkowania tym odkształceniom¹ funkcji naprężeń.

Stosowane często bezpośrednie przeniesienia zależności ε , σ właściwej dla osiowego działania sił do teorii belki zginanej nie może być w przypadku betonu słuszne. Wskazuje na to stwierdzony doświadczalnie fakt, iż skrajne włókna belki w strefie ściskanej doznają w chwili złamania znacznie większych odkształceń jednostkowych niż wykonany z tego samego betonu słup poddany zginaniu¹:

$$\varepsilon_{bs} \geq 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot R_s \quad (1a)$$

$$\varepsilon_{bB} \geq 25 \cdot 10^{-6} \cdot R_s \quad (1b)$$

Otrzymane ze wzoru 1b wartości są często w literaturze technicznej poddawane w wątpliwość dla $R_s = 250$ ($\varepsilon_{bB} \geq 6\%$). Mimo to zestawienie obu wzorów interesuje nas w sensie ogólnym. Drugą niewiadomą utrudniającą trafny wybór krzywej rozkładu naprężeń w belkach zginanych jest miarodajna wytrzymałość betonu na ciśnienie przy zginaniu. Odnosnie do tej wielkości istnieje szereg rozbieżnych poglądów. Podawane w literaturze wartości wahają się na ogół między wytrzymałościami słupowymi i walcowymi. Przyjęcie wytrzymałości walcowej jako miarodajnej jest krytykowane, gdyż w belkach zginanych odpada korzystny dla wytrzymałości przy ściskaniu próbek walcowych wpływ tarcia w płaszczyźnie płyt prasy.

Niemniej jednak stężenia poprzeczne belek w budowlach żelbetowych, zmniejszając możliwości ich odkształceń poprzecznych przy zginaniu, działają w sposób podobny. Z kolei przeciwko przyjęciu wytrzymałości słupowej przemawia znowu fakt, że beton w strefie ściskanej przekroju belki zginanej jest nierównomiernie obciążony. Na skutek tego poddane ciśnieniom krytycznym warstwy skrajne dzięki sąsiedztwu warstw słabiej obciążonych pracują w lepszych warunkach niż przekrój poddany działaniu równomiernie rozłożonych ciśnień w słupie osiowo ściskanym. Tym też można tłumaczyć różnicę odkształceń jednostkowych (równ. 1a, b). Ustalenie miarodajnej wytrzymałości betonu na ściskanie przy zginaniu przez pomiar odkształceń jest niemożliwe, gdyż, jak wyżej podano, nie znamy dla tego przypadku dokładnie zależności między wartościami ε , σ .

Jedynie bezpośredni pomiar naprężeń za pomocą odpowiednio skonstruowanych dynamometrów względnie statycznie wyznaczalnych przekładni mógłby tę sprawę rozwiązać. O ile wiadomo, próby podjęte w tym kierunku nie dały jednak dotychczas pożądanych rezultatów.

¹ Rudolf Saliger, *Nowa teoria żelbetu na podstawie odkształceń plastycznych przy złamaniu*, Warszawa 1952, str. 10.

Normy radzieckie przyjmują, że obliczeniowa wytrzymałość betonu R_m na ściskanie przy zginaniu leży między jego wytrzymałością słupową i kostkową, przy czym dla betonów o niskiej wytrzymałości ($R_m \leq 100 \text{ kg/cm}^2$) osiąga ona wytrzymałość kostkową. Zawsze jednak jest większa od wytrzymałości słupowej ($R_m = 1,25 R_s$)¹. Normy polskie opierając się na normach radzieckich podają wartość obliczeniowej wytrzymałości na ściskanie $R_m = 1,11 R_s$ ².

Jak widać z powyższego, ustalenie kształtu bryły naprężeń jak też jej ekstremalnych wartości napotyka w belkach żelbetowych na poważne trudności. Potęgują się one wybitnie, gdy wprowadzając do zagadnienia wpływ czasu nadajemy mu charakter reologiczny.

Mimo tych trudności teoria momentu łamiącego jest w ujęciu statoplastycznym obecnie dość dokładnie opracowana. Sprzyjającą tu niewątpliwie okolicznością jest potwierdzony doświadczalnie i teoretycznie fakt, że wielkość momentu łamiącego w małym stosunkowo stopniu zależy od wielkości popełnionych błędów w przyjętym rozkładzie naprężeń. Również rozkład naprężeń w strefie ściskanej belki zginanej, przy małych i średnich ich wartościach, da się dość dokładnie odtworzyć za pomocą metody naprężeń liniowych, którą łatwo da się przystosować do rzeczywistości przez odpowiednią korektę liczby n . Kłopotliwe jest natomiast wyznaczenie rozkładu i wielkości naprężeń występujących w przekroju belki żelbetowej w zakresie ich wysokich wartości. Wspomniany poprzednio brak sposobu bezpośredniego wyznaczania naprężeń na drodze doświadczalnej, tzn. sposobu omijającego pomiar stanu odkształcenia a rejestrującego wprost naprężenia, zmusza nas do potraktowania sprawy w sposób hipotetyczny. Polegać to będzie na wysunięciu pewnej ogólnej koncepcji spełniającej znane warunki brzegowe dla małych oraz łamiących naprężeń. Omówieniu tego zagadnienia poświęcony jest niniejszy referat. Przedstawione w nim rozumowanie oparto na prostych założeniach jednowymiarowego stanu naprężeń. Ma ono na celu zbadanie rozkładu naprężeń w belce żelbetowej pracującej w fazie II, przy równoczesnym uwzględnieniu nieliniowej sprężystości betonu w ściskanej strefie przekroju.

Ponadto poruszone zostały marginesowo w referacie problemy podstawowe dla statyki ustrojów wykonanych z materiałów nieliniowo sprężystych. Głównym reprezentantem tych ustrojów są, jak wiadomo, konstrukcje żelbetowe. Z uwagi na powszechne ich zastosowanie w budownictwie staje się obecnie dokładne opracowanie podstaw nowej statyki niemal że konieczne. W przeciwnym bowiem razie popadamy w wyraźną

¹ К. В. Сахновский, *Железобетонные конструкции*, Москва 1951, с. 45.

² B. Bukowski, *Konstrukcje żelbetowe*, Warszawa 1953, str. 17.

kolizję wymiarując przekroje metodą odkształceń plastycznych na momenty obliczone dla założeń właściwych materiałom liniowo sprężystym. Nie jest zresztą wykluczone, że w pewnych wypadkach ta kolizja może mieć znaczenie tylko formalne, zwłaszcza wtedy, gdy znaczna część badanej konstrukcji wykazuje niskie naprężenia. W wielu jednak wypadkach będzie ona miała sens istotny.

Zauważamy to już przy pomiarach odkształceń belek żelbetowych, gdzie z reguły przy obciążeniach próbnym wypadają ugięcia znacznie mniejsze od wartości obliczonych. Nie wolno nam zajmować wobec tego faktu stanowiska obojętnego.

Jest możliwe też, że opracowanie zagadnienia statyki ustrojów wykonanych z materiałów nieliniowo sprężystych da efekty gospodarcze. Problem ten jest jednak bardzo szeroki i wymagać będzie wielkiego wkładu pracy, zanim zostanie tak wszechstronnie wyjaśniony i zbadany, jak to ma miejsce w odniesieniu do ustrojów liniowo sprężystych.

2. Charakterystyka odkształceń i naprężeń przy zginaniu w fazie II

Rozpatrzmy zagadnienie rozkładu ciśnień w przekroju pojedynczo zbrojonej belki żelbetowej o przekroju prostokątnym bh_1 i procencie uzbrojenia μ przyjmując, że zasada płaskości przekroju zachowuje swą moc aż do chwili złamania.

Przyjmujemy również, że przekrój pracuje w fazie II. Jako niewiadome wprowadzamy kąt φ , tj. kąt obrotu dwu przekrojów odległych od siebie o jednostkę oraz odległość osi obojętnej $x = \xi \cdot h_1$ (rys. 1).

Z warunków geometrycznych odkształconego przekroju otrzymamy po wprowadzeniu wartości

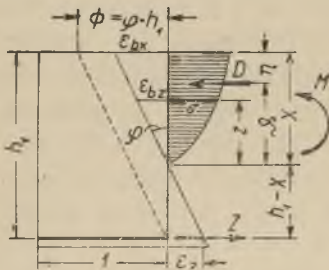
$$\Phi = \varphi \cdot h_1 = \varepsilon_b + \varepsilon_z \quad (1)$$

następujące zależności:

$$\varepsilon_b = \varphi \cdot z = \Phi \cdot \zeta, \quad \varepsilon_z = \Phi(1 - \xi), \quad (2)$$

$$d\varepsilon_b = \varphi \cdot dz = \Phi d\zeta, \quad (3)$$

$$x = \frac{\varepsilon_b}{\varphi} \quad \text{lub} \quad \xi = \frac{\varepsilon_b}{\Phi}. \quad (4)$$



Rys. 1

Zakładając na razie, że rozkład naprężeń w danym przekroju odkształconym jest znany, obliczmy wielkości wypadkowych ciśnień i ciągnięć.

$$D = b \cdot \int_0^x \sigma dz = \frac{b}{\varphi} \int_0^{\varepsilon_b} \sigma \cdot d\varepsilon_b = \frac{bh_1}{\Phi} \cdot A, \quad (5)$$

$$Z = \varepsilon_z \cdot E_z \cdot \mu b h_1 = (h_1 - x) \varphi \cdot E_z \cdot \mu b h_1 = (1 - \xi) \cdot \Phi \cdot E_z \cdot \mu b h_1 \quad \text{dla} \quad \varepsilon_z \leq \varepsilon_Q, \quad (6)$$

$$Z = Q_r \cdot \mu b h_1 \quad \text{dla} \quad \varepsilon_z \geq \varepsilon_Q, \quad (7)$$

oraz wartości pomocnicze:

$$D \cdot \vartheta = b \cdot \int_0^x \sigma \cdot z \cdot dz = \frac{b}{\varphi^2} \int_0^{\varepsilon_b} \sigma \cdot \varepsilon_b \cdot d\varepsilon_b = \frac{b h_1^2}{\Phi^2} \cdot S, \quad (8)$$

$$Z \cdot (h_1 - x) = (h_1 - x)^2 \cdot \varphi \cdot E_z \cdot \mu b h_1 = (1 - \xi)^2 \Phi \cdot E_z \mu b h_1^2 \quad \text{dla} \quad \varepsilon_z \leq \varepsilon_Q, \quad (9)$$

$$Z \cdot (h_1 - x) = Q_r \cdot \mu b h_1 (h_1 - x) = Q_r \cdot \mu b h_1^2 (1 - \xi) \quad \text{dla} \quad \varepsilon_z \geq \varepsilon_Q, \quad (10)$$

$$\vartheta = \frac{D \cdot \vartheta}{D} = \frac{S}{A} \cdot \frac{h_1}{\Phi}, \quad \vartheta_1 = \frac{S}{A}, \quad \eta_1 = \varepsilon_b - \frac{S}{A}, \quad (11)$$

$$m = \frac{M}{b h_1^2}. \quad (12)$$

W powyższych wzorach wprowadzono oznaczenia

$$A = \int \sigma \cdot d\varepsilon_b, \quad S = \int \sigma \cdot \varepsilon_b \cdot d\varepsilon_b. \quad (13)$$

Dla badanego przekroju równania rzutu sił i równowagi momentów przedstawiają się następująco:

$$D = Z$$

$$\text{a) } \varepsilon_z \leq \varepsilon_Q, \quad \frac{b h_1}{\Phi} A = (1 - \xi) \Phi E_z \cdot \mu b h_1,$$

stad

$$(1 - \xi) = \frac{A}{\Phi^2 \cdot E_z \cdot \mu}, \quad \text{wzgl.} \quad \xi = 1 - \frac{A}{\Phi^2 \cdot E_z \cdot \mu} = \frac{\varepsilon_b}{\Phi}, \quad (14)$$

$$\text{b) } \varepsilon_z \geq \varepsilon_Q, \quad \frac{b h_1}{\Phi} A = Q_r \cdot \mu b h_1,$$

$$\Phi = \frac{A}{\mu \cdot Q_r}, \quad \xi = \frac{\varepsilon_b}{\Phi}. \quad (15)$$

$$M = D \cdot \vartheta + Z (h_1 - x),$$

$$\text{a) } \varepsilon_z \leq \varepsilon_Q,$$

$$M = \frac{b h_1^2}{\Phi^2} \cdot S + (1 - \xi)^2 \Phi \cdot E_z \cdot \mu b h_1^2.$$

Podstawiając wartość z równania (14) dostaniemy

$$M = \frac{b h_1^2}{\Phi^2} \cdot S + \frac{A^2}{\Phi^4 E_z \cdot \mu^2} \cdot \Phi \cdot E_z \mu b h_1^2,$$

stąd

$$m\Phi^3 = S \cdot \Phi + \frac{A^2}{\mu \cdot E_z}.$$

Z równań (1), (2) i (14) wynika, że

$$\varepsilon_z = \Phi(1 - \xi) = \frac{A}{\Phi \cdot E_z \mu} = \Phi - \varepsilon_b, \quad (16)$$

czyli

$$\frac{A^2}{\mu \cdot E_z} = (\Phi - \varepsilon_b) \Phi \cdot A.$$

Podstawiamy ten wyraz do równania momentów

$$\frac{m}{A} \Phi^2 - \Phi + \eta_1 = 0,$$

czyli

$$m = \frac{\Phi - \eta_1}{\Phi^2} \cdot A, \quad \text{gdzie} \quad \eta_1 = \varepsilon_b - \frac{S}{A}. \quad (17)$$

Wychodząc z równania (1) i uwzględniając równanie (16) obliczamy

$$\Phi = \varepsilon_b + \varepsilon_z = \varepsilon_b + \frac{A}{\Phi E_z \mu},$$

stąd

$$\begin{aligned} \Phi^2 - \Phi \varepsilon_b - \frac{A}{E_z \cdot \mu} &= 0, \\ \Phi &= \frac{\varepsilon_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2 + \frac{A}{E_z \cdot \mu}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Mając określony kąt obrotu $\varphi = \frac{\Phi}{h_1}$ i położenie osi obojętnej $X = \xi h_1$ obliczamy naprężenie panujące w stali zbrojeniowej

$$\varepsilon_z = \Phi(1 - \xi),$$

stąd

$$\sigma_z = E_z \cdot \Phi(1 - \xi). \quad (19)$$

b) $\varepsilon_z \geq \varepsilon_Q$,

$$M = \frac{bh_1^2}{\Phi^2} S + Q_r \cdot \mu bh_1^2 (1 - \xi),$$

$$m\Phi^2 = S + \Phi^2 \cdot Q_r \cdot \mu (1 - \xi).$$

Równania (2) i (15) podają, że:

$$\Phi \cdot \mu Q_r = A,$$

$$\Phi(1 - \xi) = \Phi - \varepsilon_b.$$

Uwzględniając to w powyższym równaniu momentów dostaniemy analogiczną wartość m jak w przypadku $\varepsilon_z \leq \varepsilon_Q$ (równ. 17).

$$m\Phi^2 = S + A(\Phi - \varepsilon_b),$$

stąd

$$m = \frac{\Phi - \eta_1}{\Phi^2}, \quad \eta_1 = \varepsilon_b - \frac{S}{A}. \quad (20)$$

Wielkość kąta obrotu wyznaczona została równaniem (15)

$$\Phi = \frac{A}{\mu Q_r} = \frac{A}{\mu R m \cdot \beta_r}, \quad \text{gdzie} \quad \beta_r = \frac{Q_r}{R m},$$

zaś odległość osi objętej równaniem (4)

$$\xi = \frac{\varepsilon_b}{\Phi} = \frac{\varepsilon_b \cdot R \cdot \mu}{A} \cdot \mu \beta_r.$$

Wyprowadzone wyżej wzory ważne są zarówno dla sprężystego, jak i plastycznego odkształcenia stali zbrojeniowej. Pozwalają one na zilustrowanie mechanizmu sił wewnętrznych w przekroju belki zginanej, z tym jednak, że musi się w pierw w tym celu podporządkować liniowo zmiennym odkształceniom pewną funkcję naprężeń.

Równanie (2) wyjaśnia, że potrafimy wówczas wyznaczyć dla każdej wartości φ i x rozkład naprężeń w strefie ściskanej. Równanie to wskazuje również na powinowactwo istniejące między krzywą naprężeń z, σ i przyjętą krzywą ε, σ .

Proponowaną poniżej krzywą ε, σ wyprowadzono w oparciu o następujące założenia:

a) W strefie małych odkształceń naprężenia rozkładają się liniowo zgodnie z prawem Hooke'a, przy czym przyjęto moduł sprężystości betonu E_b odpowiadający niskim naprężeniom.

b) Złamanie belki pojedynczo zbrojonej następuje w chwili przekroczenia wytrzymałości betonu na ściskanie przy zginaniu. Przyjęto, że wytrzymałość ta jest równa podanej przez normę PN/B 03260 tzw. obliczeniowej wytrzymałości na ściskanie R_m .

c) Przy złamaniu belki beton na krawędzi strefy ściskanej doznaje skrócenia jednostkowego

$$\varepsilon_b^r = 25 \times 10^{-6} R_m^1. \quad (21)$$

¹ Dla ułatwienia obliczeń przyjęto $R_\varepsilon = R_m$. Wzięto przy tym pod uwagę, że $\varepsilon_b^r \geq 25 \cdot 10^{-6} R_s$ oraz to, że nieduże odchylenia od rzeczywistej krzywej naprężeń nie wpływają zasadniczo na obliczoną wielkość momentu łamiącego, a tym bardziej na wielkości momentów mniejszych od niego.

d) Powierzchnię wykresu naprężeń występujących przy złamaniu belki wykonanej z betonu o średniej wytrzymałości ($R_w=100$ do 300 kg/cm^2) cechuje podana przez Loleita i Sachnowskiego, doświadczalnie stwierdzona wielkość $\frac{\eta_1}{\varepsilon_b^r \cdot \omega} \cong 0,53$. Wielkość ta jest cechą charakterystyczną wykresu naprężeń.

Powyższe założenia narzucając krzywej naprężeń jej warunki brzegowe oraz charakterystykę $\eta_1/\varepsilon_b^r \omega$ w dostatecznym przybliżeniu określają funkcję naprężeń. Proponuje się przedstawienie tej funkcji w formie wielomianu

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma}{E_b} + \left(\varepsilon_b^r - \frac{R_m}{E_b} \right) \left(\frac{\sigma}{R_m} \right)^{10}. \quad (22)$$

Występujący w tym wzorze moduł sprężystości E_b odnosi się do betonu poddanego małym ciśnieniom.

Łatwo sprawdzić, że proponowana równaniem (22) zależność spełnia przyjęte założenia.

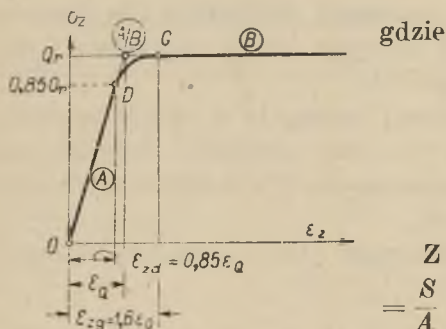
Dla $\sigma=0$ jest $\varepsilon_b=0$ zaś $\frac{d\varepsilon_b}{d\sigma} = \frac{1}{E_b}$.

Dla $\sigma=R_m$ jest $\varepsilon_b = \varepsilon_b^r$.

Równanie (22) pozwala na obliczenie wartości pomocniczych

$$A = \int \sigma \cdot d\varepsilon_b = \frac{\sigma}{E_b} \cdot \left(\frac{10}{11} k \sigma^9 + \frac{1}{2} \right), \quad (23)$$

$$S = \int \sigma \cdot \varepsilon_b \cdot d\varepsilon_b = \frac{\sigma^3}{E_b^2} \left[\frac{10}{21} (k \cdot \sigma^9)^2 + \frac{11}{12} k \sigma^9 + \frac{1}{3} \right], \quad (24)$$



Rys. 2

$$k = \frac{\varepsilon_b^r \cdot E_b - R_m}{R_m^{10}}$$

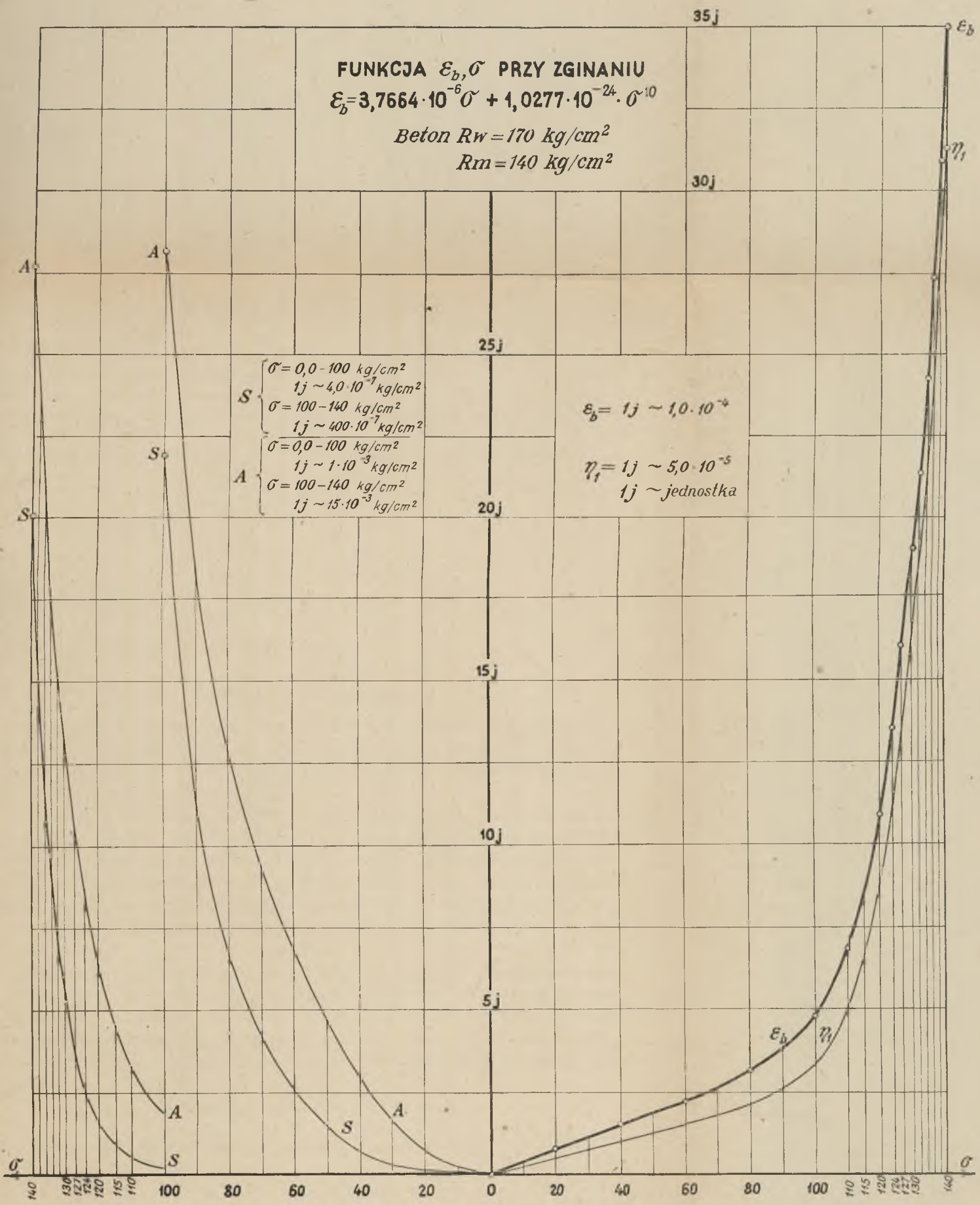
$$\omega = \frac{A^r}{\varepsilon_b^r \cdot R_m}. \quad (25)$$

Z równań (23, 24) obliczymy wartości $\vartheta_1 = \frac{S}{A}$ i $\eta_1 = \varepsilon_b - \frac{S}{A}$, otrzymując wreszcie cechę charakterystyczną wykresu naprężeń $\eta_1/\varepsilon_b \cdot \omega$.

Przykładowo podajemy, że dla betonów o wytrzymałości R_m od 100 do 300 kg/cm^2 obliczone równaniem (22) cechy charakterystyczne wahają się między 0,53 i 0,525 (ω od 0,835 do 0,86, η_1/ε_b od 0,44 do 0,455).

FUNKCJA ε_b, σ PRZY ZGINANIU
 $\varepsilon_b = 3,7664 \cdot 10^{-6} \sigma + 1,0277 \cdot 10^{-24} \cdot \sigma^{10}$

Beton $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$
 $R_m = 140 \text{ kg/cm}^2$



Rys. 3

Graniczny procent uzbrojenia (μ_g), tj. procent uzbrojenia gwarantującego równocześnie osiągnięcie granicy plastyczności stali i wytrzymałości betonu w belce zginanej oblicza się ze wzoru (15) oraz z proporcji geometrycznych odkształconego przekroju. Uwzględnia się przy tym, że stal osiąga granicę plastyczności przy wydłużeniu $\varepsilon_{zg} = 1,6 \frac{Q_r}{E_s}$ (rys. 2).

$$\xi^r = \frac{\varepsilon_b^r}{\Phi^r} = \frac{\varepsilon_b^r \cdot R_m}{A^r} \mu_g \beta_r = \frac{\mu_g \cdot \beta_r}{\omega}$$

$$\xi^r = \frac{\varepsilon_b^r}{\varepsilon_b^r + \varepsilon_{zg}} = \frac{1}{1 + 0,03 \beta_r}$$

stąd otrzymujemy znany z metody odkształceń plastycznych wzór

$$\mu_g = \frac{\omega}{(1 + 0,03 \beta_r) \beta_r} \quad (26)$$

3. Wnioski i zastosowania¹

Podane na końcu referatu tablice I-IV i rysunek 3 sporządzono dla belek żelbetowych wykonanych z betonu marki $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$ o współczynniku sprężystości $E_b = 265000 \text{ kg/cm}^2$ oraz ze stali zbrojeniowej o granicy plastyczności $Q_r = 2500 \text{ kg/cm}^2$.

Materiały o tej charakterystyce wytrzymałościowej są powszechnie stosowane w budownictwie żelbetowym. Przy sporządzeniu wykresów posłużono się wyprowadzonymi poprzednio wzorami. Pozwoliły one na obliczenie dla każdej pary sprzężonych ze sobą wartości ε_b , σ oraz dla przyjętego procentu uzbrojenia μ , odpowiadających im wielkości m , Φ , ξ , σ_s .

Na rysunku (3) przedstawiono sporządzone w oparciu o wzory (22, 23, 24) funkcje ε_b , η_1 , A , S zmiennej σ .

Z wykresów tych widać, że przy niskich i średnich naprężeniach (do $\sigma \cong 80 \text{ kg/cm}^2$) odkształcenia ε_b zmieniają się liniowo, zaś przy wyższych naprężeniach wykazują one coraz większe przyrosty charakterystyczne dla materiałów miękkich. Graniczne wartości ε_b^r , η_1^r , A^r , S^r odpowiadające obliczeniowej wytrzymałości betonu na ściskanie $R_m = 140 \text{ kg/cm}^2$ wynoszą

$$\varepsilon_b^r = 0,0035, \quad A^r = 0,415211 \text{ kg/cm}^2,$$

$$S^r = 0,000803266 \text{ kg/cm}^2, \quad \vartheta_1^r = \frac{S^r}{A^r} = 1,9346 \cdot 10^{-3},$$

$$\eta_{1s}^r = \varepsilon_b^r - \frac{S^r}{A^r} = 0,001568.$$

¹ Przedstawione wykresy opracowali pracownicy katedry Konstrukcji Prefabrykowanych, asystenci: R. Antoszewski, J. Bujak oraz T. Rutecki. Rysunki i wykresy wykonał asystent katedry Rzutów i Rys. Techn. M. Teliczek.

Stąd obliczymy wartość

$$\omega^{\tau} = \frac{A^t}{\varepsilon_b^t \cdot R_m} = 0,847,$$

oraz cechę charakterystyczną wykresu naprężeń $\frac{\eta_1}{\varepsilon_b \cdot \omega^{\tau}} = 0,528$. Ze wzoru (26) obliczymy $\mu_g = 0,0309$.

Równanie (22) odniesione do betonu o przyjętej charakterystyce wytrzymałościowej przybiera postać

$$\varepsilon_b = 3,7664 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma + 1,0277 \cdot 10^{-24} \cdot \sigma^{10}.$$

Wykresy w tablicach I-IV przedstawiają zależność naprężeń ściskających w betonie σ , położenia osi obojętnej $\xi = \frac{x}{h_1}$, kąta obrotu $\Phi = \varphi \cdot h_1$ i naprężeń rozciągających w zbrojeniu σ_z od wartości $m = \frac{M}{bh_1^2}$. Dzięki wprowadzeniu wartości m stało się możliwe przedstawienie poszczególnych związków niezależnie od wymiarów przekroju belki i wielkości momentu. Poniżej zestawiono wzory, którymi posługiwano się przy konstruowaniu wykresów. Zakres ich użyteczności wiąże się z wielkością naprężeń w uzbrojeniu (rys. 2).

Obszar sprężysty (A) $m = \frac{\Phi - \eta_1}{\Phi^2} A \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}, \quad (17) \quad \Phi = \frac{\varepsilon_b}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_b}{2}\right)^2 + \frac{A}{E_z \mu}}; \quad (18)$

$\varepsilon_z \leq \varepsilon_Q \quad \xi = \frac{\varepsilon_b}{\Phi}; \quad (14) \quad \sigma_z = E_z \cdot \Phi(1 - \xi) \leq Q_r; \quad (19)$

$\mu =$	0,2%	0,5%	0,75%	1%	1,25%
1	2	3	4	5	6
$m^0 m^A/B m^t$	0	0	0	0	0
	4,70	11,44	16,734	21,74	26,60
	4,91	11,91	17,42	22,63	27,56
$\Phi^0 \Phi^A/B \Phi^t$	0	0	0	0	0
	139130	158000	170666	186000	198000
	8304220	3321688	2214320	1660844	1328670
$\xi^0 \xi^A/B \xi^t$	0,158	0,245	0,289	0,326	0,356
	0,162	0,247	0,3026	0,3521	0,400
	0,042	0,105	0,158	0,210	0,263

$$\begin{aligned} \text{Obszar} & m = \frac{\Phi - \eta_1}{\Phi^2} A \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}; & (20) & \quad \Phi = \frac{A}{\mu Q_r}; & (15) \\ \text{plastyczny (B)} & \varepsilon_z \geq \varepsilon_Q & \xi = \frac{\varepsilon_b \cdot R_m}{\Phi} = \frac{\varepsilon_b \cdot R_m}{A} \mu \beta_r; & (15) & \quad \sigma_z = Q_r. \end{aligned}$$

Występujący w wyrazie Φ kąt $\varphi = \frac{\Phi}{h_1}$ mierzony jest w radianach na jednostkę długości belki.

Charakterystyczne dla tych krzywych są wartości odpowiadające obciążeniom łamiącym (m^τ), zerowym (m^0) oraz obciążeniom powodującym przejście naprężeń w stali zbrojeniowej z obszaru sprężystego (A) w obszar plastyczny (B) (rys. 2).

Wartości te zestawiono poniżej.

Przedstawione na wykresach krzywe wykazują wyraźne załamania na granicy A/B. W chwili gdy naprężenie stali osiąga granicę plastyczności, wzrastają nagle naprężenia ściskające σ w betonie (tabl. I) oraz kąty obrotu Φ (tabl. III), zaś oś obojętna (tabl. II) w belkach zbrojonych poniżej procentu granicznego wyraźnie się podwyższa (ξ maleje). Przy naprężeniach stali poniżej granicy A/B daje się zauważyć przesuwanie osi obojętnej w dół ze wzrostem $m = \frac{M}{bh_1^2}$. Jest ono tym większe, im większy jest procent uzbrojenia. W belkach o słabym uzbrojeniu położenie osi obojętnej nie ulega widocznym zmianom.

Wyniki dotychczas przeprowadzonych i opublikowanych badań potwierdzają powyższe dane uzyskane na drodze teoretycznej. Jedyną niezgodność stwierdza się w położeniu osi obojętnej występującej przy niskich naprężeniach betonu i stali. Doświadczenia bowiem wykazują, że w strefie małych obciążeń wzrostowi ich towarzyszy wyraźne podno-

1,5%	2%	2,5%	3,09%	4%	
7	8	9	10	11	
0	0	0	0	0	
30,94	39,20	46,57	53,90	—	
32,18	40,55	47,75	54,70	59,579	
0	0	0	0	0	
214020	251800	305280	382000	—	· 10 ⁻⁸
1107720	830420	665000	538000	—	
0,382	0,425	0,459	0,493	0,539	
0,4447	0,5252	0,610	0,688	—	
0,316	0,421	0,526	0,651	—	

szeniu się osi obojętnej aż do momentu, przy którym beton w strefie rozciąganej ulega zarysowaniu. Z wykresów wynika natomiast, że oś obojętna zadnych przesunięć wtedy nie doznaje. Tłumaczy się to tym, że wykresy zostały sporządzone dla fazy II, podczas gdy przekroje słabo obciążone pracują w rzeczywistości w fazie I. Włączony do współpracy beton strefy rozciąganej powoduje początkowo obniżenie osi obojętnej. Wpływ ten w miarę pojawiania się rys zanika powodując stopniowe podwyższanie się osi obojętnej. Odnośnej korekty wykresów nie przeprowadzono ze względu na stosunkowo małe praktyczne znaczenie tego zakresu obciążeń przy wymiarowaniu.

Wyznaczona wzorami metody naprężeń liniowych oś obojętna leży poniżej osi rzeczywistej wyznaczonej dla belki pracującej w fazie II i obciążonej w granicach dopuszczalnych. Uwzględniając wykresy w tablicy II można obliczyć, że dla betonu marki 170 kg/cm^2 i procentu uzbrojenia $\mu = 0,2\%$ do $3,09\%$ odnośne różnice między rzeczywistym położeniem osi obojętnej a obliczonym według metody NL wahają się w granicach 35% do 23% . Ze wzrostem procentu uzbrojenia różnica ta maleje zanikając zupełnie w belkach uzbrojonych $5-6\%$ i pracujących w fazie II, w granicach dopuszczalnych naprężeń.

O wytrzymałości belki zginanej decyduje zawsze ostatecznie, niezależnie od naprężenia w stali zbrojeniowej, tylko wytrzymałość betonu R_m . Wiadomo, że przy dużym procencie uzbrojenia ($\mu > \mu_g$) w chwili złamania belki uzbrojenie rozciągane pracuje poniżej granicy plastyczności (odcinek OG na rys. 2). Przy uzbrojeniu normalnym ($\mu < \mu_g$) pokonanie wytrzymałości betonu na ściskanie jest również z reguły przyczyną ostatecznego zniszczenia belki z tą jedynie różnicą, że naprężenia stali przedtem już przekraczają granicę plastyczności G (rys. 2). Wyjątek stanowią tu oczywiście belki o bardzo słabym uzbrojeniu, przy którym może nastąpić rozerwanie stali jeszcze przed osiągnięciem wytrzymałości betonu.

Przejście w wykresie ε_z, σ_z z obszaru sprężystego do plastycznego odbywa się według krzywej przejściowej DG odpowiadającej odkształceniom między $\varepsilon_{zd} = 0,85 \varepsilon_Q$ i $\varepsilon_{zg} = 1,6 \varepsilon_Q$ oraz towarzyszącym im naprężeniom od $0,85 Q_r$ do Q_r .

Punkty G i D zostały naniesione również na krzywych $\sigma_b, \Phi, \xi, \sigma_z$ (tabl. I do IV), wyznaczając wartości odpowiadające początkowi i końcowi krzywej przejściowej DG . Na każdym wykresie naniesiono również krzywą bezpieczeństwa B oraz krzywą maksymalnych odkształceń 0 . Pierwsza z nich skonstruowana została zgodnie z obowiązującym u nas współczynnikiem bezpieczeństwa $s = 1,6$ i ogranicza zakres momentów dopuszczalnych $M < \frac{M^r}{1,6}$ dla wszystkich procentów uzbrojenia. Z kolei krzywa 0 w sposób analogiczny ogranicza zakres konstrukcyjnej zdol-

ności udźwigu belki uwarunkowanej odkształceniami. Przyjęto tu, że belka żelbetowa posiada jeszcze wartości konstrukcyjne, gdy wydłużenie uzbrojenia rozciąganego względnie skrócenie betonu w strefie ściskanej leży odpowiednio w granicach $\varepsilon_z \leq 5^0/_{00}$ i $\varepsilon_b \leq 2^0/_{00}$. Z warunku pierwszego wynika, że przy maksymalnym odkształceniu stali jest

$$\varepsilon_b = \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{5}{1000}. \quad (27)$$

Dla danego μ ustalono przez próby te wartości m , dla których wyznaczone z tablic I i II wartości σ_b i ξ spełniają równanie (27). Wyznaczone w ten sposób wielkości m pozwoliły na naniesienie punktów jednej gałęzi krzywej 0. Drugi warunek dotyczący odkształceń betonu spełnia prosta poprowadzona poziomo na wysokości ciśnienia $\sigma = 131 \text{ kg/cm}^2$ odpowiadającego przyjętemu skróceniu jednostkowemu betonu $\varepsilon_b = 2^0/_{00}$ (rys. 3). Z wykresu na tablicy I widać, że warunek pierwszy jest decydujący przy słabszych uzbrojeniach, drugi zaś przy uzbrojeniach silniejszych.

Oznaczając przez m_0 te wartości m , które odpowiadają przyjętym odkształceniom granicznym, i analogicznie przez m_b wartości odpowiadające granicznemu stanowi bezpieczeństwa konstrukcji w świetle obowiązujących przepisów, odczytamy z wykresów (tabl. I) następujące zależności:

$\mu =$	0,002	0,015	0,0309
$\frac{m_0}{m_b}$	$\frac{4,75}{3,07} = 1,55$	$\frac{31,8}{20,1} = 1,58$	$\frac{49,9}{34,2} = 1,46$

Jak widać, współczynnik bezpieczeństwa podyktowanego odkształceniem mieści się w granicach od 1,46 do 1,58 i niewiele się zatem różni od przyjętego u nas współczynnika bezpieczeństwa awaryjnego $s = 1,6$.

Sposób posługiwania się krzywymi przy sprawdzaniu i wymiarowaniu przekroju prostokątnego przedstawiony jest na następujących przykładach.

a) Dane: $h = 105 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$, $F_z = 22,60 \text{ cm}^2$, ($\mu = 0,754^0/_{00}$), $M = 27 \text{ tm}$.

Obliczamy $m = \frac{2700000}{30 \cdot 100^2} = 9 < m_b = 11$. Z tablic I do IV odczytujemy dla $m = 9$ i $\mu = 0,754^0/_{00}$ wartości

$$\sigma_b = 67,5 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = 1330 \text{ kg/cm}^2, \quad \xi = 0,290,$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{h_1} = \frac{0,000885}{100} = 0,885 \cdot 10^{-5}.$$

Te same wielkości obliczone metodą naprężeń liniowych wynoszą:

$$\sigma_b = 54,7 \text{ kg/cm}^2, \quad \sigma_z = 1365 \text{ kg/cm}^2, \quad \xi = 0,376,$$

$$\varphi = \frac{M}{EJ} = 0,914 \cdot 10^{-5}, \quad \text{dla} \quad E_b = 160000 \text{ kg/cm}^2.$$

b) Dane: $M = 27 \text{ tm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $\mu = 0,754\%$. Szukane $h_1 \text{ min}$. Odczytujemy z tablicy I na krzywej $\mu = 0,754\%$ dla punktu B wartość $m_b = \frac{M}{bh_1^2} = 11$. Stąd $h_{1 \text{ min}} = 90,2 \text{ cm}$, $\sigma_b = 81 \text{ kg/cm}^2$, $\sigma_z = 1610 \text{ kg/cm}^2$. Według metody odkształceń plastycznych dla powyższych założeń otrzymujemy $h_{1 \text{ min}} = 90,6 \text{ cm}$.

c) Dane: $h = 105 \text{ cm}$, $b = 30 \text{ cm}$, $a = a' = 5 \text{ cm}$, $M = 125 \text{ tm}$. Poszukiwane μ i μ' .

Obliczamy $M' = 1,6 \cdot 125 = 200 \text{ tm}$, $m' = \frac{20000000}{30 \cdot 100^2} = 66,66 > 54,7 \text{ kg/cm}^2$,

$$\Delta m' = 66,66 - 54,7 = 11,96,$$

$$\mu' = \Delta \mu = \frac{\Delta m' \cdot h_1}{Q_r(h_1 - a')} = \frac{11,96 \cdot 100}{2500 \cdot 95} = 0,00503 =$$

$$\mu = 3,09 + 0,503 = 3,59\%, \quad \mu' = 0,5\%.$$

Licząc metodą odkształceń plastycznych otrzymamy

$$\mu = 3,54\%, \quad \mu' = 0,61\%.$$

4. Zakończenie

Zaproponowana w niniejszym artykule droga do określenia krzywej rozkładu naprężonej w zginanej belce żelbetowej nie jest na pewno jedyną i najlepszą z tych, które prowadzić mogą do zamierzonego celu. W naszym przypadku została ona zbudowana w oparciu o znane na ogół dość dobrze rozkłady naprężeń zarówno w belkach słabo obciążonych, jak też obciążonych w stadium złamania. W tym drugim przypadku starano się zmieścić w założeniach teorii Loleita i teorii Saligera. Należy tu podkreślić, że nie było w żadnym razie celem niniejszej pracy przedstawienie nowej metody wyznaczenia momentu łamiącego. Wartości m' obliczone za pomocą wyprowadzonych wzorów zgadzają się prawie całkiem dokładnie z obliczonymi według obowiązującej u nas normy.

Pewna jedynie różnica, rzędu około 6% , występuje przy obliczaniu granicznego procentu zbrojenia μ_g .

Tłumaczy się to tym, że wobec trudności dobrania krzywej rozkładu naprężeń spełniającej równocześnie warunki $\omega = 0,8$, $\frac{\eta_1}{\varepsilon_b} = 0,425$ przyjęto

krzywą spełniającą podstawowy dla teorii Loleita warunek momentu łamiącego $\frac{\eta_1}{\varepsilon_b \omega} = 0,53$.

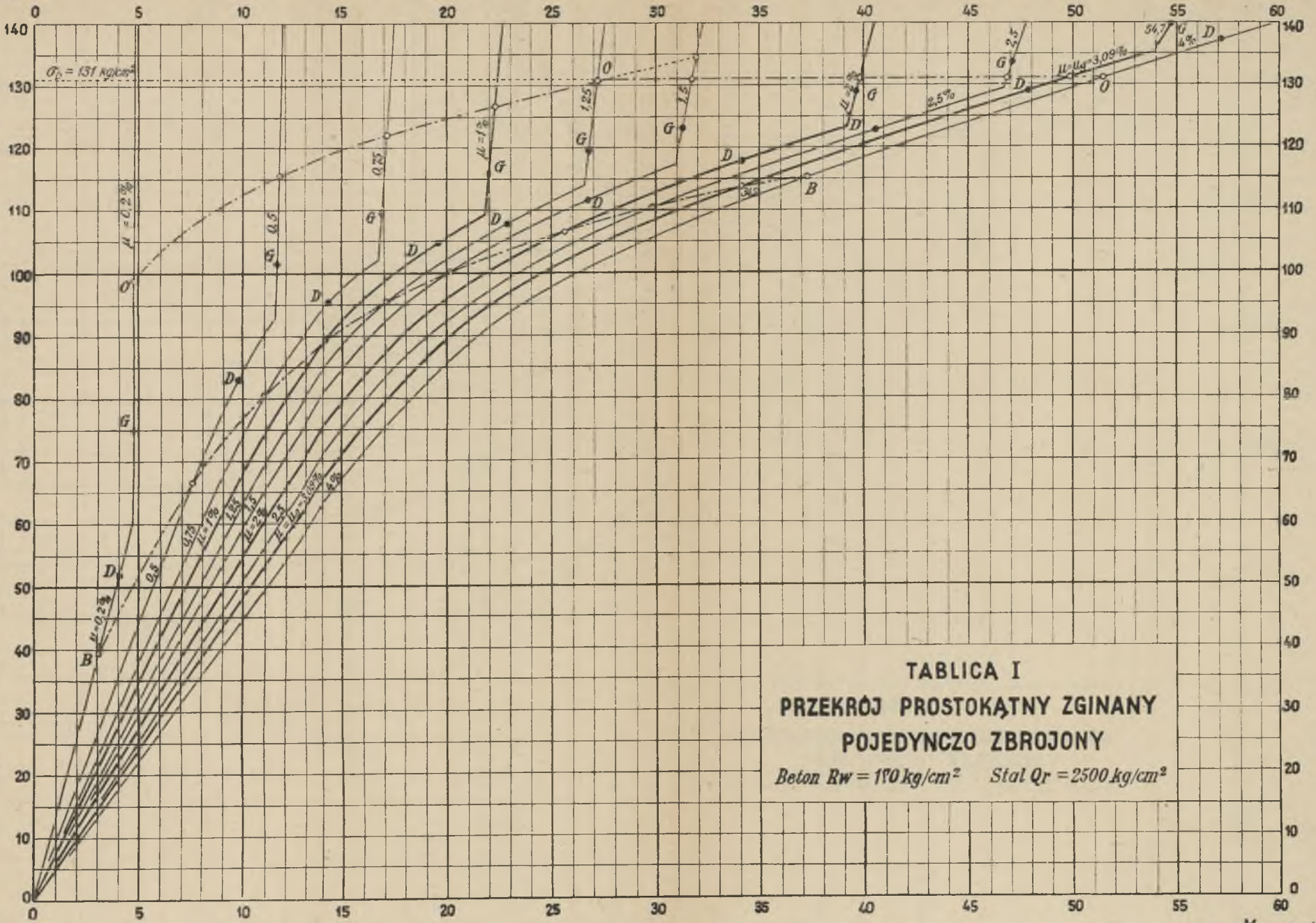
Wprowadzenie jako podstawowych elementów rozumowania kąta i zmiennego położenia osi obojętnej pozwoliło z jednej strony na zilustrowanie mechanizmu pracy belki zginanej o nieliniowych własnościach sprężystych, zaś z drugiej na poruszenie, zresztą całkiem marginesowe, pewnych podstawowych problemów statyki ustrojów nieliniowo sprężystych.

Dokładne omówienie tego drugiego zagadnienia nie może się mieścić w ramach niniejszego artykułu i wymaga osobnego omówienia.

Zauważa się przy tym jedynie, że pominięty w przedstawionych rozważaniach, jako nieistotny przy wymiarowaniu, wpływ fazy I może mieć decydujące znaczenie przy opracowywaniu podstaw nowej statyki i musi być tam uwzględniony.

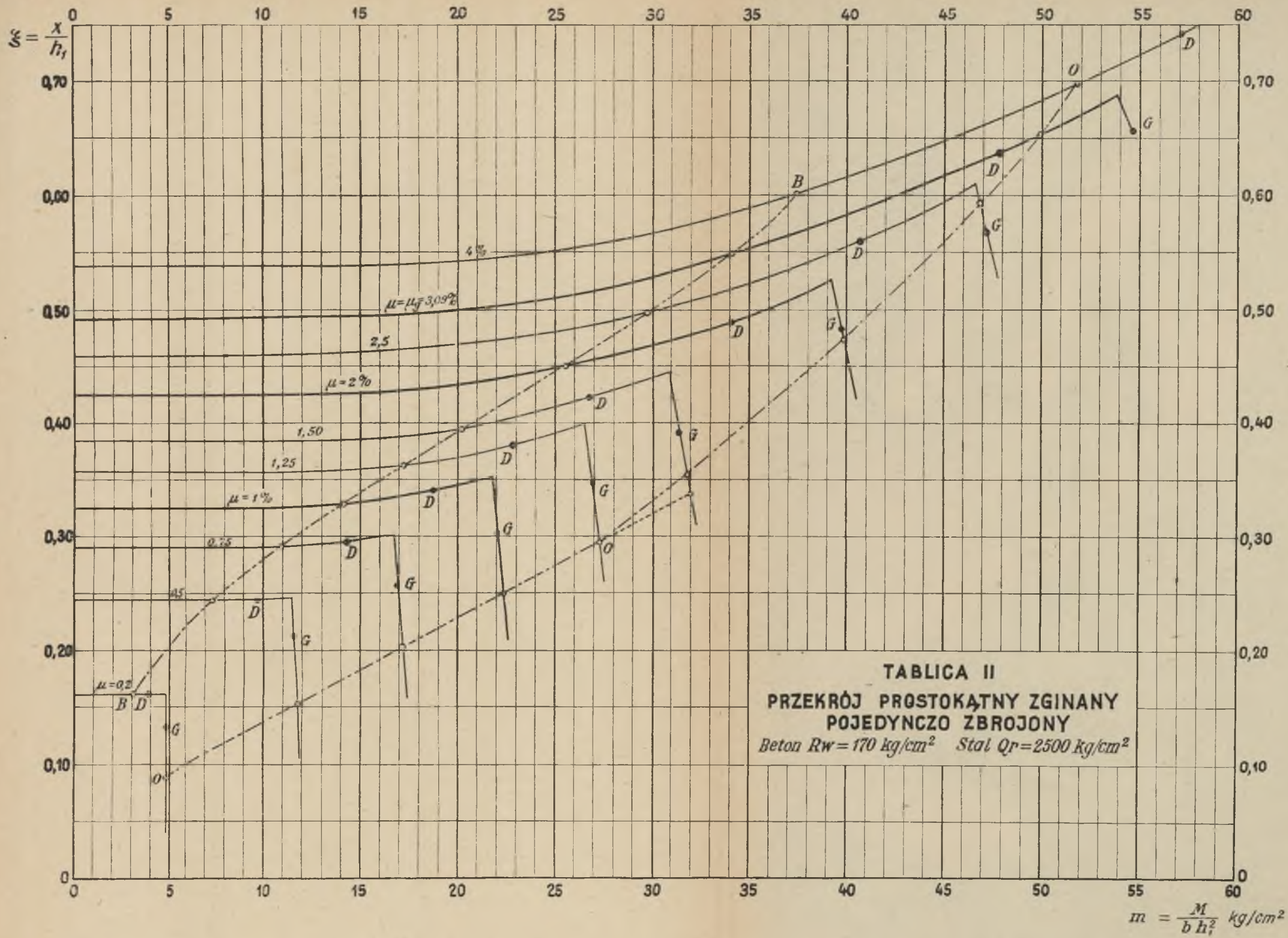
σ_b kg/cm²

$R_m = 140$

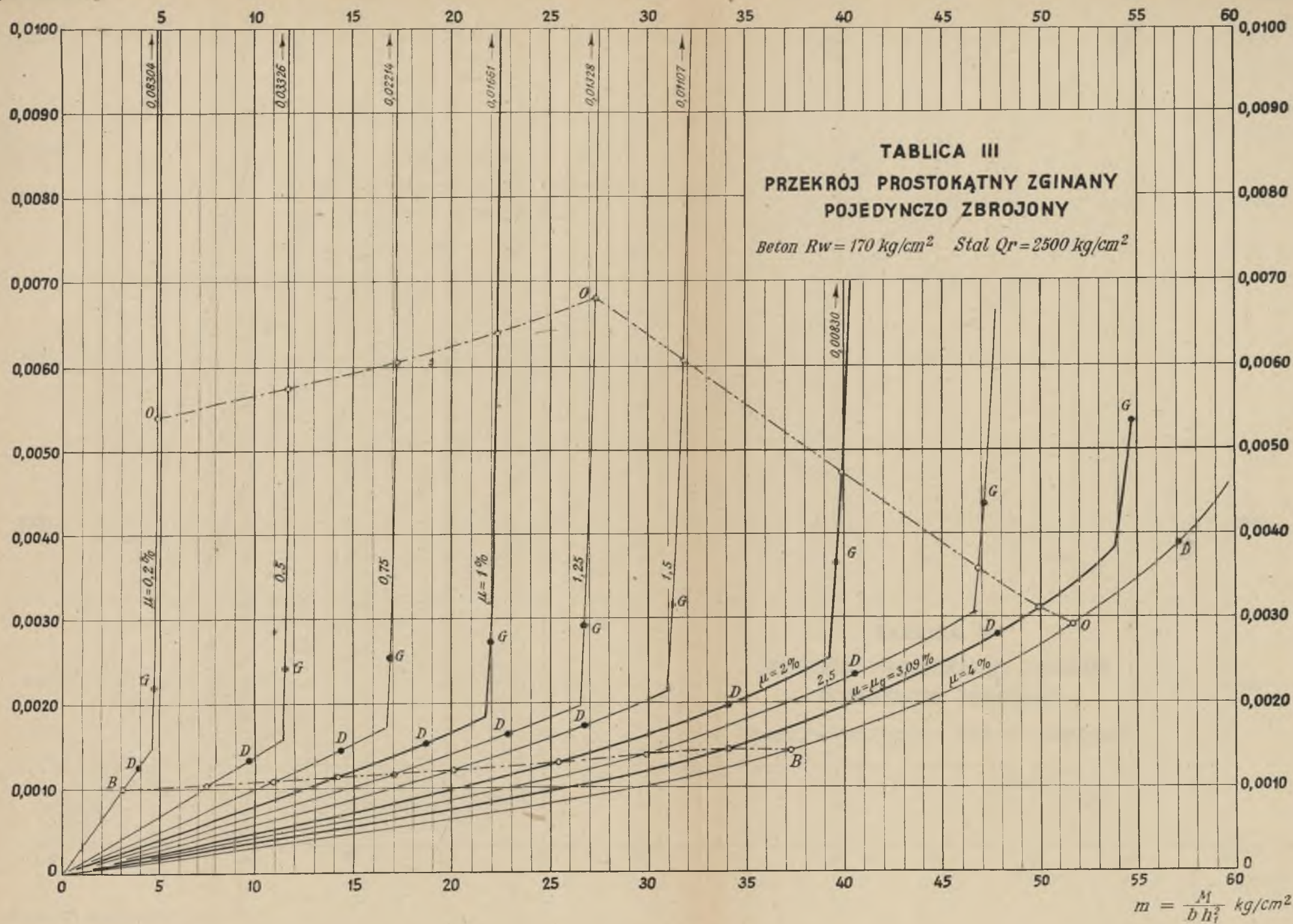


TABLICA I
PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY ZGINANY
POJEDYNCZO ZBROJONY
Beton $R_m = 140 \text{ kg/cm}^2$ Stal $Q_r = 2500 \text{ kg/cm}^2$

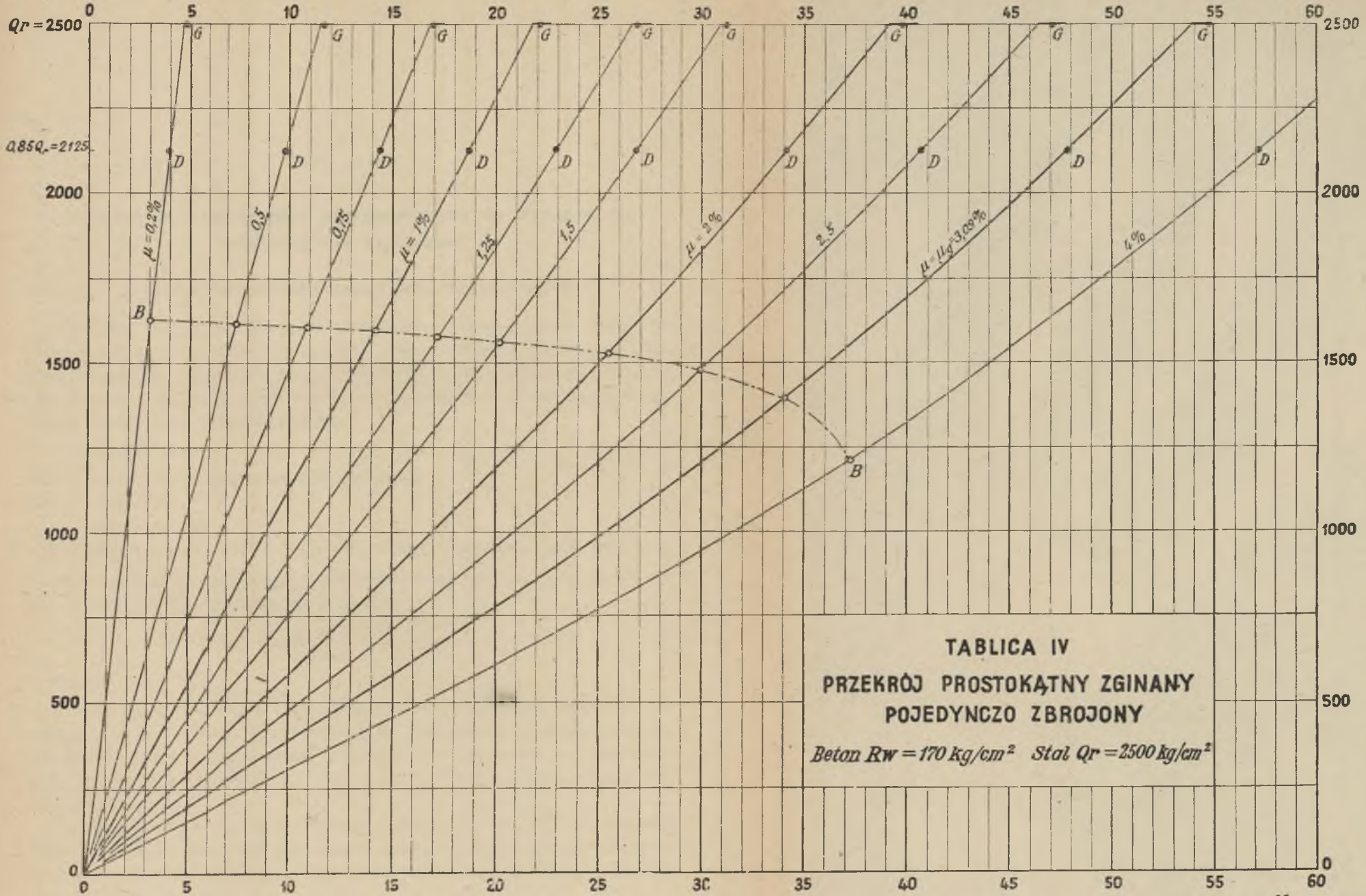
$$m = \frac{M}{b h^2} \text{ kg/cm}^2$$



$$\phi = \varphi \cdot h, \text{ radj.}$$



σ_z kg/cm²



TABLICA IV
PRZEKRÓJ PROSTOKĄTNY ZGINANY
POJEDYNCZO ZBROJONY
Beton $R_w = 170 \text{ kg/cm}^2$ Stal $Q_r = 2500 \text{ kg/cm}^2$

$$m = \frac{M}{b h^2} \text{ kg/cm}^2$$