ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1979

Seria: ELEKTRYKA z. 64 Nr kol. 593

Zygmunt GARCZARCZYK

O RÓWNOWAŻNOŚCI PEWNEJ KLASY N-PAROBIEGUNNIKÓW ZBUDOWANYCH Z ELEMENTÓW DWÓCH TYPÓW (RC, RL, LC)

Streszczenie. W artykule przedstawiono dowód twierdzenia Darlingtona, dotyczącego równoważności czwórników. Twierdzenie to można prosto uogólnić na przypadek n-parobiegunników.

1. Wstęp

Jednym z podstawowych zagadnień teorii obwodów jest problem obwodów równoważnych. Dwa obwody o różnej topologii i różnych wartościach elementów mogą być równoważne ze względu na związki między wielkościami na wybranym podzbiorze ich zacisków. Metody projektowania i realizacji obwodów równoważnych są ważne zarówno z praktycznego jak i teoretycznego punktu widzenia.

Cauer [1] a także Howitt [2] pokazali, że transformacja kongruentna zastosowana do macierzy reprezentującej fizycznie realizowalny obwód, pozwala generować inny realizowalny obwód w taki sposób, że określony zbiór wejściowych i wzajemnych admitancji będzie niezmienny. Zagadnienia te rozważane są szczegółowo także w książce Guillemina [3].

W pracy Darlingtona [4] przytoczone zostało, bez dowodu, twierdzenie dotyczące równoważności czwórników RC o strukturze trójnikowej. Celem niniejszej pracy jest przedstawienie dowodu tego twierdzenia, które można prosto uogólnić na przypadek n-parobiegunników. Teoria obwodów równoważnych nabiera szczególnego znaczenia ze względu na możliwość wykorzystania jej rezultatów przy optymalizacji różnych sieci elektrycznych [5], [6].

2. N-parobiegunniki równoważne

D e f i n i c j a: Dwa n-parobiegunniki nazywamy równoważnymi, jeżeli posiadają tę samą macierz admitancyjną $[Y]$.

Rozważmy dwa n-parobiegunniki posiadające n + m + 1 węzłów, których macierze węzłowe są równe odpowiednio $[Y_A]$ i $[Y_B]$ i posiadają wymiar $(n+m) \times (n+m)$. Załóżmy także, że wszystkie n-wejść posiada jeden zacisk wspólny. Formułujemy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1

Dwa n-parobiegunniki są równoważne, jeżeli:

$$[Y_B] = [A]^t\,[Y_A][A] \tag{1}$$

gdzie macierz $[A]$ jest macierzą nieosobliwą o stałych, rzeczywistych elementach i postaci:

$$[A] = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}1\\Q\end{matrix}}_{n} & \underbrace{\begin{matrix}0\\R\end{matrix}}_{m} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \}\ n \\ \}\ m \end{matrix} \tag{2}$$

$1 = [1]$ - macierz jednostkowa,
$0 = [0]$ - macierz zerowa.

DOWÓD

Rozważmy n-parobiegunnik opisany równaniem:

$$\begin{matrix} n\,\{ \\ m\,\{ \end{matrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Y_B]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \}\ n \\ \}\ m \end{matrix} = [A]^t\,[Y_A][A]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Mnożąc lewostronnie przez $\left([A]^t\right)^{-1}$ otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{Q} \\ 0 & \tilde{R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Y_A]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \end{bmatrix} = [Y_A]\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2' \end{bmatrix}, \quad [V_2'] = [Q][V_1] + [R][V_2] \tag{5}$$

Ponieważ wektory $[I_1]$ oraz $[V_1]$ są takie same dla obydwu obwodów, wynika stąd, że muszą one posiadać tę samą macierz admitancyjną, tzn.:

$$[I_1] = [Y][V_1] \tag{6}$$

Pokażemy teraz, że macierze postaci (2) mają interesującą własność.

Twierdzenie 2

Zbiór λ macierzy postaci (2) tworzy grupę ze względu na mnożenie.

DOWÓD

Zauważmy, że:

a) działanie mnożenia daje wynik także należący do zbioru λ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_1 & R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_2 & R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_1 + R_1 Q_2 & R_1 R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & R \end{bmatrix} \tag{7}$$

b) istnieje macierz odwrotna należąca do λ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & R \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \\ -R^{-1}Q & R^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q' & R' \end{bmatrix} \tag{8}$$

c) macierz jednostkowa także należy do zbioru λ.

Zauważmy także, że zbiór λ tworzy grupę przemienną, jeśli dla dowolnych dwu macierzy zbioru zachodzi:

$$[Q_2] - [Q_1] = [R_1][Q_2] - [R_2][Q_1] \tag{9}$$

Z twierdzenia 2 wynika, że macierz transformacji $[A]$ można przedstawić jako iloczyn dowolnej liczby czynników postaci (2).

Metoda transformacji jest w zasadzie bardzo prosta. Jednakże pewne trudności muszą być przezwyciężone, zanim stanie się ona rzeczywiście użyteczna. Najbardziej poważne trudności wynikają, gdy stawiamy wymaganie, aby obwód nie zawierał transformatorów, a jego elementy miały wartości dodatnie. W wielu przypadkach wybór $[A]$ sprawia, że elementy obwodu równoważnego mają ujemne wartości. Wybór macierzy $[A]$ "bliski" macierzy jednostkowej, tj.:

$$a_{ii} = 1 \qquad i = 1,2, \dots n + m$$

$$|a_{ij}| \leqslant 1 \qquad i \neq j, j = 1,2,\dots,n+m, \ i=m,\dots,n+m$$

$$a_{ij} = 0 \qquad i \neq j, i = 1,2,\dots,n, \quad j=1,2,\dots,n+m$$

pozwala zachować elementy dodatnimi, ale uproszczenie struktury (częsty cel) wymaga transformacji mocno redukujących niektóre elementy obwodu, nawet do zera.

Tak więc problem polega na znalezieniu lub przynajmniej wykazaniu istnienia macierzy $[A]$ transformacji (1), wystarczających do eliminacji niektórych elementów bez wprowadzenia elementów ujemnych.

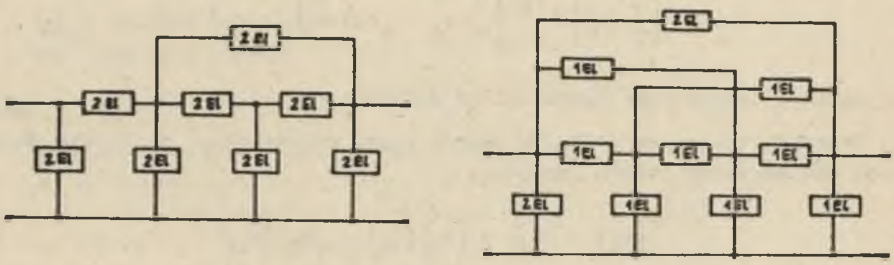
3. Równoważność pewnej klasy czwórników

W pracy [4] formułuje się następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3

Czwórnik o strukturze trójnikowej, posiadający m węzłów wewnątrznych którego admitancje gałęzi mają postać $C_{ij} + pC_{ij}$ jest równoważny czwórnikowi, który posiada tę samą ilość węzłów wewnętrznych, zaś admitancja każdej gałęzi łączącej węzły wewnętrzne oraz węzły wewnętrzne z zewnętrznymi jest równa G'_{ij} lub pC'_{ij}. Admitancje łączące węzły zewnętrzne (zaciski) mogą być $G'_{ij} + pC'_{ij}$.

Równoważność tę ilustruje rysunek 1.



Rys. 1
a) obwód oryginalny, b) obwód równoważny

Zauważmy, że gałęzie nie występujące w obwodzie oryginalnym po transformacji mogą się pojawić - graf obwodu po transformacji jest kompletny nawet wtedy, jeśli obwód wejściowy nie posiadał takiego grafu. Nie każda gałąź obwodu oryginalnego musi być dwuelementowa.

DOWÓD

Przedstawmy macierz węzłową obwodu oryginalnego w postaci:

$$[y] = [G] + p[C] = \begin{bmatrix} y_e & y_w^t \\ \underbrace{y_w}_{2} & \underbrace{y_i}_{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_e & G_w^t \\ G_w & G_i \end{bmatrix} + p\begin{bmatrix} C_e & C_w^t \\ C_w & C_i \end{bmatrix} \tag{10}$$

Podmacierz $[y_i]$ reprezentuje gałęzie łączące węzły wewnętrzne, $[y_w]$ odpowiada gałęziom łączącym węzły wewnętrzne i zewnętrzne, $[y_e]$ reprezentuje gałęzie łączące węzły zewnętrzne (zaciski). Gałęzie łączące węzły wewnętrzne z węzłami zewnętrznymi oraz gałęzie łączące węzły wewnętrzne między sobą nazwijmy gałęziami wewnętrznymi, zaś pozostałe gałęziami zewnętrznymi. Liczba gałęzi wewnętrznych w przypadku czwórnika jest równa:

$$l_g = \frac{(m+2)(m+1)}{2} - 3$$

Zastosujmy do obydwu składników macierzy węzłowej transformację (1)

$$[G] = [A]^t\,[G][A] \qquad [C] = [A]^t\,[C][A] \tag{11}$$

Liczba niezależnych elementów macierzy $[A]$ umożliwiających pożądaną modyfikację gałęzi wewnętrznych wynosi:

$$l_m = m(m+2) \tag{12}$$

Rozważmy następujące przypadki

1) $m = 1$ $l_m = l_g = 3,$
2) $m = 2$ $l_m = 8$ $l_g = 7.$

W tych przypadkach macierz $[A]$ łatwo określamy porównując obydwie strony wyrażeń (11), gdzie po lewej stronie znajdują się macierze układu równoważnego. Określenie elementów macierzy A polega na rozwiązaniu układu równań, przy czym w drugim przypadku nie wszystkie elementy są niezależne.

3) $m \geqslant 3$

Tutaj metoda porównywania zastosowana poprzednio, ze względu na rozmiar zagadnienia, nie może łatwo dać jednoznacznej odpowiedzi dotyczącej możliwości utworzenia macierzy transformującej.
Niech:

$$[A] = [A_1][A_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & N_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ N_b & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\,2 \\ \}\,m \end{matrix} \tag{13}$$

Jeżeli $[y]$ zastąpimy przez $[\hat{y}] = [A_1]^t\,[y][A_1]$, to podmacierze (10) będą równe:

$$\begin{gathered} [\hat{y}_e] = [y_e] \\ [\hat{y}_w] = [N_a]^t\,[y_w] \\ [\hat{y}_i] = [N_a]^t\,[y_i][N_a] \end{gathered} \tag{14}$$

Jeśli $[\hat{y}]$ zastąpimy przez $[\tilde{y}] = [A_2]^t\,[\hat{y}][A_2]$, to:

$$\begin{gathered} [\tilde{y}_e] = [\hat{y}_e] + [\hat{y}_w]^t[N_b] + [N_b]^t[\hat{y}_w] + [N_b]^t[\hat{y}_i][N_b] \\ [\tilde{y}_w] = [\hat{y}_w] + [\hat{y}_i][N_b] \\ [\tilde{y}_i] = [\hat{y}_i] \end{gathered} \tag{15}$$

Jak widać z powyższego, przy rozkładzie (13) macierzy transformującej $[A]$ podmacierz $[y_i]$, reprezentująca gałęzie łączące węzły wewnętrzne, jest modyfikowana wyłącznie przez podmacierz transformującą $[N_a]$. Korzystając z tego faktu wybieramy pewien węzeł wewnętrzny w obwodzie oryginalnym jako węzeł odniesienia, tworzymy macierz węzłową i poszukujemy równoważnego czwórnika ze względu na cztery zaciski (trzy zewnętrzne plus węzeł odniesienia). Wybieramy następnie macierz transformującą $[A_1]$, aby podmacierz $[N_a]$ przekształcała podmacierz $[y_i]$, tak aby odpowiadała ona obwodowi, w którym występuje tylko jeden element $[G'_{ij}$ lub $C'_{ij}]$ w gałęziach łączących węzły wewnętrzne z węzłem odniesienia.

Jeżeli założymy, że w k spośród m-1 gałęzi łączących węzły wewnętrzne z węzłem odniesienia (także wewnętrznym) winny występować oporniki o konduktancjach G'_{ij}, a w pozostałych kondensatory o pojemnościach C'_{ij}, to znaczy, że narzucamy na macierze $[G]$ i $[C]$ następujące ograniczenia:

$$\text{(I)} \qquad G'_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{m+2} G'_{ij} = 0 \qquad i = 4,\dots,m_k$$

$$\text{(II)} \qquad C'_{ii} - \sum_{j=1, j\neq i}^{m+2} C'_{ij} = 0 \qquad i = m+1,\dots,m+2 \tag{16}$$

$$\text{(III)} \qquad G'_{ij} = -\alpha_{ij} \quad \text{dla każdego} \quad j \neq i \quad i,j = 4,\dots,m+2$$

$$\text{(IV)} \qquad C'_{ij} = -\beta_{ij} \quad \alpha_{ij}, \beta_{ij} \text{ - liczby rzeczywiste, dodatnie.}$$

Jak widać ze wzorów (14) ograniczenia te dotyczą jedynie elementów podmacierzy $[N_a]$.

Całkowita liczba warunków narzuconych na elementy podmacierzy $[N_a]$, modyfikującej strukturę czwórnika w podany wyżej sposób, wynosi:

$$\overbrace{m-1-k}^{\text{(I)}} + \frac{1}{2}\overbrace{\left[(m-1)^2-m+1\right]}^{\text{(III)}} + \overbrace{k}^{\text{(II)}} + \frac{1}{2}\overbrace{\left[(m-1)^2-m+1\right]}^{\text{(IV)}} = (m-1)^2 \tag{17}$$

i jest równa liczbie elementów podmacierzy $[N_a]$, co pozwala rozwiązać postawione zadanie. Zauważmy na podstawie wzorów (15), że podmacierz $[N_a]$ odpowiednio dobrana nie zmienia już struktury gałęzi wewnętrznych. Liczba elementów w gałęziach nie dołączonych do węzła odniesienia nie ulega zmianie.

Powtarzając tę procedurę dla pozostałych węzłów wewnętrznych, traktowanych jako węzły odniesienia, uzyskujemy strukturę, w której każda gałąź łącząca węzły wewnętrzne posiada jeden element C'_{ij} lub G'_{ij}.

Wybierając następnie każdy węzeł zewnętrzny jako węzeł odniesienia, redukujemy w ten sam sposób każdą gałąź między zaciskami a węzłami wewnętrznymi.

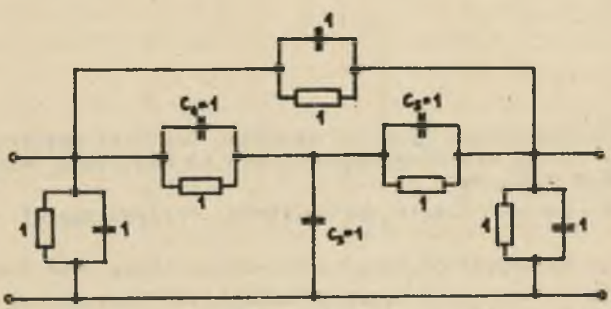
Twierdzenie to można uogólnić także dla n-parobiegunnika wprowadzając tylko niewielkie zmiany w dowodzie.

Analogiczne twierdzenie można sformułować dla obwodów z trzema elementami w gałęzi R,L,C. W tym przypadku, rozumując podobnie, uzyskujemy obwód równoważny, którego każda gałąź wewnętrzna posiada co najwyżej dwa elementy spośród trzech występujących w układzie oryginalnym.

4. Przykład

Przedstawiony dowód nie może stanowić przepisu na konstrukcję macierzy [A] pozwalającej przekształcać obwód oryginalny do postaci równoważnej. Jednakże w prostych przypadkach obwodów o małej liczbie węzłów, stosując procedurę podaną w punktach 1 i 2 dowodu, można znaleźć pożądaną macierz [A].

Jako przykład rozważmy czwórnik RC pokazany na rys. 2 (konduktancje oporników w [S], pojemności kondensatorów w [F]). Chcemy przekształcić ten układ tak, aby $C_4 = C_5 = 0$ oraz $G_3 = 0$ (obwodu równoważnego).

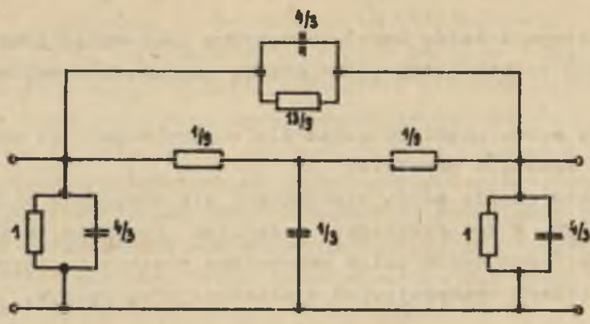


Rys. 2

Postulaty te są spełnione, gdy macierz [A] jest równa:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Korzystając ze wzoru (11) znajdujemy obwód równoważny (rys. 3).



Rys. 3

Macierze admitancyjne obydwu czwórników są oczywiście równe, wynoszą one:

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} + \frac{8}{3p} & -\frac{3}{2} - \frac{4}{3p} \\ -\frac{3}{2} - \frac{4}{3p} & \frac{5}{2} + \frac{8}{3p} \end{bmatrix}$$

Problem określenia efektywnej metody umożliwiającej w dowolnym przypadku na przejście od jednej struktury do drugiej równoważnej jest przedmiotem badań.

LITERATURA

[1] Cauer W.: Untersuchungen uber ein Problem, das drei positiv definite quadratische Formen mit Streckenkomplexen in Bezichung setzt. Mathematische Annalen 1931, Hett 1.

[2] Howitt N.: Equivalent Electrical Networks. Proceedings of the IRE, June 1932.

[3] Guillemin E.: Synthesis of Passive Networks. Wiley, New York 1957.

[4] Darlington S.: A Surrey of Network Realization Techniques. IRE Transactions on Circuit Theory, December 1955.

[5] Schoeffer J.D.: The Synthesis of Minimum Sensitivity Networks. IEEE Transactions on Circuit Theory, June 1964.

[6] Geher K.: Teoria tolerancji i wrażliwości układów elektronicznych.WNT, Warszawa 1976.

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА 2n-ПОЛЮСНИКОВ
ПОСТРОЕННЫХ ИЗ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХ ТИПОВ

Р е з ю м е

В статье приводится доказательство теоремы Дарлингтона, касающегося эквивалентности двухполюсников. Эту теорему можно прямо обобщить к случаю 2n-полюсников.

THE EQUIVALENCE OF SOME CLASS OF TWO-KIND ELEMENT n-PORTS

S u m m a r y

The article presents a proof of Darlington's theorem which deals with the equivalence of two-ports. That theorem can be proved in a simple way in the case of n-ports.

Przyjęto do druku w czerwcu 1978 r.