

Józef Ledwoń

Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczania wielkości siły krytycznej

1. Różne sformułowania zasady prac przygotowanych

Zwróćmy uwagę na zakres stosowalności ogólnie znanych związków przedstawiających wielkości przyrostów pracy sił zewnętrznych i odpowiadających im przyrostów energii potencjalnej wewnętrznych sił sprężystości, jako poszczególnych wyrazów wchodzących w równanie wyrażające zasadę prac przygotowanych.

Oznaczając przez:

δL — pracę przygotowaną sił zewnętrznych,
 σ, τ — naprężenia,
 ε, γ — odkształcenia,
 δ — znak wariacji, czyli nieskończenie małego przyrostu danej wielkości,
możemy napisać znane równanie dotyczące wielkości pracy naprężeń na odkształceniach przygotowanych w postaci

$$\delta L = \int_v dV (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z). \quad (1)$$

A zatem:

„Praca sił zewnętrznych ciała będącego w równowadze przy jego dowolnym przemieszczeniu przygotowanym połączonym z odkształceniem jest równa pracy przygotowanej naprężeń wewnętrznych na odpowiednich przyrostach odkształceń. Nazywamy ją pracą przygotowaną odkształcenia.

To doniosłe twierdzenie jest ważne ogólnie bez względu na materiał ciała, jest przeto ważne dla materiałów sprężystych jak i elastoplastycznych (w równowadze) tj. przy wszelkich zależnościach stanu odkształcenia od stanu napięcia“¹.

Równanie (1) zostało wyprowadzone w założeniu odkształceń niezmiernie małych w porównaniu do każdego z wymiarów rozpatrywanego

¹ Cytata wg prof. Hubera, *Teoria sprężystości*, PAN, str. 113.

ciała znajdującego się w równowadze, czyli w założeniu spełniania warunków nierozdzielności jak również niezmiennych w czasie obciążania warunków podparcia, jednakże dla dowolnych, czyli nawet skończonych wartości składowych przemieszczeń.

Na przykład w cienkim pręcie sprężystym o postaci zakrzywionej, pomimo występowania małych wydłużeń i skoszeń¹ w każdym elemencie jego objętości, poszczególne punkty mogą doznawać przemieszczeń wspólnych z największym wymiarem pręta.

Gdy materiał jest doskonale sprężysty, to praca sił wewnętrznych U dla odkształceń rzeczywistych i praca sił zewnętrznych L wyraża się wzorami:

$$dU = \int dV (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_x d\gamma_x + \tau_y d\gamma_y + \tau_z d\gamma_z), \quad (2)$$

$$L = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{p_i} P_i dp_i, \quad (3)$$

gdzie p_i jest składowym przemieszczeniem punktu zaczepienia siły P_i w kierunku jej działania.

Wiadomo, że dla materiału doskonale sprężystego całkowita praca sił zewnętrznych jest równa liczbowo energii wewnętrznej sił sprężystości, czyli

$$L = U. \quad (4)$$

Powyższe twierdzenie jest ważne dla jakiegokolwiek prawa sprężystości przy przemieszczeniach dowolnych.

W celu ułatwienia dalszych rozważań wypiszemy zasadę prac przygotowanych w najogólniejszej postaci (jednak bez uwzględniania sił masowych):

$$\int_v dV (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_x \delta \gamma_x + \tau_y \delta \gamma_y + \tau_z \delta \gamma_z) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \delta p_i. \quad (5)$$

Wzór (5) jest jedynie inną formą zapisania wzoru (1) jako najogólniejszej zasady mechaniki.

Dokonajmy obecnie możliwych statycznie wariacji wielkości σ , τ i P .

Otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \int_v dV (\sigma_x + \delta \sigma_x) \delta \varepsilon_x + (\sigma_y + \delta \sigma_y) \delta \varepsilon_y + (\sigma_z + \delta \sigma_z) \delta \varepsilon_z + \\ & + (\tau_x + \delta \tau_x) \delta \gamma_x + (\tau_y + \delta \tau_y) \delta \gamma_y + (\tau_z + \delta \tau_z) \delta \gamma_z = \sum_{i=1}^{i=n} (P_i + \delta P_i) \delta p_i. \end{aligned} \quad (6)$$

¹ Wprowadzam nowy termin skoszenie odpowiadający rosyjskiemu *сдвиг*, niemieckiemu – *Gleitung*.

Odejmijmy stronami równanie (5) od równania (6) otrzymamy:

$$\int dV (\delta\sigma_x \delta\varepsilon_x + \delta\sigma_y \delta\varepsilon_y + \delta\sigma_z \delta\varepsilon_z + \delta\tau_x \delta\gamma_x + \tau_y \delta\gamma_y + \tau_z \delta\gamma_z) = \sum_{i=1}^{i=n} P_i p_i. \quad (7)$$

Biorąc umownie ε , τ i p jako nieskończenie małe, wyrażone w powyższym wzorze przez $\delta\varepsilon$, $\delta\tau$ i δp , możemy równanie (7) napisać w postaci:

$$\int_v dV (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_x \delta\tau_x + \gamma_y \delta\tau_y + \gamma_z \delta\tau_z) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta P_i. \quad (8)$$

Wzór powyższy przedstawia drugą postać zasady prac przygotowanych, wyróżniającą się tym, że wariacji podlegają sity i naprężenia, a nie odkształcenia.

Między ujęciem zasady prac przygotowanych według wzoru (5) a relacją podaną przez wzór (8) mamy zasadniczą różnicę.

Wzór (8) jest poprawny jedynie dla nieskończenie małych wartości ε i p , natomiast we wzorze (5) mogą one mieć wartości dowolne.

W obu postaciach zasada prac przygotowanych stosuje się dla materiałów sprężystych jak i elastoplastycznych.

Drugie sformułowanie posiada jednak znacznie węższy zakres zastosowania niż sformułowanie pierwsze.

W konkluzji można by wnosić, że niezależnie od prawa łączącego odkształcenia i naprężenia zawsze możemy skorzystać z jednego z dwóch przytoczonych sformułowań zasady prac przygotowanych, zwracając jedynie uwagę na zakres stosowalności sformułowania drugiego podającego wariację podług naprężeń. Nie napotkaliśmy przy tym na żadne ograniczenie, z powodu którego nie można by stosować zasady prac przygotowanych do zjawiska wyboczenia jako układu nieliniowo sprężystego, jak to twierdzili niektórzy badacze niemieccy np. Pöschl.

Prawdopodobnie zastrzeżenie o niemożności stosowania zasady prac przygotowanych do zjawiska wyboczenia wynikało z tego, że dla obciążeń ponadkrytycznych w ogólności nie ma liniowej zależności między wielkością sił obciążających a przemieszczeniami ustroju, chociażby materiał podlegał prawu Hooke'a.

Z powyższych rozważań widzimy, że tak dla materiałów sprężystych, jak i dla elastoplastycznych przy nieskończenie małych przemieszczeniach możemy zmieniać między sobą nieskończenie małe przyrosty naprężeń i odpowiadające im przyrosty odkształceń niezależnie od kolejności występowania poszczególnych wielkości,

czyli

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta P_i^{(1)} \delta p_i^{(2)} = \sum_{i=1}^{i=n} \delta p_i^{(1)} \delta P_i^{(2)}. \quad (9)$$

Możemy więc przy małych wychyleniach pręta z położenia równowagi w otoczeniu danej siły ponadkrytycznej stosować związki wynikające z obu wyżej podanych sformułowań zasady prac przygotowanych. W przypadku interesującego nas szczególnie punktu rozdwojenia stanu równowagi wiemy, że przejście z jednego stanu równowagi do stanu drugiego nie jest związane z nakładem pracy.

Wobec tego przy obciążeniu ustroju siłą krytyczną równanie (7) przyjmie postać

$$\int dV (\delta\sigma_x \delta\varepsilon_x + \delta\sigma_y \delta\varepsilon_y + \delta\sigma_z \delta\gamma\varepsilon_z + \delta\tau_x \delta\gamma_x + \delta\tau_y \delta\gamma_y + \delta\tau_z \delta\gamma_z) = 0. \quad (10)$$

Podobnie prawe strony równań (5) i (8) będą równe zeru.

2. Równania równowagi dla sił krytycznych

Zasada prac przygotowanych dotyczy układów znajdujących się w równowadze, czyli tak podpartych, aby nie występowało zjawisko ruchu niejednostajnego układu jako całości.

Zaliczając obciążenia jak również oddziaływania w miejscach podparcia lub utwierdzenia do sił zewnętrznych, zakładamy, że znajdują się one między sobą w równowadze.

Mówiąc zaś o równowadze, dla której stosuje się zasadę prac przygotowanych, mamy na myśli równowagę między siłami zewnętrznymi a siłami wewnętrznymi, czyli naprężeniami.

Jeśli mamy dany związek między naprężeniami a odkształceniami oraz ustalone siły zewnętrzne, to każdy punkt rozpatrywanego ciała przyjmie po jego odkształceniu jednoznacznie określone położenie równowagi.

Powyższa jednoznaczność nie jest wprost oczywista dla wartości przelomowych na granicy rozdwojenia równowagi, gdzie przy tych samych parametrach jest możliwe przejście z jednego stanu równowagi do dwóch, czyli do stanu równowagi stałej lub do stanu równowagi chwiejnej.

W przypadku siły obciążającej P równej sile krytycznej P_k mamy więc do czynienia ze stanem granicznym między stanem równowagi stałej i równowagi chwiejnej. Przejście z jednego stanu równowagi do drugiego nie wymaga żadnego przyrostu odkształcenia lub siły obciążającej, gdyż stan graniczny jest dokładnie stanem „punktowym“ łączącym w sobie idealnie dwa potencjonalne przeciwieństwa.

Aby uniknąć trudności rozpatrywania stanu równowagi bezpośrednio dla siły krytycznej, możemy stwierdzić, że ustrój posiada dwa położenia równowagi znajdujące się nieskończenie blisko siebie po obu stronach „punktowego“ przedziału krytycznego.

Wtedy oznaczając składowe przemieszczeń dla pierwszego stanu równowagi, który traci swoją stateczność przez u_0, v_0, w_0 , zaś składowe dru-

giego stanu równowagi przez u, v, w , to przejście ze stanu pierwszego do stanu drugiego otrzymamy dodając do składowych przemieszczeń w stanie pierwszym wielkości dopełniające au_1, av_1, aw_1 . Będzie więc

$$\begin{aligned} u &= u_0 + au_1, \\ v &= v_0 + av_1, \\ w &= w_0 + aw_1, \end{aligned} \tag{11}$$

gdzie a — współczynnik nieskończenie mały niezależny od x, y, z , u_1, v_1, w_1 — wielkości skończone składowych przemieszczenia zależne od położenia (x, y, z) .

W pracy prof. Новожилова, *Основы нелинейной теории упругости*, w rozdziale V podana została wyczerpująca dyskusja związków, jakie wyrażają stan równowagi dla a nieskończenie malejącego.

Ważnym wnioskiem, jaki można by wysnuć z tej dyskusji dla niniejszej rozprawy, jest stwierdzenie możliwości zastosowania zasady prac przygotowanych w granicy nawet dla punktów rozdwojenia, gdyż i dla nich panuje równowaga, jako zawarta między dwoma nieskończenie bliskimi stanami równowagi pomiędzy siłami zewnętrznymi i siłami wewnętrznymi, a o tę właśnie równowagę chodzi nam w zasadzie prac przygotowanych.

Zbliżając się od obciążenia ponadkrytycznego do obciążenia krytycznego jak również od obciążenia podkrytycznego do krytycznego ciągle mamy do czynienia z ustrojem znajdującym się w równowadze.

Zwęzlenie tych przedziałów nie prowadzi do jakiegoś stanu, dla którego ustrój miałby nie dochowywać warunku równowagi sił wewnętrznych i sił zewnętrznych.

Siła krytyczna jest więc tylko szczególną wartością sił, jakie spełniają warunki równowagi. Jej osobliwość polega wyłącznie na rozgraniczeniu różnych stanów równowagi dla określonego ustroju.

3. Liniowa zależność między obciążeniami a odkształceniami

Rozpatrzmy pracę statyczną pręta prostego obciążonego siłą krytyczną P_k oraz pracę pręta obciążonego siłą P nieco większą od P_k , by następnie uważać P_k jako granicę, do której dąży P od wartości większych ku mniejszym.

Obecnie chodzi nam o stwierdzenie, według jakiego prawa następuje przyrost przemieszczeń w stosunku do przyrostu obciążeń dla przedziału obciążeń bardzo mało różnych od wartości krytycznych.

Udzielmy skróceniu λ nieskończenie małego przyrostu przy niezmienniej sile P (rys. 1).

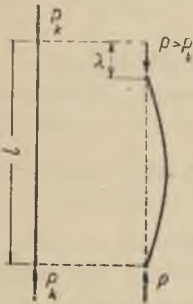
Następuje wtedy doładowanie energii potencjalnej odkształcenia o wielkości δU .

Siła P wykonała pracę

$$\delta L = P \delta \lambda.$$

Według zasady prac przygotowanych zachodzi równość

$$\delta U - P \delta \lambda = 0. \quad (12)$$



Oznaczając przez wskaźnik ε wariację podług odkształceń, możemy napisać

$$\delta_\varepsilon (U - P\lambda) = 0. \quad (13)$$

W ogólności przy obciążeniu pręta momentami skupionymi, siłami podłużnymi i siłami poprzecznymi praca sił wewnętrznych może być podana za pomocą związku

$$U = \int (M \delta m + Q \delta q + N \delta n) dz, \quad (14)$$

gdzie M , Q i N oznaczają odpowiednio moment zginający, siłę poprzeczną i siłę podłużną, zaś δm , δq , δn — odpowiednie przyrosty przemieszczeń dla powyższych wielkości statycznych.

Praca sił zewnętrznych wynosi:

$$L = (P \delta \lambda + S \delta v). \quad (15)$$

Biorąc zamiast nieskończenie małych przyrostów δ wprost nieskończenie małe wartości wymienionych powyżej wielkości statycznych, czyli uważając \bar{m} , \bar{q} , \bar{h} i \bar{v} za nieskończenie małe możemy napisać

$$\int (M \bar{m} + Q \bar{q} + N \bar{n}) dz = \int (P \bar{\lambda} + S \bar{v}). \quad (16)$$

Dla nieskończenie małych przemieszczeń możemy więc mówić o liniowej zależności między obciążeniami a siłami wewnętrznymi nawet dla materiałów nieliniowo sprężystych.

O słuszności powyższego twierdzenia można się przekonać bezpośrednio badając związek, jaki zachodzi między wielkością odkształcenia λ a stosunkiem siły ponadkrytycznej P do siły krytycznej P_k dla pręta dwuprzegubowego o stałym przekroju.

Oznaczając przez

$$m = \frac{P}{P_k} \quad m \approx 1, \quad (17)$$

możemy napisać jeden ze znanych wzorów na λ w postaci

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{8}{3} \sqrt{m-2} \left(1 + \frac{1}{3m}\right). \quad (18)$$

Przyjmując $m=1+\varepsilon$ przekształcamy wzór (18) pomijając kwadraty ε względem jedności jako małe.

Otrzymamy wtedy

$$\lambda = 2\varepsilon l. \quad (19)$$

Znaczy to, że dla nieskończenie małych przyrostów siły ($P-P_k$) otrzymujemy odpowiadające im liniowe przyrosty odkształceń.

Słuszność wzoru (19) widoczna jest również z poniższego zestawienia.

m	$\frac{\lambda}{l}$
1,010	0,0198986
1,009	0,0179167
1,008	0,0160019
1,007	0,0119509
1,006	0,0119623
1,005	0,0100398
1,004	0,0079833
1,003	0,0059906
1,002	0,0039941
1,001	0,0019961

Przy liniowym zmniejszeniu się siły P dążącej do P_k wartość λ maleje z dużym przybliżeniem również liniowo do zera.

4. Obliczanie wielkości sił krytycznych dla prętów

Zastosujemy zasadę prac przygotowanych do wyznaczenia wielkości siły krytycznej dla najprostszych schematów podparcia i obciążenia pręta prostego.

Na rys. 2 mamy przedstawiony układ zasadniczy obciążony siłą P oraz układ przygotowany obciążony siłą $Q=1$ w położeniu wysokości pręta.

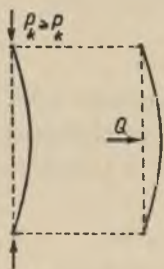
Uważając początkowo wpływ sił poprzecznych jako pomijalny, możemy stan równowagi układów po odkształceniu wywołanym siłą przygotowaną Q uzależnić wyłącznie od wielkości momentów zginających.

Założmy następnie, że odkształcona jest podana za pomocą równania odpowiadającego sensowi fizycznemu zjawiska wybočenja np. w postaci:

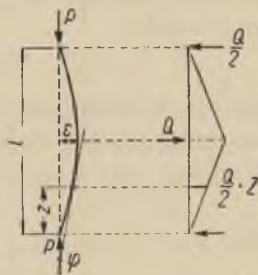
$$y = \varepsilon \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (20)$$

gdzie ε jest wysokością półfali sinusoidy o bardzo małej wysokości, mierzonej w środku pręta (rys. 3).

Uwzględniając tylko wpływ momentów zginających musimy uzależnić wielkość P od innej wielkości łączącej to P z momentem zginającym, a więc najprościej z kątem obrotu danego przekroju φ .



Rys. 2



Rys. 3

Wychodząc z zasady, że suma prac przygotowanych sił zewnętrznych i wewnętrznych jest równa zero, możemy podać zupełnie ścisły związek

$$-\frac{Q}{2} z \cdot \delta\varphi + Q \cdot \delta\varepsilon = 0, \quad (21)$$

czyli przechodząc z wariacji do różniczek względem tych samych zmiennych otrzymamy:

$$-\int \frac{Q}{2} z d\varphi + Q\varepsilon = 0. \quad (22)$$

Biorąc

$$Q = 1,$$

$$\varphi = \frac{dy}{dz} \quad \text{czyli} \quad d\varphi = \frac{d^2y}{dz^2} dz,$$

oraz

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{M}{EJ}$$

otrzymamy:

$$2 \int_0^{l/2} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{z}{2} \cdot dz = \varepsilon.$$

Zbliżając się od P do P_k możemy w granicy przyjąć

$$M = P_k \cdot y = P_k \cdot \varepsilon \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (23)$$

czyli

$$2 \int_0^{l/2} \frac{P_k \varepsilon \sin \frac{\pi z}{l}}{EJ} \cdot \frac{z}{2} \cdot dz = \varepsilon,$$

$$\frac{P_k}{EJ} \int_0^{l/2} z \sin \frac{\pi z}{l} dz = 1.$$

Obliczamy wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{l/2} z \sin \frac{\pi z}{l} dz = \frac{l^2}{\pi^2}.$$

Po podstawieniu otrzymamy

$$\frac{P_k}{EJ} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} = 1.$$

Skąd ostatecznie

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}. \quad (24)$$

W ten sposób doszliśmy do znanego wzoru pomijając zupełnie zastosowanie klasycznej metody równań różniczkowych, jaka jest powszechnie stosowana przy wyznaczaniu sił krytycznych. Zupełna zgodność wyników uzyskanych w naszym przykładzie z wzorami ścisłymi świadczy o dobrze założonym równaniu odkształconej.

W przypadku utwierdzenia obu końców pręta (rys. 4) zakładamy

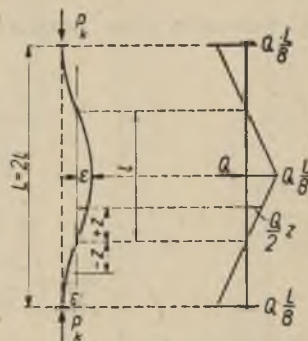
$$y = \varepsilon \cos \frac{\pi z}{l}, \quad (25)$$

gdzie

$$l = \frac{L}{2}.$$

Obliczając jak poprzednio otrzymamy

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{4\pi^2 EJ}{L^2}. \quad (26)$$



Rys. 4

W podobny sposób wyznaczamy wielkość siły krytycznej dla pręta jednym końcem utwierdzonego, drugim zaś zupełnie swobodnego (rys. 5).

$$y = \varepsilon \cos \frac{\pi z}{l},$$

gdzie

$$l = 2L.$$

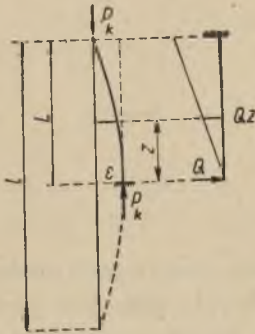
Wtedy

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = \frac{\pi^2 EJ}{4L^2}. \quad (27)$$

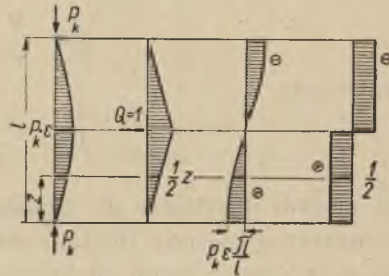
Przeprowadźmy jeszcze obliczenie wielkości siły krytycznej dla pręta dwuprzegubowego z uwzględnieniem sił poprzecznych. Wtedy będzie

$$M = P_k \cdot y = P_k \cdot \varepsilon \sin \frac{\pi z}{l},$$

$$T = P_k \cdot y' = P_k \frac{\pi}{l} \varepsilon \cos \frac{\pi z}{l}. \quad (28)$$



Rys. 5



Rys. 6

Z równania prac przygotowanych otrzymamy (rys. 6)

$$2 \int_0^{l/2} \frac{M}{EJ} \cdot \frac{z}{2} \cdot dz + 2 \int_0^{l/2} \frac{1}{2} \cdot \frac{kT}{GF} \cdot dz = \varepsilon, \quad (29)$$

czyli

$$\frac{P_k}{EJ} \int_0^{l/2} z \sin \frac{\pi z}{l} dz + \frac{kP_k \pi}{GF l} \int_0^{l/2} \cos \frac{\pi z}{l} dz = 1.$$

Obliczamy wartość całki oznaczonej

$$\int_0^{l/2} \cos \frac{\pi z}{l} dz = \left[\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi z}{l} \right]_0^{l/2} = \frac{l}{\pi}.$$

Po podstawieniu uzyskamy

$$\frac{P_k}{EJ} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} + \frac{kP_k}{GF} = 1.$$

Po prostych przekształceniach otrzymamy ostatecznie

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{k\pi^2 EJ}{l^2 GF}}, \quad (30)$$

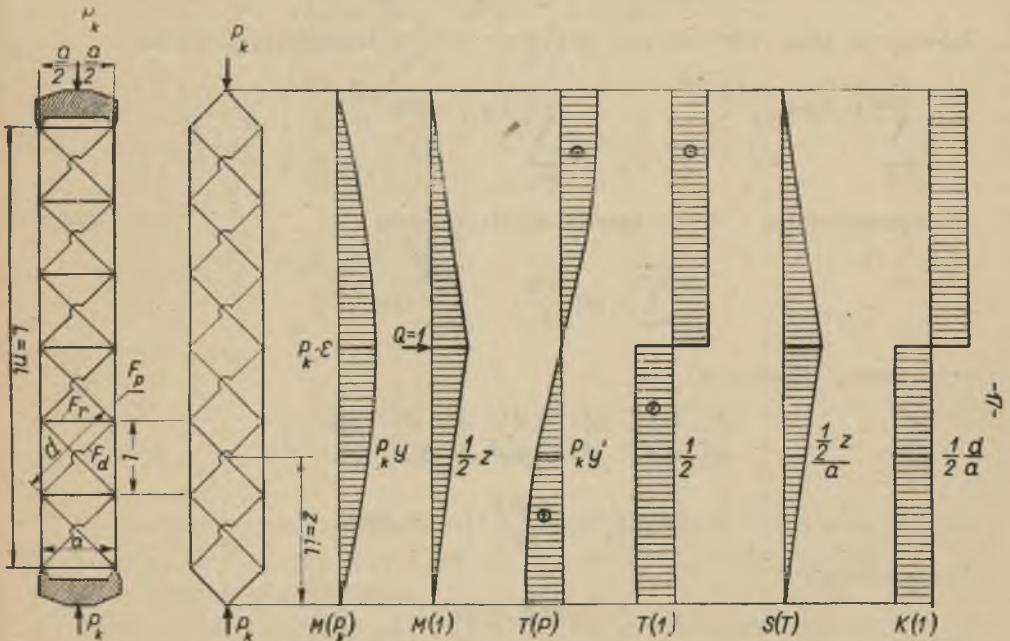
czyli wartość nieco mniejszą od wartości eulerowskiej.

W powyższym wzorze k jest współczynnikiem uwzględniającym kształt przekroju poprzecznego pręta, zaś G — modułem sprężystości postaciowej.

5. Obliczanie wielkości sił krytycznych dla kratownic

Zastosujemy powyżej opisany sposób wyznaczania siły krytycznej dla ustrojów, jakie są spotykane w konstrukcjach trzonów przewodniczych stalowych wież wyciągowych.

Na rysunku (7) z lewej strony mamy podany jeden z często spotykanych typów konstrukcji. Na podstawie badań modelowych przeprowa-



Rys. 7

dzonych przez autora wynika, że w czasie ściskania ustroju siłą osiową przy niezbyt dużych siłach pręty poziome prawie zupełnie nie pracują. Możemy więc jako jedną z alternatyw wyznaczyć siłę krytyczną dla kratownicy pozbawionej rozpórek poziomych.

Tok obliczania siły krytycznej będzie zupełnie podobny jak dla pręta dwuprzegubowego z uwzględnieniem siły poprzecznej. Należy tylko uwzględnić odpowiednio pracę przygotowaną dla pasów i krzyżuleców.

Ponieważ warunki pracy statycznej w obrębie jednego przedziału nie zmieniają się, zamiast całkowania dokonamy sumowania.

Wartości na M i T będziemy mieli jak poprzednio dla pręta dwuprzegubowego z tym, że z rośnie tutaj nie w sposób ciągły, lecz skokami od węzła do węzła.

$$M = P_k \cdot y = P_k \varepsilon \sin \frac{\pi z}{L} = P_k \varepsilon \sin \frac{\pi i l}{L},$$

$$T = P_k \cdot y' = P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi z}{L} = P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi i l}{L}. \quad (31)$$

Siły w prętach dla i tego przedziału obliczymy z prostych związków statycznych

$$S_i = \frac{M_i}{a} \quad K_i = \frac{1}{2} T_i \frac{d}{a}. \quad (32)$$

Równanie prac wirtualnych przyjmie wtedy następującą postać:

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \varepsilon \sin \frac{\pi i l}{L} \frac{1}{2} \dot{u}}{a} \cdot \frac{l}{EF_p} + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi i l}{L}}{2} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{d}{2EF_d} = \varepsilon. \quad (33)$$

Po uproszczeniu i wyznaczeniu wartości sum

$$\sum_{i=1}^{i=n} i l \sin \frac{\pi i l}{L}; \quad \sum_{i=1}^{i=n} \cos \frac{\pi i l}{L},$$

otrzymamy równanie:

$$\frac{P_k}{a^2} \cdot \frac{l}{EF_p} \cdot \frac{2L^2}{\pi^2 l} + \frac{P_k}{4a^2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{d^3}{EF_p} \cdot \frac{2L}{\pi l} = 1,$$

$$P_k \left(L^2 l + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{4F_d} \right) = \pi^2 a^2 EF_p.$$

Podstawiając

$$a^2 F_p = 2J,$$

będzie

$$P_k \left(\frac{l}{2} + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{8L^2 F_d} \right) \frac{2}{l} = \frac{\pi^2 EJ}{L^2}.$$

Ostatecznie

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{4L^2 l F_d}}. \quad (34)$$

Przeprowadźmy obliczenie powyższej kratownicy przy uwzględnieniu współpracy rozpórek.

Równanie prac wirtualnych przyjmie wtedy postać

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \varepsilon \sin \frac{\pi i l}{L}}{a} \cdot \frac{1}{2} \frac{i l}{l} \cdot \frac{l}{a E F_p} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} \cdot P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi i l}{L} \cdot \frac{a}{E F_r} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi i l}{L}}{2} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{a} \cdot \frac{d}{2 E F_d} = \varepsilon. \quad (35)$$

Po uproszczeniach i dokonaniu sumowań będzie

$$\frac{P_k}{a^2} \cdot \frac{l}{E F_p} \cdot \frac{2 L^2}{l \pi^2} + \frac{P_k}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \frac{a}{E F_r} \cdot \frac{2 L}{l \pi} + \frac{P_k}{2 a^2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{d^3}{2 E F_d} \cdot \frac{2 L}{l \pi} = 1,$$

$$\frac{2}{l} \left(\frac{P_k L^2 l}{\pi^2 a^2 E F_p} + \frac{P_k a}{2 E F_r} + \frac{P_k d^3}{4 a^2 E F_d} \right) = 1,$$

$$P_k \left(L^2 l + \frac{\pi^2 a^3 F_p}{2 F_r} + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{4 F_d} \right) \frac{2}{l} = \pi^2 E a^2 F_p,$$

$$P_k \left(\frac{l}{2} + \frac{\pi^2 a^3 F_p}{4 L^2 F_r} + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{8 L^2 F_r} \right) \frac{2}{l} = \frac{\pi^2 E J}{L^2}.$$

Ostatecznie:

$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 a^3 F_p}{2 L^2 l F_r} + \frac{\pi^2 d^3 F_p}{4 L^2 l F_d}},$$

czyli

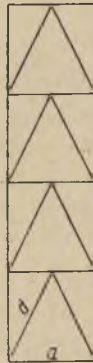
$$P_k = \frac{\pi^2 E J}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 F_p}{2 L^2 l} \left(\frac{a^2}{F_r} + \frac{d^3}{2 F_d} \right)}. \quad (36)$$

W podobny sposób oblicza się wielkość siły krytycznej dla pozostałych dwóch schematów ścian bocznych trzonu, tj. o skratowaniu K lub o pojedynczych przekątниках.

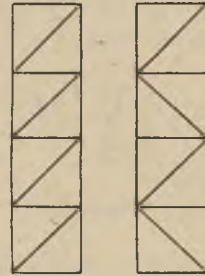
Weźmy kratownicę typu K (rys. 8). Równanie prac wirtualnych będzie prawie identyczne z równaniem (35) z tą tylko różnicą, że ostatni człon równania (35) przybierze dla kraty typu K postać:

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi i l}{L}}{2} \cdot \frac{d}{\frac{1}{2} a} \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{\frac{1}{2} a} \cdot \frac{d}{2 E F_d} = 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \frac{\pi}{L} \varepsilon \cos \frac{\pi i l}{L}}{2} \cdot \frac{2 d}{a} \cdot \frac{d}{a} \cdot \frac{d}{2 E F_d},$$

czyli wartość 4-krotnie większą niż dla kraty z krzyżulcami wzdłuż przekątnej (przy jednakowo oznaczonych długościach krzyżulców).



Rys. 8



Rys. 9

Wobec tego siła krytyczna dla kraty typu K wynosi

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 F_p}{2L^2 l} \left(\frac{a^3}{F_r} + 2 \frac{d^3}{F_d} \right)}. \quad (37)$$

Dla kraty według rysunku 9 byłoby

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 F_p}{2L^2 l} \left(\frac{a^3}{F_r} + \frac{d^3}{F_d} \right)}, \quad (38)$$

ponieważ zamiast wartości $d/2EF_d$ we wzorze (35) wstawilibyśmy w tym przypadku d/EF_d .

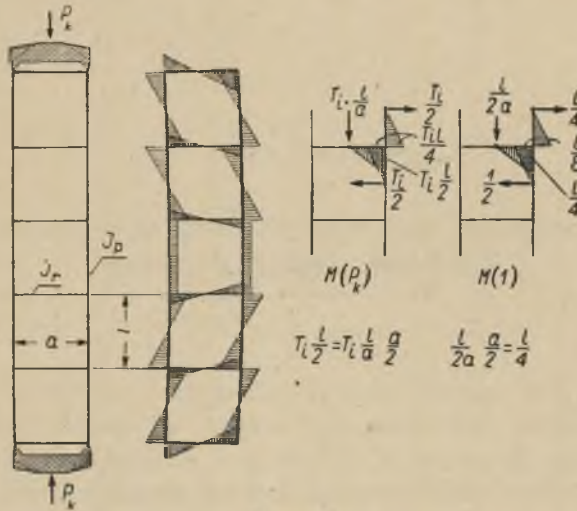
6. Siły krytyczne dla ustroju bezprzekątniowego

Powyżej zastosowany sposób obliczania sił krytycznych dla ustrojów kratowych może być zastosowany również do określania wielkości tych sił dla ustroju bezprzekątniowego, jaki czasami można spotkać w konstrukcjach trzonu przewodniczego wież wyciągowych (rys. 10).

Różnica w ujęciu zagadnienia polega jedynie na konieczności dodatkowego uwzględnienia energii potencjalnej powstałej na skutek zginania poszczególnych prętów.

Biorąc ustrój o dużej ilości pól możemy założyć, że wielkość momentów zginających dla obu prętów pasa schodzących się w jednym węźle jest jednakowa i zależna jedynie od położenia tego węzła w stosunku do całości ustroju. Poza tym moment zginający rozpórkę jest równy

w miejscu jej utwierdzenia sumie bezwzględnych wartości momentów maksymalnych w prętach pasa.



Rys. 10

Praca wirtualna całego ustroju składa się z pracy wirtualnej pasów przy ich ściskaniu oraz pracy wirtualnej pasów i rozpórek przy ich zgięciu, czyli:

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{P_k \varepsilon \sin \frac{\pi i l}{L}}{a} \cdot \frac{1}{2} i l \cdot \frac{l}{EF_p} + 4 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{T_i}{2EJ_p} \cdot \frac{l^3}{3 \cdot 8} \cdot \frac{1}{4} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{T_i l}{EJ_p a} \cdot \frac{a^3}{3 \cdot 8} \cdot \frac{l}{2a} = 1 \cdot \varepsilon, \quad (39)$$

$$2 \frac{P_k}{a^2} \cdot \frac{L^2}{\pi^2 l} \cdot \frac{l}{EF_p} + \frac{\pi}{L} \sum_{i=1}^{i=n} P_k \cos \frac{\pi i l}{L} \cdot \frac{l^3}{48EJ_p} + \frac{\pi}{L} \sum_{i=1}^{i=n} P_k \cos \frac{\pi i l}{L} \cdot \frac{al^2}{24EJ_p} = 1,$$

$$\frac{2P_k L^2}{\pi^2 a^2 EF_p} + \frac{\pi}{L} \cdot P_k \cdot \frac{2L}{\pi l} \cdot \frac{l^3}{48EJ_p} + \frac{\pi}{L} \cdot P_k \cdot \frac{2L}{\pi l} \cdot \frac{al^2}{24EJ_p} = 1.$$

Wprowadzając $J = \frac{1}{2} a^2 F_p$ i po uproszczeniach otrzymamy ostatecznie

$$P_k = \frac{\pi^2 EJ}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 l^2}{24L^2} \cdot \frac{J}{J_p} + \frac{\pi^2 al}{12L^2} \cdot \frac{J}{J_p}} \quad (40)$$