

Janina Bodaszewska

O krzywej przejściowej prof. Wątorka i o jej modyfikacjach

Streszczenie. W historii rozwoju myśli technicznej poświęconej analizie ruchu pojazdów w łukach kolejowych poważną rolę odegrała teoria krzywej przejściowej prof. Wątorka. Wpływ tej pracy na dalszy rozwój teorii tych krzywych uwidocznił się m. in. w interesującej koncepcji czasów najnowszych, polegającej na zastąpieniu łuku kolejowego z krzywymi przejściowymi — jednolitym łukiem idealnym o zmiennej krzywiznie. Z tego względu krzywa prof. Wątorka zasługuje na szczególną uwagę. Niestety autor wyraził ją w bardzo skomplikowanej formie analitycznej, nieprzydatnej do bezpośrednich zastosowań praktycznych. Nie podał też żadnych tablic, które by mogły ułatwić obliczenie jej zasadniczych elementów. Z tego powodu krzywa ta nie została dotychczas w praktyce wypróbowana, mimo jej wielu, ogólnie uznanych zalet. Brakom powyższym stara się zaradzić niniejsza rozprawa, w której przedstawiono krzywą prof. Wątorka w układzie bezwymiarowym. Przekształcenie to pozwoliło sprowadzić skomplikowane wzory teorii pierwotnej — bez żadnego naruszenia ich treści — do postaci przydatnej do zastosowań praktycznych. Dzięki temu przekształceniu można bowiem łatwo opracować tablice liczbowe, niezbędne do obliczenia zasadniczych elementów tej krzywej. Wzorcowe opracowanie tych tablic podane jest w dalszym tekście rozprawy, która zawiera też nowe typy krzywych przejściowych oparte na modyfikacji założeń przejętych w teorii pierwotnej. Modyfikacje powyższe pozwoliły przedstawić wyżej wspomniane — a u nas prawie zupełnie nie znane — łuki idealne w bardzo prostej postaci analitycznej.

1. Wstęp

Współczesne teorie krzywej przejściowej opierają się na wynikach licznych badań teoretycznych i doświadczalnych mających za sobą długoletnią tradycję rozwojową. Największy postęp w tej dziedzinie za-

czynna się w drugiej połowie ubiegłego wieku, głównie dzięki szybkiemu rozwojowi dróg żelaznych. Warto przypomnieć, że na jednym z etapów rozwoju myśli technicznej, poświęconej badaniom ruchu pojazdów kolejowych w łukach, pojawiła się u nas nowa teoria krzywej przejściowej, znanej dziś pod nazwą krzywej prof. Wątor *k*. Zaprojektowana specjalnie na użytek kolejnictwa, krzywa ta obudziła od razu nieprzeciętne zainteresowanie tak u nas, jak i za granicą, dzięki czemu obszernie streszczenie nowej teorii stanowiącej temat rozprawy doktorskiej jej autora [1] zostało opublikowane w jednym z najpoważniejszych wówczas czasopism zagranicznych [2].

Aby wyjaśnić, na czym polegało nowatorstwo tej teorii, przypomnijmy, że przed jej pojawieniem się znano już cały szereg krzywych przejściowych różnego typu. Wspominają o nich tak ówczesne, jak i teraźniejsze monografie i podręczniki z tego zakresu. Najbardziej było wtedy rozpowszechnione — co zachowało się częściowo aż do dnia dzisiejszego — stosowanie krzywej przejściowej w postaci paraboli sześciennej o równaniu

$$y = x^3/6lR, \quad (1)$$

przy czym długość l krzywej przejścia z prostego odcinka toru w łuk o stałej krzywiznie $k = 1/R$ wyznacza znany wzór

$$l = ih \quad (2)$$

podający zależność długości l od przechyłki h toru. Wartość współczynnika i ustalają osobne przepisy. Przechyłka h ma na długości krzywej przejściowej wartość liniowo zmienną z , określoną wzorem

$$z/h = x/l, \quad (3)$$

przy czym układ współrzędnych jest tak obrany, że początek krzywej przejściowej jest zarazem punktem początkowym tego układu, a styczna do krzywej przejściowej w tym miejscu wyznacza oś x -ów. Największa rzędna f krzywej na jej końcu, tj. dla $x = l$ ma na mocy równania (1) wartość

$$f = l^2/6R \quad (4)$$

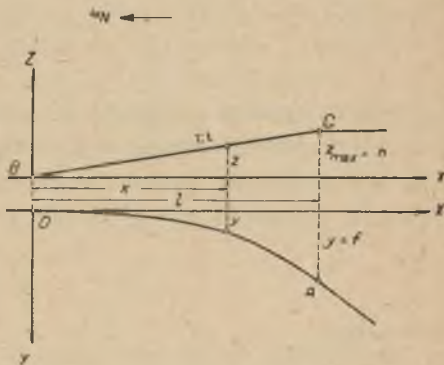
Po podzieleniu równania (1) przez (4) dostaniemy tzw. równanie bezwymiarowe krzywej przejściowej

$$y/f = (x/l)^3, \quad (5)$$

które pozwala przedstawić jej kształt niezależnie od szczególnych wartości parametrów R , l , i , h , oraz f . Taką samą cechą posiada też rów-

nianie (3). Wykresy obu tych równań, określających kształt krzywej przejściowej w planie i w profilu pokazane są na rys. 1¹.

Długość BC pokazana na rys. 1 nosi niekiedy nazwę rampy przechyłkowej. Jest to rampa liniowa. Prof. Wątorck zaproponował w swej teorii zaokrąglenie załomów tej rampy w punktach B, C , gdyż badania doświadczalne nad szybkim ruchem elektrycznych wozów motorowych [3] mogących rozwijać prędkość ruchu do 210 km/godz wykazały, że mimo bardzo nawet starannego utrzymania toru każdy wjazd do łuku połączony był przy większej szybkości jazdy z uderzeniami tym silniejszymi, im większa była szybkość i im krótsza krzywa przejściowa.



Rys. 1. Klasyczna krzywa przejściowa

Wychodząc z założenia prowadzącego do wniosku, że przyczyną tych zaburzeń ruchu są ostre załomy przechyłki w punktach B, C , przyjął prof. Wątorck w miejsce rampy liniowej, określonej równaniem (3) rampę zakrzywioną APB , pokazaną na rysunku 2, przy czym wyraził ją równaniem

$$Z = \frac{2^{10}}{3^3 \cdot 5^2 \cdot i^3 \cdot h^2} \left[x^5 - \frac{2^2}{5 \cdot i \cdot h} x^4 + \frac{2^6}{3 \cdot 5^3 \cdot i^2 h^2} x^3 \right] \quad (6)$$

Jest to równanie paraboli piątego rzędu, która — jak łatwo sprawdzić — ma trzy punkty przegięcia, w miejscach $x = 0$, $x = l$, oraz $x = \frac{l}{2}$, tj. w środku krzywej przejściowej oraz na obu jej końcach.

W związku z powyższym założeniem nowa krzywa przejściowa została wyrażona równaniem².

¹ Równania (1), (2) i (4) są ogólnie znane z elementarnej teorii krzywej przejściowej, przyjętej w postaci paraboli sześcienniej. Mogłoby się wydawać, że nie ma potrzeby podawania ich tu *in extenso*, wobec czego wyjaśniamy, że zostały tu wypisane w tym celu, aby za ich pomocą objaśnić na ogólnie znanym przykładzie, w jaki sposób przechodzi się od ogólnych wzorów krzywej przejściowej do jej wzorów w układzie bezwymiarowym (3), (5). Analogiczne przejścia będą też w dalszym ciągu zastosowane do krzywej prof. Wątorcka i do innych krzywych objętych tematem niniejszej rozprawy.

² Obydwa dostępne dziś teksty pierwotne tych równań — por. [3] oraz [4] — zawierają wskutek widocznych braków w korekcie odmiennie wartości wykładników potęgowych w równaniu (7). Tutaj podano te wykładniki w formie poprawnej na podstawie wyników otrzymanych przy kontrolnym przeliczeniu całego toku wprowadzenia tych równań.

$$y = \frac{2^3}{3^3 \cdot 5^3 \cdot C \cdot i^3 h^2} \left[x^5 - \frac{2^3}{3 \cdot 5 \cdot i \cdot h} x^6 + \frac{2^7}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot i^2 \cdot h^2} x^7 \right] \quad (7)$$

W równaniu (7) stała C ma wartość

$$C = \left(\frac{sv^2}{gR} \right) R = hR, \quad (8)$$

przy czym symbol s oznacza szerokość toru, v prędkość ruchu w km/godz, g zaś jest przyspieszeniem grawitacji ziemskiej. Krzywa prof. Wątorcka jest więc parabolą 7 rzędu. Największa rzędna f tej krzywej, występująca na jej końcu, tj. dla $x = l$ ma wartość

$$f = \frac{l^3}{7R}, \quad (9)$$

przy czym

$$l = \frac{15}{8} ih, \quad (10)$$

tnz. że przy zachowaniu tych samych wartości i , h , jak w równaniu (2), długość nowej krzywej (7) byłaby niemal dwukrotnie większa niż w przypadku paraboli sześcienniej. Wzory (6) — (10) tworzą krótki wyciąg z pozycji [3], [4] i podają całą, formalną treść teorii prof. Wątorcka.

Skomplikowana forma analityczna nowej krzywej przejściowej oraz brak jakichkolwiek tablic ułatwiających jej praktyczne zastosowanie przeszkodziły jej rozpowszechnieniu, mimo wspomnianego już znacznego zainteresowania, jakie jej teoria obudziła. Brakowi temu można jednak łatwo zaradzić, jak to w dalszym tekście zobaczymy. Zanim to wykażemy, uważamy za pożądane podkreślić, że krzywa ta ma dziś nie tylko historyczne znaczenie. W okresie coraz bardziej rozwijającego się u nas postępu technicznego związanego z rozbudową całej naszej gospodarki narodowej wzrasta stale prędkość ruchu na drogach i kolejach. Prędkość ta będzie dalej wzrastać, stoimy bowiem przed ogólną elektryfikacją wszystkich ważniejszych linii kolejowych w Polsce. W związku z tym należy się liczyć z potrzebą unowocześnienia ich ustroju w łukach. Podstawę do takich przypuszczeń dostarcza nam analogia zaczerpnięta z historii rozwoju dróg lądowych, które budowano dawniej bez krzywych przejściowych. Następnie w miarę wzrastania szybkości ruchu pojazdów zaczęto stosować w łukach krzywą przejściową w postaci paraboli sześcienniej, aż wreszcie z rozpoczęciem budowy nowoczesnej autostrady zaczęto stosować jako krzywą przejścia kłotoideę. W czasach najnowszych wprowadzono łuk o zmiennej krzywiznie w postaci lemniskaty, której teoria była już dawniej znana, lecz krzywą taką uważano raczej za teoretyczną osobliwość pozbawioną praktycznego znaczenia.

Z podobną zmianą poglądów należy się też liczyć i na kolejach, gdzie dziś jeszcze stosuje się parabolę sześciennej jako krzywą przejściową. Ale i w tej dziedzinie jesteśmy świadkami przejawu nowej myśli twórczej, która w okresie międzywojennym doprowadziła do powstania ciekawej teorii Schramma [5], zastępującej łuk kołowy z krzywymi przejściowymi — łukiem idealnym o zmiennej krzywiznie. Związek tej koncepcji z teorią prof. Wątorka jest zupełnie wyraźnie widoczny. O łuku idealnym będzie jeszcze mowa w ostatniej części tej rozprawy, obecnie zaś podkreśliwszy, jak można mniemać, wystarczająco aktualną wartość teorii prof. Wątorka¹ przejdziemy do uproszczenia podanych w niej wzorów i zestawienia za ich pomocą tablic liczbowych, których w teorii oryginalnej zupełnie nie ma.

2. Uproszczenie teorii pierwotnej. Zestawienie tablic liczbowych

Aby uprościć równanie (6) uwzględniając warunek brzegowy teorii wymagającej, aby dla $x = l$ było $z = h$, weźmiemy pod uwagę zależność (10), tzn. $l = \frac{15ih}{8} = \frac{3 \cdot 5 \cdot i \cdot h}{8}$, z której wynika prosty związek

$$l^n = \frac{3^n 5^n i^n h^n}{(2^3)^n} \quad (11)$$

Obliczając po kolei wartość l^n dla kolejnych wykładników potęgowych występujących po prawej stronie równania (6) tzn. dla $n = 3, 4, 5$, możemy po opuszczeniu nawiasu w równaniu (6) napisać

$$z = 10h \left[\frac{2^9 \cdot x^3}{3^3 \cdot 5^3 \cdot i^3 \cdot h^3} \right] - 15h \left[\frac{2^{12} x^4}{3^4 \cdot 5^4 \cdot i^4 \cdot h^4} \right] + 6h \left[\frac{2^{15} \cdot x^5}{4^5 \cdot 5^5 \cdot i^5 \cdot h^5} \right]$$

Po podzieleniu tego równania obustronnie przez h oraz po uwzględnieniu wartości wzoru (11) dla $n = 3, 4, 5$ dostaniemy bardzo proste równanie bezwymiarowe zakrzywionej rampy przechyłkowej prof. Wątorka, w postaci

$$\frac{z}{h} = 10 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 15 \left(\frac{x}{l} \right)^4 + 6 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \quad (12)$$

Wzór ten pozwala od razu obliczyć tabelkę wartości krzywej $\frac{z}{h}$ w zależności od argumentu $\frac{x}{l}$. Wyniki tych obliczeń są zestawione w tabli-

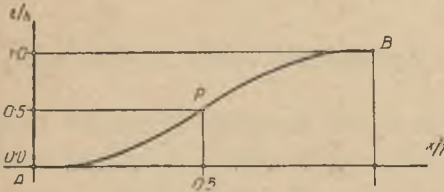
¹ Aktualność tę potwierdzają również wypowiedzi autorów najnowszych prac z tej dziedziny (por. np. [6] str. 29).

cy 1, za pomocą której opracowano wykres pokazany na rys. 2. Z rysunku tego widzimy, że największe pochylenie podłużne rampy przechyłkowej występuje w środku tej krzywej. Wartość tego pochylenia obliczymy za pomocą pochodnej $\frac{dz}{dx}$. Różniczkując w tym celu równanie (12) dostaniemy

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{h}{l} \left[30 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 60 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 30 \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (13)$$

Po uproszczeniu będzie

$$z' = \frac{30h}{l} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (14)$$



Rys. 2. Krzywa Wątorka w profilu

Stąd w środku krzywej, czyli dla

$x = \frac{l}{2}$ otrzymamy

$$z'_s = \frac{30}{16} \cdot \frac{h}{l} = \frac{l}{i},$$

czyli, że zgodnie z równaniem (10)

$$\text{jest } l = \frac{15ih}{8}.$$

Podobnie można też uprościć równanie (7) przedstawiające kształt krzywej przejściowej w planie. Wystarczy w tym celu wyrazić je w układzie bezwymiarowym. Uwzględniając mianowicie związki (10) i (11) napiszemy zamiast (7)

$$y = \frac{4}{15 Ci} \left[\left(\frac{8}{15ih} \right)^2 x^5 - \left(\frac{8}{15ih} \right)^3 x^6 + \frac{2}{7} \left(\frac{8}{15ih} \right)^4 x^7 \right].$$

czyli

$$y = \frac{4}{15 Ci} \left[\frac{x^5}{l^2} - \frac{x^6}{l^3} + \frac{2}{7} \frac{x^7}{l^4} \right]$$

albo

$$y = \frac{4l^3}{105 Ci} \left[7 \left(\frac{x}{l} \right)^5 - 7 \left(\frac{x}{l} \right)^6 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^7 \right]. \quad (15)$$

Według równania (8) i (10) jest $C = Rh$ oraz $l = \frac{15ih}{8}$. Wynika stąd, że współczynnik stojący przed nawiasem równania (13) ma wartość

$$\frac{4l^3}{105 Ci} = \frac{4l^3}{105 Rhi} = \frac{8l^3}{2 \cdot 7 \cdot 15ih} = \frac{l^2}{14R}.$$

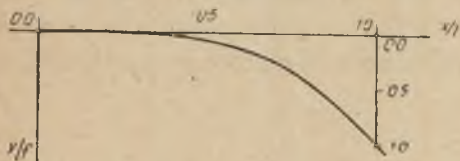
Będzie więc

$$y = \frac{l^2}{14R} \left[7 \left(\frac{x}{l} \right)^5 - 7 \left(\frac{x}{l} \right)^6 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^7 \right]. \quad (15a)$$

Dla $x = l$ jest $y = f$, czyli że — zgodnie z równaniem (9) — będzie $f = \frac{l^2}{7R}$. Dzieląc równanie (15a) przez f otrzymamy równanie (7) w układzie bezwymiarowym

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{2} \left[7 \left(\frac{x}{l} \right)^5 - 7 \left(\frac{x}{l} \right)^6 + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^7 \right] \quad (16)$$

Bezwymiarowe równanie (16) przedstawiające kształt krzywej prof. Wątoraka w planie pozwala łatwo obliczyć tabelkę rzędnych y/f w zależności od argumentu x/l . Wartości te zestawione są w tabelicy 1. Za ich pomocą wykonano wykres krzywej przejściowej prof. Wątoraka, pokazany na rys. 3¹.



Rys. 3. Krzywa Wątoraka w planie

Tablica 1

x/l	z/h	y/f
0,0	0,00000	0,000 000 0
0,1	0,00856	0,000 031 6
0,2	0,05792	0,000 908 8
0,3	0,16308	0,006 172 2
0,4	0,31744	0,023 142 4
0,5	0,50000	0,062 500 0
0,6	0,68256	0,136 857 6
0,7	0,83692	0,258 827 8
0,8	0,94208	0,439 091 2
0,9	0,99144	0,634 968 4
1,0	1,00000	1,000 000 0

Przykład zastosowania tabelicy. Mając dla danych wartości $R = 1500$ m, $h = 40$ mm; $i = 1000$ zaprojektować krzywą przejściową prof. Wątoraka, obliczamy kolejno $l = \frac{15ih}{8} = 75,0$ m oraz $f = \frac{l^2}{7R} = 5,357$ m. Znając wielkość l , h , f obliczymy współrzędne x , y , z krzywej przejściowej wzorami

$$x = 75 (x/l), \quad y = 5,357 (y/f), \quad z = 40 (z/h),$$

przy czym wartości ujęte w nawiasy odczytujemy z tabelicy 1.

¹ Tablica 1 ma charakter tabelki wzorcowej ograniczonej tu do dziesięciu wartości argumentu x/l . W razie potrzeby tabelkę tę można łatwo uzupełnić dla większej ilości rzędnych.

3. Modyfikacje krzywej prof. Wątoraka

Zaokrąglenie załomów przechyłki w punktach B, C (rys. 1), stanowiące przewodnią myśl teorii prof. Wątoraka, można uzyskać także za pomocą innych wzorów. Spośród wielu możliwych sposobów realizacji takiej zmiany wybierzemy dla poglądowego zobrazowania tych możliwości dwa proste przykłady:

A. Krzywa przejściowa jako parabola 5 rzędu. Wyrażając zaokrąglenie załomów przechyłki w punktach B, C (rys. 1) za pomocą krzywej 3 rzędu, z jednym tylko punktem przegięcia w środku krzywej, możemy przyjąć dla niej warunki brzegowe w następującej postaci:

- 1) Dla $x = 0$ ma być $z = 0$
- 2) „ $x = \frac{l}{2}$ „ „ $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{i}$
- 3) „ $x = \frac{l}{2}$ „ „ $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$
- 4) „ $x = l$ „ „ $z = h$

Warunkom powyższym — jak łatwo sprawdzić — czyni zadość krzywa z/h wyrażona wzorem

$$\boxed{\frac{z}{h} = 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3} \quad (18)$$

której pochodne mają wartość

$$\frac{dz}{dx} = \frac{6h}{l} \left[\left(\frac{x}{l} \right) - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (19)$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{6h}{l^2} \left[1 - \frac{2x}{l} \right] \quad (20)$$

Zważywszy, że przechyłka h musi na końcu krzywej przejściowej uczynić zadość związkowi

$$h = \frac{sv^2}{gR}, \quad (21)$$

zależność zaś zmiennej wartości z tej przechyłki od krzywizny

$$k = \frac{1}{\rho} = \sim \frac{d^2y}{dx^2} \quad (22)$$

określa wzór

$$z = \frac{sv^2}{g\rho} \quad (23)$$

otrzymamy po podzieleniu równanie (23) przez (21), związek

$$\frac{z}{h} = \frac{R}{\rho} \quad (23a)$$

Będzie więc na mocy (22) oraz (18)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{z}{Rh} = \frac{1}{R} \left[3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right] \quad (24)$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{l}{R} \left[\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] + C_1 \\ y &= \frac{l^2}{R} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x}{l} \right)^4 - \frac{1}{10} \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right] + C_1 x + C_2 \end{aligned}$$

Ponieważ dla $x = 0$ ma być $y = 0$ oraz $\frac{dy}{dx} = 0$, przeto stałe całkowania muszą zniknąć, czyli $C_1 = C_2 = 0$, a stąd

$$y = \frac{l}{20R} \left[5 \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 1 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right] \quad (25)$$

Z równania tego dostaniemy największą rzędną f krzywej przejściowej (dla $x = l$)

$$f = \frac{3l^3}{20R} \quad (26)$$

Dzieląc równanie (25) przez (26) otrzymamy równanie nowej krzywej przejściowej w układzie bezwymiarowym

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{3} \left[5 \left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right] \quad (27)$$

Krzywa ta jest parabolą piątego rzędu. Długość jej obliczymy za pomocą warunku brzegowego, któremu równanie (19) musi uczynić zadość.

Warunek ten wymaga, aby dla $x = \frac{l}{2}$ największe pochylenie rampy przechyłkowej nie przekraczało wartości $\frac{1}{i} = \frac{dz}{dx} = \frac{3h}{2l}$, skąd dla długości l krzywej przejściowej otrzymujemy wzór

$$l = 1,5 \, ih \quad (28)$$

Dla ułatwienia obliczeń zestawiono w tablicy 2 współrzędne zmodyfikowanej tu krzywej przejściowej określające jej kształt:

- w planie według równania (18) oraz
- w profilu według równania (27).

Wykres oparty na tablicy 2 byłby zupełnie podobny do wykresu pokazanego na rysunku 3, nie ma więc potrzeby sporządzania dodatkowego rysunku dla zobrazowania kształtu omówionej tu krzywej.

Tablica 2

x/l	z/h	y/f
0,0	0,000	0,00000
0,1	0,028	0,00016
0,2	0,104	0,00245
0,3	0,216	0,01188
0,4	0,352	0,03584
0,5	0,500	0,08333
0,6	0,648	0,16416
0,7	0,784	0,28812
0,8	0,896	0,46421
0,9	0,972	0,69984
1,0	1,000	1,00000

Tablica 3

x/l	z/h	y/f
0,0	0,00000	0,00000
0,1	0,02447	0,00014
0,2	0,09549	0,00218
0,3	0,20611	0,01088
0,4	0,34549	0,03359
0,5	0,50000	0,07963
0,6	0,65451	0,15929
0,7	0,79390	0,28288
0,8	0,90451	0,45971
0,9	0,97553	0,69715
0,0	1,00000	1,00000

B. Krzywa przejściowa jako sinusoida. Przyjmując krzywą rampy przechyłkowej w postaci sinusoidy i zachowując te same warunki brzegowe (17) co w przykładzie poprzednim, możemy dla przyjętego tu przypadku powtórzyć tok rozważań ujęty układem równań (17)—(27). W końcowym wyniku przeprowadzonych w ten sposób obliczeń otrzymamy następujące wzory

$$\frac{z}{h} = \frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) = \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2l} \right) \quad (29)$$

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{\pi^2 - 4} \left[x^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 - 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \right] \quad (30)$$

przy czym

$$f = \frac{l^2}{4\pi^2 R} (\pi^2 - 4); \quad l = \frac{\pi i h}{2} \quad (31)$$

Praktyczne zastosowanie tych wzorów może ewentualnie ułatwić tablica 3 zbudowana zupełnie podobnie jak podane poprzednio tablice 1 i 2.

4. Łuki idealne

Rozpatrzoną w pozycji 2 i 3 teorią krzywej przejściowej można również objąć łuki idealne (zwane także łukami zupełnymi) (por. [5]), za pomocą których można zastąpić łuk kołowy z dwiema krzy-

wymi przejściowymi na obu jego końcach jednym łukiem o zmiennej krzywiznie pokazanym na rysunku 4.

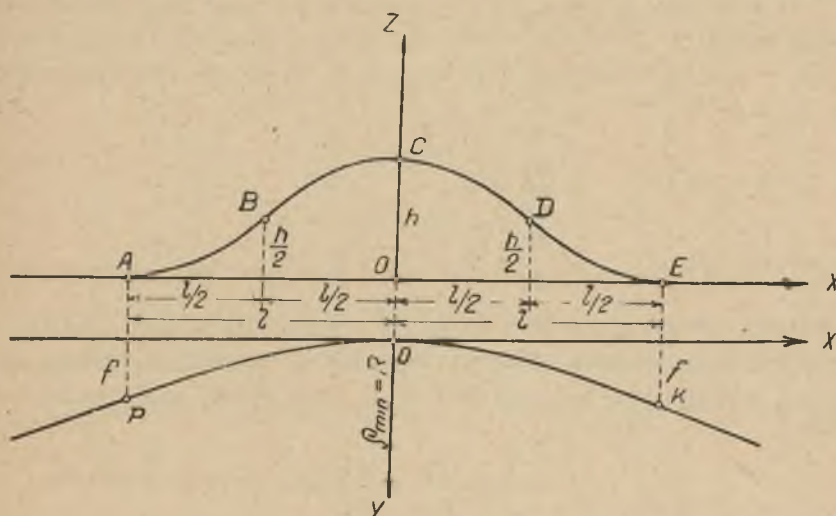
Rozpatrzmy tu prosty przykład takiego uogólnienia teorii pierwotnej w oparciu o podany uprzednio wzór

$$\frac{z}{h} = \frac{R}{\rho}, \quad (23a)$$

który prowadzi do równania różniczkowego

$$\frac{1}{\rho} = \sim \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z}{Rh} = k \quad (32)$$

określającego teoretyczny kształt łuku idealnego w zależności od zmiennej krzywizny $k = \frac{1}{\rho}$ (lub od zmiennej przechyłki $\frac{z}{h}$) oraz od wartości



Rys. 4. Łuk idealny: a — w planie POK, b — w profilu ABCDE

$\rho_{min} = R$ występującej w środku łuku idealnego, tj. w punkcie 0 (rys. 4). Z rysunku tego widać, że krzywą przechyłki — określającą również przebieg zmiennej krzywizny łuku idealnego¹ — można przyjąć w postaci sinusoidy, która dla układu współrzędnych, przyjętego na rys. 4 da się wyrazić wzorem

$$z = \frac{h}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{l} \right) \quad (33)$$

¹ Wielkości zmiennej przechyłki z i zmiennej krzywizny k są ze sobą związane zależnością liniową (por. wzór (32), w szczególności jego dwa ostatnie człony).

Będzie wtedy

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\pi h}{2l} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (34)$$

oraz

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{\pi^2 h}{2l^2} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (35)$$

Równania powyższe — jak łatwo sprawdzić — czynią zadość następującym warunkom brzegowym, które można odczytać wprost z rysunku 4:

- | | | |
|----------------------------|------|--|
| 1) Dla $x = 0$ | jest | $z = h$ |
| 2) „ $x = \pm \frac{l}{2}$ | „ | $z = \frac{h}{2}$ |
| 3) „ $x = \pm l$ | „ | $z = 0$ |
| 4) „ $x = 0$ | „ | $\frac{dz}{dx} = 0$ |
| 5) „ $x = \pm \frac{l}{2}$ | „ | $\frac{dz}{dx} = \mp \frac{\pi h}{2l}$ |
| 6) „ $x = \pm l$ | „ | $\frac{dz}{dx} = 0$ |
| 7) „ $x = \pm \frac{l}{2}$ | „ | $\frac{dz}{dx} = 0$ |

Z warunku brzegowego 5) wynika, że z uwagi na skośne ułożenie obu toków szynowych w łuku idealnym największe pochylenie rampy przechyłkowej występujące w punktach B, D (rys. 4) nie może przekroczyć wartości

$$\frac{l}{i} = \frac{dz}{dx} = \frac{\pi h}{2l}$$

Musi więc być

$$2l = \pi h i \quad (36)$$

Podstawiając (33) w równanie (32) otrzymamy równanie różniczkowe łuku idealnego w postaci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{z}{hR} = \frac{1}{2R} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{l} \right)$$

Całkując to równanie dwukrotnie podług x i uwzględniając, że dla $x = 0$ powinno być $y = 0$ oraz $\frac{dy}{dx} = 0$, otrzymamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{l}{2\pi R} \left[\pi \left(\frac{x}{l} \right) + \sin \frac{\pi x}{l} \right] \quad (37)$$

oraz

$$y = \frac{l}{4\pi^2 R} \left[\pi^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \right] \quad (38)$$

Największa rzędna f łuku idealnego wystąpi w przyjętym tu układzie współrzędnych na obu końcach tego łuku, tj. dla $x = \pm l$ i będzie miała na mocy (38) wartość

$$f = \frac{l^2}{4\pi^2 R} (\pi^2 + 4) \quad (39)$$

Dzieląc (38) przez (39) dostaniemy równanie łuku idealnego w układzie bezwymiarowym

$$\frac{y}{f} = \frac{1}{\pi^2 + 4} \left[\pi^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \right] \quad (40)$$

Całkowitą długość tego łuku obliczymy za pomocą równania (37) i rysunku 5, gdzie pokazany jest kąt 2α dwu prostych t_1, t_2 , które mają być połączone łukiem idealnym. Z danych tych wynika, że dla $x = \pm l$ musi być

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{l}{2R},$$

czyli że

$$|l| = 2R \operatorname{tg} \alpha \quad (41)$$

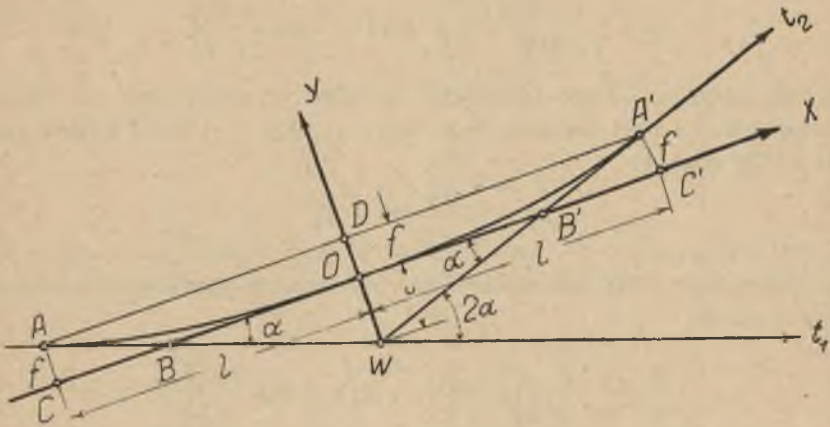
Uwzględniając teraz wzór (36) możemy napisać

$$2l = 4R \operatorname{tg} \alpha = \pi h i \quad (42)$$

Dla ustalonego wzorami (33) oraz (40) łuku idealnego $ABCDE$ możemy teraz łatwo obliczyć tabelkę wartości $\frac{z}{h}$ oraz $\frac{y}{f}$ w zależności od wielkości $\frac{x}{l}$. Wartości te są zestawione w tablicy 4.

Tablica 4

x/l	z/h	y/f
0,0	1,00000	0,00000
0,1	0,97553	0,01417
0,2	0,90451	0,05600
0,3	0,79390	0,12340
0,4	0,65456	0,21350
0,5	0,50000	0,32097
0,6	0,34549	0,44495
0,7	0,20611	0,57764
0,8	0,09549	0,71630
0,9	0,02447	0,85774
1,0	0,00000	1,00000



Rys. 5. Zasadnicze elementy łuku idealnego AOA' :
 $WD = U + f - 2tg\alpha$, $WA = WA' = \frac{U+f}{\sin \alpha} = \frac{Z}{\cos \alpha}$
 $WO = U = Ztg\alpha - f$ $WB = \frac{U}{\sin \alpha}$
 $OC = OC' = Z = AD = A'D$

5. Łuki niejednorodne

Oprócz rozpatrzonych wyżej uogólnień krzywej prof. Wątorka możliwe są jeszcze inne jej odmiany, które tu krótko omówimy:

a) Złożona krzywa przejściowa. Można np. krzywą przejściową złożyć z dwóch części mających wspólną rzędną i wspólną statyczną w punkcie przegięcia P ramy przechyłkowej, tj. dla $x = l$ (rys. 2). Przykładem takiego rozwiązania może być układ, w którym rampa przechyłkowa będzie złożona z dwóch parabol drugiego rzędu, o równaniu

$$\frac{z}{h} = 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \quad (43)$$

ważnym w przedziale $x \left(0, \frac{l}{2} \right)$ oraz

$$\frac{z}{h} = - \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right) + 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (44)$$

ważnym w przedziale $x \left(\frac{l}{2}, l \right)$. Kształt krzywej przejściowej w planie

będzie określony dla przedziału $x \left(0, \frac{l}{2} \right)$ równaniem

$$\frac{y}{e} = \left(\frac{x}{l} \right)^4 \quad (45)$$

zaś dla przedziału $x \left(\frac{l}{2}, l \right)$ otrzymamy równanie

$$\frac{y}{e} = \frac{7}{8} - 3 \left(1 - \frac{x}{l} \right) + 3 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^2 - \left(1 - \frac{x}{l} \right)^4 \quad (46)$$

Parametr pomocniczy e ma w obu równaniach (45), (46) tę samą wartość $e = \frac{l^2}{6R}$. Pozostałe elementy krzywej przejściowej dadzą się łatwo z podanych wyżej równań wyznaczyć i nie wymagają żadnych dodatkowych komentarzy.

b) Złożony łuk idealny. W sposób zupełnie analogiczny do podanego wyżej w pozycji 5a) można również łuki idealne przedstawić w postaci układu złożonego z kilku łuków częściowych. Realizacja tego pomysłu nie przedstawia żadnych trudności dodatkowych, toteż szerzej go tu omawiać nie ma potrzeby, tym bardziej że ilość możliwych modyfikacji tego rodzaju jest teoretycznie nieograniczona, a praktycznie bardzo duża. Z tego więc względu poprzestaniemy na podaniu tej krótkiej wzmianki o takiej możliwości.

6. Uwagi końcowe

Uproszczenie skomplikowanych wzorów wyznaczających kształt krzywej przejściowej prof. Wątorcka, dzięki czemu osiągnięta została możliwość opracowania tablic liczbowych tej krzywej, nie usuwa wszystkich trudności przeszkadzających ewentualnej próbie praktycznego jej zastosowania. Można tu bowiem wysunąć zarzut, że tak wykonanie, jak i bieżące utrzymanie zakrzywionej ramy przechyłkowej będzie w praktyce zadaniem bardzo trudnym i być może zbyt kosztownym. W związku z powyższym wysuniemy tu następujące zapytanie: Czy nie można by — dla zmniejszenia lub całkowitego usunięcia ostatnio wspomnianych trudności — potraktować krzywą prof. Wątorcka jako krzywą płaską, określoną wyłącznie równaniem (16), a rampie przechyłkowej nadać kształt liniowo zmienny typu

$$\frac{z}{h} = \frac{x}{l} \quad (47)$$

Taki sposób wykonania przechyłki dla krzywej prof. Wątorcka da się łatwiej przeprowadzić w praktyce budowy i utrzymania toru. Czy jednak zmiana ta nie narusza zasadniczej koncepcji teorii pierwotnej? Może się przecież na pierwszy rzut oka wydawać, że przyjęcie w praktyce zamiast równania (12) uproszczonego równania (47) jest z teorią pierwotną niezgodne i być może pociągnęłoby za sobą konieczność zasadniczej zmiany

kształtu tej krzywej w planie. Wykażemy, że obawy ewentualnie zarzuty takie są niesłuszne i że wprost przeciwnie właśnie kształt przechyłki określony równaniem (47) jest bardziej z teorią krzywej prof. Wątorka w planie niż kształt określony równaniem (12). Zważmy, że obok poglądu dopatrującego się przyczyny zaburzeń ruchu pojazdów na krzywej przejściowej w braku zaokrągleń na załomach B , D rampy przechyłkowej (rys. 1) można też wysunąć przypuszczenie, że przyczyną tych zaburzeń jest zbyt ostra zmiana krzywizny k określonej równaniem (32), powodująca zbyt nagle zmiany wartości siły odśrodkowej na krzywej przejściowej. Siła odśrodkowa

$$S = mv^2/\rho = mv^2k$$

jest wprost proporcjonalna do krzywizny k . Wątorok przyjmuje w swojej teorii, że krzywiznę tę przedstawia wzór przybliżony

$$k = \frac{1}{\rho} = \sim \frac{d^2y}{dx^2} \quad (48)$$

tnz. uwzględnia jej zależność tylko od zmiennej y , określającej kształt krzywej przejściowej w planie, gdy natomiast z geometrii różniczkowej wiemy, że dla przybliżenia $ds = \sim dx$, stosowanego w teorii krzywych przejściowych musi ponadto wystąpić tu zależność od zaokrągleń rampy przechyłkowej wyrażona wzorem

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)^2} \quad (49)$$

Z porównania wzorów (48) i (49) widzimy, że w teorii prof. Wątorka zależność krzywizny krzywej przejściowej od zaokrągleń rampy przechyłkowej została całkowicie pominięta, czyli zostało tu przyjęte założenie dodatkowe

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0 \quad (50)$$

Temu dodatkowemu założeniu odpowiada liniowy kształt rampy przechyłkowej określony równaniem (47). Tak więc propozycja nasza wyrażona wzorem (47) jest nie tylko słuszna z uwagi na wymagania ekonomii budowy i utrzymania toru z krzywą prof. Wątorka, lecz jest również pod względem teoretycznym w zupełności uzasadniona. Przyjęcie przestawionego tu punktu widzenia wymaga jedynie małej zmiany interpretacji równań określających tak w teorii pierwotnej, jak i w jej modyfikacjach wyżej omówionych wielkości $\frac{z}{h}$ w równaniach (12), (18), (29),

(33), (43) i (44). Z naszego punktu wielkość $\frac{z}{h}$ nie ma w tych równaniach

służyć do określenia kształtu zakrzywionej rampy przechyłkowej, lecz przedstawia złagodzenie zmian krzywizny krzywej przejściowej, a tym samym zapewnia łagodniejszy przebieg zmian siły odśrodkowej na krzywej przejściowej.

Tak więc zasadniczy cel naszej rozprawy, polegający na:

a) usunięciu niepotrzebnych komplikacji analitycznych w budowie zasadniczych wzorów teorii prof. Wątoraka,

b) opracowaniu tablic ułatwiających obliczenie zasadniczych elementów jego krzywej przejściowej,

c) podaniu zgodnej z teorią propozycji uproszczenia rampy przechyłkowej — został naszym zdaniem całkowicie osiągnięty. Obecnie więc nie ma żadnych przeszkód, aby teoria krzywej przejściowej prof. Wątoraka, której wartość naukową dodatkowo potwierdziły przedstawione w naszej rozprawie modyfikacje, mogła znaleźć właściwe zastosowanie w praktyce.

LITERATURA

- [1] K. Wątorak, „Krzywe przejściowe”. Czasopismo Techniczne, Lwów 1906.
- [2] K. Wątorak, „Uebergangsbogen”. Organ f. d. Fortschritte des Eisenbahnwesens, 1907, Heft 10.
- [3] K. Wątorak, *Budowa kolei żelaznych*, t. 1, Warszawa 1924.
- [4] K. Skibiński, *Tyczenie tras*. Biblioteka Politechniczna, Tom XXII, Lwów 1909.
- [5] G. Schramm, *Der vollkommene Gleisbogen*, Springer Verlag Berlin 1931.
- [6] W. Rzepka, *Krzywizny tor*. Wydawnictwa Komunikacyjne, Warszawa 1954.