ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ELEKTRYKA z. 64 Nr kol. 593

Marek BRODZKI
Wacław SONELSKI

ZASTOSOWANIE PEWNYCH PODGRUP GRUPY AFINICZNEJ ZESPOLONEJ W GEOMETRYCZNEJ TEORII SIECI ELEKTRYCZNYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono możliwość zastosowania pewnych podgrup grupy afinicznej zespolonej, przy współzmienniczym formułowaniu praw Kirchhoffa, dla sieci elektrycznych wieloprzewodowych. Uzasadniono te możliwości i pokazano korzyści wynikające z wprowadzenia tych podgrup.

Wstęp

Ogólne omówienie sposobów wprowadzenia metod geometrycznych do analizy sieci elektrycznych zawierają prace [1], [2]. W pracy [2] autor wspomina nawet o możliwościach zastosowania opisanych niżej podgrup, jednakże nie rozwija zagadnienia. Niniejszy artykuł jest pewnym uzupełnieniem problematyki zawartej w pracy [2]. W dalszym ciągu wykorzystamy założenia i niektóre wyniki uzyskane w cytowanej publikacji.

Ogólnie rzecz biorąc, w analizie czteroprzewodowych sieci niesymetrycznych posługujemy się głównie metodą składowych symetrycznych. Wprowadzenie tej metody wynika z chęci uzyskania łatwej do rozwiązania postaci równań opisujących sieć, w której macierze impedancyjne są diagonalne. Jednocześnie, dzięki odpowiednim własnościom transformacji fazowego układu współrzędnych na symetryczny, otrzymujemy współzmienniczy (kowariantny) zapis praw Ohma i Kirchhoffa, co oznacza, że ich postać macierzowa jest w obu układach podobna.

Oczywiście takich układów współrzędnych może być więcej niż dwa. Do opisu sieci wybieramy takie, które zapewniają odpowiednie korzyści w naszych rozważaniach, przy czym wybór układów podlega pewnym regułom, tak aby zachowana została współzmienniczość sformułowanych w nich równań. Reguły tego wyboru wiążą się z pojęciem tzw. struktury Kleina. Strukturą Kleina nazywamy zbiór układów współrzędnych, otrzymanych z jednego ustalonego wstępnie (tzw. praukładu), przy pomocy transformacji należących do pewnej grupy [4]. Wobec tego nasze rozważania dotyczące kowariantnego zapisu praw Kirchhoffa dla sieci wieloprzewodowych przebiegać będą wg następującego schematu:

a) formułujemy założenia wstępne, określające zbiór badanych sieci,
b) określamy przestrzenie (prądową i napięciową), w których prowadzić będziemy ich analizę,

c) przyjmujemy praukłady współrzędnych,
d) określamy zbiory dopuszczalnych układów współrzędnych poprzez przyjęcie grup transformacji działających na praukłady.

Posiadając ww. ustalenia można sformułować równania opisujące sieć w sposób współzmienniczy (na podstawie równań Ohma i Kirchhoffa wyrażonych pierwotnie w praukładzie).

2. Założenia podstawowe dotyczące analizowanych sieci

Będziemy się zajmować sieciami złożonymi ze skończonej ilości gałęzi n + 1 przewodowych ($n \in N$), zbudowanych z elementów o stałych skupionych. Gałęzie mogą być przelotowe (rys. 1) lub końcowe (rys. 2). Założenie dotyczące ilości przewodów w gałęziach jest uogólnieniem w stosunku do typowego dla praktyki przypadku, jakim są tzw. układy trójfazowe - rozpatrywane również w pracy [2]. Dla wygody, w dalszym ciągu stale nazywać będziemy n + 1-szy przewód każdej gałęzi umownie przewodem zerowym. O elementach tworzących gałęzie zakładamy, że są w ogólnie przyjętym sensie liniowe. Zakładamy dalej, że źródła występujące w sieci są opisane sinusoidalnymi funkcjami zmiennej czasu. Dla obliczeń sieci w stanie ustalonym pozwoli to na wykorzystanie metody symbolicznej. Elementy pokazane na rys. 1 i 2 mają gałęzie opisane następującymi wielkościami o składowych:

$$\underset{g}{E}^{\lambda},\ \underset{g}{Z}^{\lambda}{}_{\alpha},\ \underset{g}{U}^{\lambda},\ \underset{g}{J}^{\alpha},\ \underset{g_0}{E},\ \underset{g_0}{Z},\ \underset{g_0}{U},\ \underset{g_0}{J}.$$

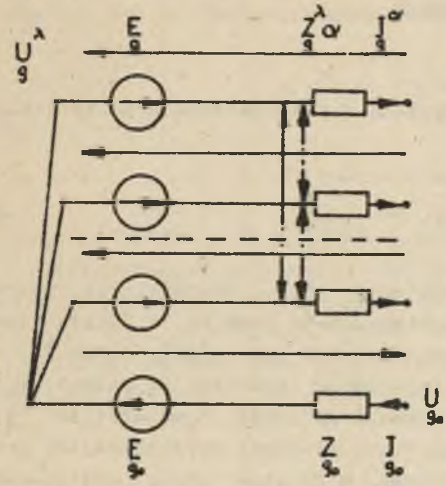
Sens oznaczeń jest następujący:

- wskaźniki pod dużą literą oznaczają numer gałęzi,
- wskaźniki z prawej strony są zwykłymi wskaźnikami tensorowymi, które przebiegają np. pewien podzbiór liczb naturalnych,
- wskaźniki numeru gałęzi z zerem oznaczają zgodnie z umową n+1-szy przewód danej gałęzi.

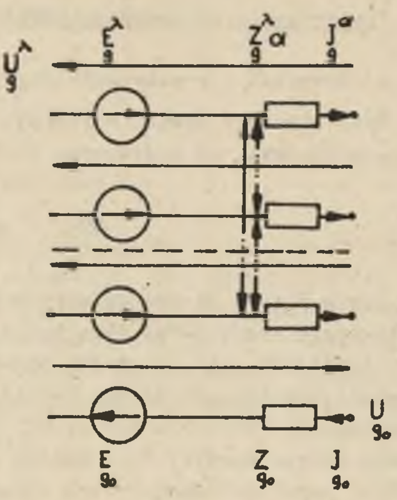
Ze skończonej ilości tak zbudowanych gałęzi (połączonych z zachowaniem zgodności końcówek (1,...,n+1)) tworzymy sieć. Obok oczek może ona zawierać pewną liczbę gałęzi końcowych. Przykładowe ich rozmieszczenie pokazano na rys. 3.

Poza tym sieć nie musi już spełniać żadnych specjalnych warunków. Jest to istotna różnica w stosunku do sieci analizowanych w pracy [2], gdzie musiały one tworzyć drzewo lub też w inny sposób zapewniać utrzymanie zasadniczego związku, który dla układu czteroprzewodowego w fazowym układzie współrzędnych wyglądał następująco:

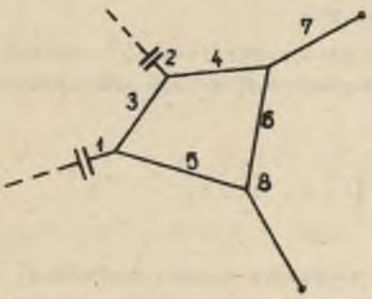
$$\underset{g_0}{J} = \underset{g}{J}^{a} + \underset{g}{J}^{b} + \underset{g}{J}^{c}. \tag{1}$$



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Spełnienie tej zależności dla całej sieci było warunkiem przeprowadzenia w tymże fazowym układzie współrzędnych "idealizacji" przewodu zerowego, tzn. pozbawienia go impedancji i źródeł. Dopiero sieć z takimi przewodami pozwalała na kowariantny zapis opisujących ją równań. Dokonano tego po zamianie jej na równoważną prądowo sieć trójprzewodową (pozbawioną desymetryzującego przewodu zerowego). Zastosowanie przez nas pewnych specyficznych podgrup transformacji pozwoli uwolnić się od tak krępujących założeń, upraszczając tym samym proces kowariantnego formułowania równań sieci.

3. Przestrzenie i praukłady współrzędnych

a) Praukład w przestrzeni prądowej

Jako elementy obwodu występują gałęzie n + 1 przewodowe scharakteryzowane n prądami, co zapisujemy krótko:

$$J^{\alpha}_{g}, \qquad \alpha \in \left\{1, 2 \ldots n\right\}. \tag{2}$$

Sę one wyrażone za pomocą metody symbolicznej jako wartości skuteczne. Wobec tego każda gałąź może być scharakteryzowana punktem w przestrzeni C^n. Zakładamy więc, że nasza przestrzeń punktowe jest przestrzenią C^n, co pozwala przyjęć, że między przestrzenią prądową (punktową) a przestrzenią analityczną $C^n = C \times C \times \ldots C$ (n-krotnie) zachodzi homeomorfizm. Tym samym możemy uważać, że w naszej przestrzeni prądowej wprowadziliśmy praukład. Jest nim homeomorfizm tożsamościowy. W dalszym ciągu obowiązywać będzie stale założenie, że przestrzeń C^n odgrywa jednocześnie rolę punktowej i analitycznej.

b) Praukład w przestrzeni napięciowej

Jako współrzędne punktu w przestrzeni napięciowej C^n służyć będą napięcia wzdłużne n pierwszych przewodów. Wobec tego mamy jako współrzędne napięcia:

$$U^{\lambda}_{g}, \qquad \lambda \in \left\{1, 2, \ldots, n\right\}. \tag{3}$$

Rozumowaniem analogicznym jak w przypadku prądów dochodzimy do posiadania przestrzeni napięciowej (punktowej, będącej jednocześnie analityczną) - C^n oraz praukładu współrzędnych w tejże przestrzeni.

4. Zbiory dopuszczalnych układów współrzędnych

a) Dla przestrzeni prądowej

Transformacje, jakim poddawać będziemy nasz praukład, należeć będą do pewnej podgrupy, grupy afinicznej zespolonej (centrycznej) G_c. Jest to grupa, do której należą transformacje liniowe, o jakobianie różnym od zera i wyrazie wolnym równym zeru, przekształcające przestrzeń C_n na siebie. Dla prądów mamy zatem następującą regułę transformacyjną:

$$\left.\begin{aligned} & J^{\alpha'} = a^{\alpha'}_{\alpha} J^{\alpha}, \\ \text{gdzie:} & \\ & a^{\alpha'}_{\alpha} \in C, \text{ przy czym } \det\left[a^{\alpha'}_{\alpha}\right] \neq 0. \end{aligned}\right| \tag{4}$$

Podgrupę zastosowaną przez nas określą warunki dodatkowe:

$$\left.\begin{array}{c} \sum\limits_{\alpha'} a_{\alpha}^{\alpha'} = k', \\ \\ k' \in C, \quad \text{przy czym} \quad k' \neq 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

gdzie:

Możemy tu założyć, że (n > 1), bowiem dla (n=1) warunek (5) nie stanowiłby dodatkowego ograniczenia w doborze stałych $a_{\alpha}^{\alpha'}$. Aby sprawdzić, że tak określone transformacje rzeczywiście tworzą grupę, badamy złożenie dwóch transformacji określonych wzorem (4) oraz odwrotność takiej transformacji.

Załóżmy, że mamy trzy układy współrzędnych o wskaźnikach oznaczonych odpowiednio $\alpha, \alpha', \alpha''$. Od pierwszego układu do drugiego prowadzi transformacja:

$$\mathrm{J}^{\alpha'} = a_{\alpha}^{\alpha'} \mathrm{J}^{\alpha},$$

a od drugiego do trzeciego:

$$\mathrm{J}^{\alpha''} = a_{\alpha'}^{\alpha''} \mathrm{J}^{\alpha'}.$$

Wobec tego złożenie dwóch transformacji daje w efekcie:

$$\mathrm{J}^{\alpha''} = a_{\alpha'}^{\alpha''} a_{\alpha}^{\alpha'} \mathrm{J}^{\alpha},$$

co jak wiadomo można zapisać krótko:

$$\mathrm{J}^{\alpha''} = a_{\alpha}^{\alpha''} \mathrm{J}^{\alpha}.$$

Transformacja odwrotna istnieje i jest określona wzorem:

$$\mathrm{J}^{\alpha} = a_{\alpha'}^{\alpha} \mathrm{J}^{\alpha'}.$$

przy czym zachodzi zależność:

$$a_{\alpha}^{\alpha'} a_{\beta'}^{\alpha} = \delta_{\beta'}^{\alpha'}. \tag{6}$$

Znany dowód faktu, że zbiór transformacji G_c stanowi grupę pomijamy. Własność grupową narzuconego dodatkowo warunku (5) sprawdzamy poniżej. Dla założonych trzech transformacji współrzędnych mamy:

$$\sum_{\alpha''} a_{\alpha}^{\alpha''} = \sum_{\alpha''} a_{\alpha'}^{\alpha''} a_{\alpha}^{\alpha'},$$

co przy warunku:

$$\sum_{\alpha''} a^{\alpha''}_{\alpha'} = k''_{,}, \quad k''_{,} \neq 0,$$

można zapisać:

$$\sum_{\alpha''} a^{\alpha''}_{\alpha} = k''\sum_{\alpha'} a^{\alpha'}_{\alpha} = k''_{,} \cdot k' = k'' \neq 0. \qquad (7)$$

Dodatkowo, uwzględniając zależność (6), dla transformacji odwrotnej otrzymujemy:

$$\sum_{\alpha'} a^{\alpha'}_{\alpha}\, a^{\alpha}_{\beta'} = \sum_{\alpha'} \delta^{\alpha'}_{\beta'}$$

co można zapisać:

$$k'\sum_{\alpha} a^{\alpha}_{\beta'} = 1 \quad \text{i stąd} \quad \sum_{\alpha} a^{\alpha}_{\beta'} = k_{,}.$$

Zatem otrzymujemy związek:

$$k_{,} = \frac{1}{k'} \neq 0. \qquad (8)$$

b) Przestrzeń napięciowa

Przeprowadzając zupełnie analogiczne rozważania, otrzymujemy strukturę Kleina dla przestrzeni napięciowej. Transformacje mają postać:

$$\left.\begin{aligned} &U^{\lambda'} = b^{\lambda'}_{\lambda} U^{\lambda}, \\ &\text{gdzie:} \\ &\det\left[b^{\lambda'}_{\lambda}\right] \neq 0 \quad \text{oraz} \quad b \in C, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

przy warunku

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\lambda} b^{\lambda'}_{\lambda} = m', \\ &\text{gdzie:} \\ &m' \in C \quad \text{oraz} \quad m' \neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Warunki (5) i (10) oznaczają odpowiednio, że suma wyrazów kolumny względnie wiersza macierzy transformacyjnej jest stała, równa pewnej liczbie zespolonej.

Podane podtrupy można nazwać: uogólnione pseudostochastyczne grupy zespolone, w skrócie ups-grupy. Terminologia ta (proponowana przez Prof.

M. Kucharzewskiego), oparta jest na wprowadzonej w pracach [5] - [9], gdzie rozpatruje się tzw. grupy pseudostochastyczne o elementach rzeczywistych (dla których suma wyrazów wiersza lub kolumny równa jest liczbie 1).

c) Struktura iloczynowa

Przy założeniu, że współrzędne przestrzeni prądowej i napięciowej transformuję się niezależnie od siebie, można utworzyć strukturę będącę iloczynem kartezjańskim struktur utworzonych uprzednio. Bierzemy pod uwagę iloczyn kartezjański przestrzeni prądowej i napięciowej:

$$C^{2n} = C^n \times C^n$$

dysponując teraz strukturą złożoną z uporządkowanych par układów współrzędnych prądowego i napięciowego, wynikających z niezależnych transformacji obu praukładów. Jest to podstawa do tworzenia tzw. obiektów iloczynowych.

5. Charakter geometryczny poszczególnych wielkości fizycznych

a) Napięcia i prądy sieci

Napięcia i prądy gałęziowe, traktowane dotychczas jako współrzędne punktów odpowiednich przestrzeni, tworzą też wektory kontrawariantne o regule transformacji ([3], s. 272):

$$V^{\sigma'} = A^{\sigma'}_{\sigma} V^{\sigma}, \tag{11}$$

Dla struktury opartej o grupę G_c reguły te upraszczają się do postaci, w której pochodne cząstkowe transformacji są stałe

$$V^{\sigma'} = c^{\sigma'}_{\sigma} V^{\sigma}, \quad \text{gdzie} \quad c^{\sigma'}_{\sigma} \in C. \tag{12}$$

Aby wykazać, że są to obiekty geometryczne, należy sprawdzić równanie fundamentalne i warunek identyczności. Prosty dowód można znaleźć np. w podręczniku [3]. Zauważmy, że zacieśnienie grupy transformacji, jakim poddajemy współrzędne, sprawia, że mamy do czynienia z subobiektami odpowiednich obiektów geometrycznych określonych przy pełnej grupie różniczkowej L^n_1 ([4]). Włóknem, czyli zbiorem wszelkich możliwych ciągów składowych wektorów napięć lub prądów we wszystkich układach współrzędnych jest cała przestrzeń C^n. Możemy tu mieć na myśli zarówno obiekty geometryczne szczególne jak i abstrakcyjne ([4]). W przypadku przestrzeni C^n chodzi o obiekt abstrakcyjny.

b) Impedancje jako obiekty geometryczne

Reguła transformacyjna dla impedancji ma postać:

$$Z^{\lambda'}_{\alpha'} = b^{\lambda'}_{\lambda} Z^{\lambda}_{\alpha} a^{\alpha}_{\alpha'}. \tag{13}$$

Równanie fundamentalne i warunek identyczności dla składowych przypisanych impedancji są spełnione ([2], s. 45). Mamy więc do czynienia z obiektem geometrycznym. Dokładniej stanowi on subobiekt obiektu rozpatrywanego w pracy [2].

c) Inne wielkości geometryczne

Opisane podgrupy wprowadziliśmy, aby móc sformułować równania Kirchhoffa dla sieci, której wszystkie $n + 1$ przewodów gałęziowych są identycznej budowy.

Uwaga. Przewód zerowy jest jednak w pewnym sensie wyróżniony. Sprawia to brak sprzężeń prądowych impedancji Z_{g_0}. Można tego uniknąć, np. operując przestrzeniami C^{n+1} dla prądów i napięć oraz podanymi grupami transformacji współrzędnych dla tego przypadku.

Prezentowany w niniejszym artykule wariant geometryzacji teorii rozpatrywanych sieci obrany został dla lepszego wyeksponowania pewnych obiektów geometrycznych, związanych z obecnością tak wyróżnionego przewodu zerowego. Używając przestrzeni C^n można również rozpatrywać sprzężenia impedancji Z_{g_0}, lecz wymaga to wprowadzenia pewnych dalszych obiektów geometrycznych.

Szczególnie drugie prawo Kirchhoffa w sieci o istniejących gałęziach końcowych stwarza trudności, ponieważ oczka dla gałęzi końcowych muszą zamykać przewody zerowe, w przeciwieństwie do innych oczek. Powoduje to konieczność wprowadzenia dodatkowej wielkości, jaką dają napięcia postaci:

$$U^{\lambda} = U^{\mu}, \qquad \lambda, \mu \in \{1, 2, \ldots, n\}, \tag{14}$$

przy czym $U^{\lambda}, U^{\mu} \in C$.

Są to podobiekty i jednocześnie subobiekty wektorów kontrawariantnych [4] napięć wzdłużnych gałęzi, o specyficznym włóknie. Składowe takich wektorów napięć transformują się dzięki przyjętej grupie przekształceń następująco:

$$U^{\lambda'} = b^{\lambda'}_{\lambda} U^{\lambda}, \quad \text{przy czym} \quad \sum_{\lambda}{}' b^{\lambda'}_{\lambda} = m'.$$

Wobec tego, jeżeli zachodzi wzór (14), to w nowym układzie współrzędnych własność ta zostaje zachowana. Istotnie, mamy bowiem:

$$U^{\lambda'} = b_{\lambda}^{\lambda'} U^{\lambda} = m' \ U^{\lambda} = m' U^{\mu},$$

a więc zachodzi w nowym układzie równość:

$$U^{\lambda'} = U^{\mu'}.$$

Wprowadzone napięcia mają regułę transformacyjną

$$U^{\mu'} = m' U^{\mu}, \tag{15}$$

(mamy tu do czynienia z obiektem zupełnie rozkładalnym ([4]). Ich włóknem nie jest jak uprzednio cała przestrzeń C^n, lecz jedynie pewna prosta w tej przestrzeni! Zauważmy, że sytuacja taka nie zaszłaby przy pełnej grupie L_1^n i taki zbiór nie byłby włóknem żadnego obiektu.

W przypadku pierwszego prawa Kirchhoffa dla węzłów gałęzi końcowych sieci można sformułować następującą zależność:

$$\sum_{\alpha} J_g^{\alpha} = J_{g_o}, \qquad \alpha \in \{1,2,\dots,n\}. \tag{16}$$

Na macierze transformacyjne narzuciliśmy warunek:

$$\sum_{\alpha'} a_{\alpha}^{\alpha'} = \sum_{\alpha'} a_{\beta}^{\alpha'} = k' \neq 0.$$

Jeżeli wobec tego zachodzi:

$$\sum_{\alpha} J^{\alpha} = J_0,$$

to w nowym układzie współrzędnych:

$$J'_0 = \sum_{\alpha'} J^{\alpha'} = \sum_{\alpha'} a_{\alpha}^{\alpha'} J^{\alpha} = k' \sum_{\alpha} J^{\alpha},$$

czyli zachodzi:

$$J'_0 = k' J_0. \tag{17}$$

Jest to reguła transformacyjna dla prądu przewodu zerowego. Jest on określony komitantą (o składowej (J)), wektora kontrawariantnego prądu (o składowych (J^{α})), przy działaniu ^{0}ups-grupy.

Na podstawie tych dwóch wielkości możemy wprowadzić jeszcze trzecią. Będzie to impedancja przewodu zerowego o regule przekształcenia:

$$Z'_0 = \frac{m'}{k'} Z_0, \quad \text{przy czym} \quad k' \neq 0. \tag{18}$$

Sprawdzenie, że wielkości dotyczące przewodu zerowego są obiektami geometrycznymi nie jest trudne. (Napięcia przewodów zerowych U_0 tworzą obiekt o regule transformacji (15).)

Uwaga. W skrypcie [4], s. 156 podano twierdzenie, z którego wynika, że dla pełnej grupy L_1^n transformacji nie ma innych obiektów niż J-obiekty (czyli obiekty o regule transformacji zależnej od jakobianu), dla typu (m,n,1), gdzie $m < n$. Opisane wyżej trzy wielkości nie są J-obiektami, co nie przeczy twierdzeniu, gdyż nie operujemy pełną grupą L_1^n.

Do sformułowania praw Kirchhoffa są jeszcze potrzebne współczynniki orientacji gałęzi. Współczynniki te oznaczają odpowiednio:

a_{gu} - symbol orientacji prądowej gałęzi g względem węzła u,

b_{gk} - symbol orientacji prądowej gałęzi g względem oczka k.

Jako obiekty geometryczne są one skalarami.

6. Sformułowanie praw Kirchhoffa dla omawianych sieci oraz równań definicyjnych dla jej elementów

Aby tego dokonać musimy podzielić gałęzie, węzły i oczka na klasy. Części n-przewodowe gałęzi przelotowych i końcowych oznaczamy zmienną $g (g \in G)$. Przewody zerowe tych gałęzi - zmienną $g_0 (g_0 \in G_0)$. Węzły i oczka utworzone wyłącznie przez części n-przewodowe gałęzi oznaczamy odpowiednio zmiennymi u oraz k $(u \in W,\ k \in K)$ - klasa 1. Węzły i oczka utworzone wyłącznie przez przewody zerowe oznaczamy: u_0, k_0 $(u_0 \in W_0,\ k_0 \in K_0)$ - klasa 2. Wreszcie pozostałe węzły i oczka utworzone zarówno przez części n-przewodowe gałęzi jak i przewody zerowe, oznaczamy: u_1, k_1 $(u_1 \in W_1,\ k_1 \in K_1)$ - klasa 3.

Uwaga. Nie zależy nam w tej chwili na wyróżnieniu tzw. węzłów i oczek niezależnych. Stosownie do tego podziału związki dla obu praw Kirchhoffa wyglądają następująco:

	I prawo K.	II prawo K.
klasa 1	$a_{gu} J^{\alpha} = 0$ $g \in G,\ u \in W$	$b_{gk} U^{\lambda}_{g} = 0$ $g \in G,\ k \in K$
klasa 2	$a_{g_0 u_0} J_{g_0} = 0$ $g_0 \in G,\ u_0 \in W_0$	$b_{g_0 k_0} U_{g_0} = 0$ $g_0 \in G_0,\ k_0 \in K_0$

	I prawo K.	II prawo K.
klasa 3	$\underset{gu_1}{a} \sum_{\alpha} \underset{g}{J^{\alpha}} + \underset{g_o u_1}{a} \underset{g_o}{J} = 0$ $g_o \in G_o, \quad g \in G, \quad u_1 \in W_1$	$\underset{gk_1}{b} \underset{g}{U^{\lambda}} + \underset{g_o k_1}{b} \underset{g_o}{U} = 0$ $g_o \in G_o, \quad g \in G, \quad k_1 \in K_1$

Współzmienniczość tych praw w przypadkach objętych dwoma pierwszymi klasami wynika natychmiast z całości przeprowadzonych uprzednio rozważań. Sprawdzimy kowariantność równania napięciowego dla oczek trzeciej klasy. Mamy zatem równania o postaci:

$$\underset{gk_1}{b} \underset{g}{U^{\lambda'}} + \underset{g_o k_1}{b} \underset{g_o}{U'} = 0.$$

Znajdujemy postać równania w innym układzie, stosując transformacje:

$$\underset{gk_1}{b} \underset{\lambda}{b^{\lambda'}} \underset{g}{U^{\lambda}} + \underset{g_o k_1}{b} m' \underset{g_o}{U} = 0,$$

na podstawie związku (14) możemy zapisać:

$$m' \big(\underset{gk_1}{b} \underset{g}{U^{\lambda}} \big) + \underset{g_o k_1}{b} m' \underset{g_o}{U} = 0,$$

wobec tego:

$$\underset{gk_1}{b} \underset{g}{U^{\lambda}} + \underset{g_o k_1}{b} \underset{g_o}{U} = 0.$$

A więc II prawo Kirchhoffa w tym przypadku jest również współzmiennicze.

Podobnie otrzymujemy identyczny rezultat w przypadku prądowym. Posiadając zapisane kowariantnie prawa Kirchhoffa należy jeszcze zapisać równania elementów badanej sieci. Odpowiednio do oznaczeń na rys. 1 i 2 można napisać:

$$\underset{g}{U^{\lambda}} = \underset{|g|}{Z^{\lambda}{}_{\alpha}} \underset{g}{J^{\alpha}} - \underset{g}{E^{\lambda}}, \tag{19}$$

$$\underset{g_o}{U} = \underset{|g_o|}{Z} \underset{g_o}{J} - \underset{g_o}{E}. \tag{20}$$

Współzmienniczy charakter równania (19) wykazano w pracy [2]. Własność ta dla związku (20) wynika z rozważań p. 5 niniejszej pracy.

Uwaga. Ujęcie wskaźnika powtarzającego się tu w obu czynnikach iloczynu (co jak wiadomo oznacza, że jest on wtedy wskaźnikiem sumacyjnym), w pionowe kreski oznacza zakaz sumowania podług niego.

Kowariantność omawianych równań uzyskano dzięki wprowadzniu transformacji tworzących opisaną podgrupę grupy G_c. Pozwoliło to uniknąć kłopotliwej idealizacji przewodu zerowego, jakiej trzeba było uprzednio dokonać w praukładzie w przypadku opisanym w pracy [2]. Ujemną stroną zastosowania ww. podgrup są krępujące ograniczenia (5), (10). Na przykład stosowana najczęściej w praktyce transformacja z układu fazowego na układ współrzędnych symetrycznych tych warunków nie spełnia. Zapewnienie warunku unitarności, pożądanego przy rozważaniu zagadnień mocy, doprowadziłoby do dalszego zacieśnienia naszej podgrupy. Na przykład transformacje zdefiniowane za pomocą macierzy $\left[e^{j\varphi}\delta_{\alpha\beta}\right]$, $\varphi \in R$ należą do iloczynu mnogościowego obu rozważanych podgrup grupy centroafinicznej, tzn.: centrounitarnej i ups-grupy (piszący ten artykuł nie wiedzą, jak obszerną część wymienionego iloczynu stanowią one). Wprowadzenie tych podgrup obok korzyści posiada więc i strony negatywne.

LITERATURA

[1] Brodzki M.: O współzmienniczości równań opisujących sieci złożone o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 24, Gliwice 1969.

[2] Brodzki M.: O współzmienniczości równań i metodach rozwiązywania sieci elektrycznych o pewnych symetriach. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Elektryka z. 34, praca habilitacyjna Nr 115, Gliwice 1972.

[3] Gołąb S: Rachunek tensorowy. PWN, Warszawa 1966.

[4] Kucharzewski M.: Elementy teorii obiektów geometrycznych. Wydawnictwa Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 1969.

[5] Kucharzewski M., Zajtz A.: Allgemeine Lösung der multiplikativen funktionalgleichung für pseudostochastische Matrizen. Buletinul sientific şi technic, seria Mat.-Fiz.-Mec. 16 (30), (2), 1971.

[6] Kucharzewski M., Zajtz A.: Eine kanonische Form der pseudostochastischen Matrizen. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego 356, Prace Matematyczne 16, Kraków 1974.

[7] Kucharzewski M., Szociński B.: Über eine kanonische Form der regulären doppelt pseudostochastischen Matrizen. Prace Nauk. Uniwersytetu Śląskiego 37, Prace Matematyczne 4, Katowice 1973.

[8] Kucharzewski M., Szociński B.: Über Homomorphizmen einer Gruppe von Matrizen. Ann. Polon. Math. 30, 1975.

[9] Szociński B.: Podstawowe własności geometrii podwójnie pseudostochastycznej, praca doktorska, Uniwersytet Śląski, Katowice 1975.

[10] Zeweke G.W., Jonkin P.A.: Podstawy teorii obwodów elektrycznych. PWT, Warszawa 1958.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПОДГРУПП, АФФИННОЙ КОМПЛЕКСНОЙ ГРУППЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕЛЕЙ

Р е з ю м е

В статье приводятся возможности применения некоторых подгрупп аффинной комплексной группы, для ковариантного оформления законов Кирхгоффа, электрических и-фазных цепей. Эти возможности обоснованиое. Показаны тоже удобства какие даст использование этих групп.

APPLICATIONS OF SOME SUBGROUPS OF THE AFFINOUS COMPLEX GROUP IN THE GEOMETRIC THEORY OF THE POLYPHASE NETWORKS

S u m m a r y

In the paper the possibilities are presented of using some subgroups of the affinous complex group, for the covariant notation of Kirchhoff's laws in the polyphase network theory. These possibilities are proved and some advantages of their applications are explained.

Przyjęto do druku w czerwcu 1978 r.