

WŁODZIMIERZ STAROSOLSKI, ZDZISŁAW SULIMOWSKI

PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW SPRĘŻONYCH  
OBCIĄŻONYCH MIMOŚRODOWO

## WSTĘP

Zagadnienie projektowania przekrojów sprężonych obciążonych mimośrodowo, w przeciwieństwie do przekrojów narażonych tylko na zginanie nie doczekało się dotąd wyczerpującego opracowania.

Pod względem teoretycznym zagadnienie to jest ogólniejsze aniżeli czyste zginanie i dlatego potrzeba opracowania tematu wydała się autorom oczywista.

Praca niniejsza nawiązując do metody projektowania sprężonych przekrojów zginanych podanej przez W. Starosolskiego /4/, stanowi niezależną całość traktującą w sposób ogólny o projektowaniu przekrojów sprężonych obciążonych mimośrodowo.

Teoria jest opracowana bez względu na kierunek sił osiowych i momentów; określa je tylko znak algebraiczny w obliczeniu numerycznym. Oczywiście jeżeli założymy siłę osiową równą zeru, otrzymamy przypadek zginania i wszystkie wzory pozostają nadal ważne.

Opierając się na zadanych obciążeniach i wartościach naprężeń dopuszczalnych poszukujemy w pierwszej części pracy siły do gotowego przekroju, w drugiej zaś projektujemy przekrój i dobieramy siłę sprężającą. Dla wyczerpania wszystkich wariantów pracy pręta wprowadzono do rozważań oprócz stanów użytkowych i bezużytkowego również stan początkowy.

## 1. OKREŚLENIA WSTĘPNE

### 1.1. Ważniejsze pojęcia

Element konstrukcyjny narażony na mimośrodowe obciążenie nazywać będziemy "prętem", by przez nazwę belka lub słup nie sugerować charakteru obciążenia.

Zakładamy symetrię przekroju poprzecznego pręta względem płaszczyzny działania obciążeń.

### 1.2. Stany pracy pręta

Wyróżniamy cztery stany pracy pręta wyczerpujące w zasadzie wszystkie możliwości obciążenia i stabilizacji siły sprężającej.

- a/ Stan początkowy /stan 0/. W stanie tym działają na przekrój wielkości statyczne wywołane ciężarem własnym pręta i obciążeniami działającymi w chwili sprężenia oraz początkowa wartość siły sprężającej.
- b/ Stan bezużytkowy /stan 1/. Obciążenia zewnętrzne są tu takie same jak w stanie 0, natomiast siła sprężająca jest ustabilizowana do swej wartości końcowej, po zakończeniu strat reologicznych. Stan ten w praktycznej realizacji występuje rzadko, ponieważ zazwyczaj przed zakończeniem strat reologicznych nanosimy dalsze obciążenia.

Pozostałe dwa, są to stany pracy konstrukcji i tak:

- c/ Stan użytkowy minimalny /stan 2'/. W stanie tym działa na przekrój moment minimalny i przynależna siła osiowa, ewentualnie minimalna siła osiowa i przynależna wartość momentu.
- d/ Stan użytkowy maksymalny /stan 2/. Na przekrój działa tutaj moment maksymalny i przynależna wartość siły osiowej lub maksymalna siła osiowa i przynależny moment.

Oczywiście w obydwu stanach 2' i 2 działa już ustabilizowana wartość siły sprężającej.

### 1.3. Obciążenia

Jako moment maksymalny definiujemy bezwzględnie największą wartość momentu działającego na przekrój od obciążeń stałych i użytkowych. Znak tego momentu przyjmujemy jako dodatni.

Momentem minimalnym nazywać będziemy algebraicznie najmniejszy moment działający w przekroju spowodowany obciążeniem stałym i użytkowym.

Siły osiowe znakować będziemy zgodnie z przyjętym w łukach i ramach zwyczajem: ściskanie - dodatnie, rozciąganie - ujemne.

Jeżeli na konstrukcję działa wiele schematów obciążenia, często wzajemnie się wykluczających, to ogólnie możemy zestawić cztery kombinacje obciążenia.

I.	$M_{\max}$	i	$N$ przynależne
II.	$M_{\min}$	i	$N$ przynależne
III.	$N_{\max}$	i	$M$ przynależne
IV.	$N_{\min}$	i	$M$ przynależne

Najczęściej proste porównanie wskaże nam, która kombinacja jest miarodajna do projektowania. Przy wartościach bliskich liczbowo często bierzemy wartości maksymalne i minimalne - daje to przekroje trochę niewykorzystane, ale zwalnia nas od powtórnego obliczenia na pozostałe kombinacje obciążeń.

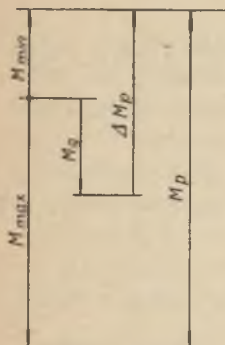
#### Nomenklatura obciążeń przekroju

$$M_g = F\beta + M_{g1}$$

gdzie:

- $F\beta$  - moment od ciężaru własnego pręta,  $F$  oznacza pole przekroju poprzecznego pręta,
- $M_{g1}$  - moment od obciążeń stałych, działający w chwili sprężenia, bez ciężaru własnego pręta,
- $\Delta M_P$  - najmniejszy możliwy algebraicznie moment zginający od obciążeń użytkowych, z wybranej pary kombinacji obciążeń.





Rys. 1

$M_p$  - różnica pomiędzy największym a najmniejszym algebraicznie momentem zginającym od obciążeń użytkowych, z wybranej pary kombinacji obciążeń /rys.1/,

$$N_g = F\lambda + N_{g1}$$

gdzie:

$F\lambda$  - siła osiowa wywołana ciężarem własnym pręta,  
 $N_{g1}$  - siła osiowa od obciążeń stałych działających w chwili sprężenia, bez ciężaru własnego pręta,

$\Delta N_p$  - siła osiowa przynależna do  $\Delta M_p$  z wybranej pary kombinacji obciążeń,  
 $N_p$  - różnica pomiędzy siłą osiową przyporządkowaną największemu a najmniejszemu algebraicznie momentowi.

#### 1.4. Siła sprężająca

Wielkość siły tuż po dokonaniu zabiegu sprężania nazywamy początkową siłą sprężającą i oznaczamy  $S_0$ .

Po zakończeniu procesu strat reologicznych uśrednioną siłą sprężającą oznaczamy przez  $S$  i zwiemy krótko siłą sprężającą. Pomiędzy siłami  $S_0$  i  $S$  zachodzi relacja:

$$\eta S_0 = S$$

gdzie  $\eta$  jest współczynnikiem określającym sumaryczną wielkość strat reologicznych początkowej siły sprężającej.

#### 1.5. Naprężenia dopuszczalne

W poszczególnych stanach pracy pręta przyjmujemy różne wartości naprężeń dopuszczalnych.

Oznaczamy ogólnie:

$k_i$  - naprężenie ściskające większe w stanie  $i$ ,  
 $k_i^1$  - naprężenie ściskające mniejsze lub naprężenie rozciągające w stanie  $i$ .

W szczególności:

Stan i	$k_i$	$k'_i$
0	$k_0$	$k'_0$
1	$k_1$	$k'_1$
2' i 2	$k_2$	$k'_2$

Naprężenia ściskające oznaczamy jako dodatnie, - rozciągające jako ujemne.

## 2. WARUNKI PODSTAWOWE

### 2.1. Ogólna postać promieni rdzeni uogólnionych

Prawidłowo zaprojektowany przekrój powinien spełniać wszystkie wymogi wytrzymałościowe i konstrukcyjne. Te pierwsze, sprowadzają się do nieprzekroczenia w dowolnym stanie obciążenia zadanych z góry wartości naprężeń dopuszczalnych. Zagadnienie to wiąże się ściśle z położeniem siły sprężającej wewnątrz przekroju pomiędzy obwiedniami granicznymi, które odmierzane są od promieni rdzeni uogólnionych. W przekrojach narażonych na czyste zginanie wielkości promieni rdzeni uogólnionych zależą od cech geometrycznych przekroju, obydwu naprężeń dopuszczalnych i siły sprężającej.

Uzyskujemy tu po dwie wartości na każdy promień rdzenia, z których miarodajna jest oczywiście wartość bezwzględnie mniejsza. W formule matematycznej warunki te przedstawiają się następująco:

$$/2.1.1/ \quad r_{ui} = \begin{cases} r'_w \left(1 - \frac{F}{S} k_i\right) \\ r_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_i\right) \end{cases} \quad r'_{ui} = \begin{cases} r'_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_i\right) \\ r_w \left(1 - \frac{F}{S} k_i\right) \end{cases}$$

Zagadnienie przekroju obciążonego mimośrodowo możemy sprowadzić do przekroju obciążonego samym tylko momentem, jeżeli potrafimy uwzględnić wpływ siły osiowej na promienie rdzeni uogólnionych. Możemy to łatwo zrobić modyfikując odpowiednio wartości naprężeń dopuszczalnych.

Dla dowolnego przypadku obciążeń zachodzi tu prosta relacja na wartość naprężenia dopuszczalnego zmodyfikowanego.

$$/2.1.2/ \quad k_{mi} = k_i - \frac{N_i}{F} \quad i \quad k'_{mi} = k'_i - \frac{N_i}{F}$$

gdzie:

$N_i$  - siła osiowa w stanie  $i$ .

W poszczególnych stanach mamy:

$$/2.1.2.1/ \quad "0" \quad k_{m0} = k_0 - \frac{N_g}{F}$$

$$/2.1.2.2/ \quad k'_{m0} = k'_0 - \frac{N_g}{F}$$

$$/2.1.2.3/ \quad "1" \quad k_{m1} = k_1 - \frac{N_g}{F}$$

$$/2.1.2.4/ \quad k'_{m1} = k'_1 - \frac{N_g}{F}$$

$$/2.1.2.5/ \quad "2'" \quad k_{m2'} = k_2 - \frac{N_g + \Delta N_p}{F}$$

$$/2.1.2.6/ \quad k'_{m2'} = k'_2 - \frac{N_g + \Delta N_p}{F}$$

$$/2.1.2.7/ \quad "2" \quad k_{m2} = k_2 - \frac{\Sigma M}{F} \quad \Sigma N$$

$$/2.1.2.8/ \quad k'_{m2} = k'_2 - \frac{\Sigma M}{F} \quad \Sigma N$$

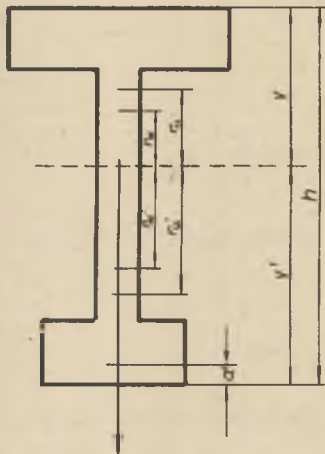
gdzie:

$$\Sigma N = N_g + \Delta N_p + N_p$$

Tym samym sprowadziliśmy obciążenie mimośrodowe do czystego zginania, z tą różnicą, że zamiast naprężeń dopuszczalnych  $k_i$  i  $k'_i$  występują w tym układzie naprężenia dopuszczalne zmodyfikowane  $k_{mi}$  i  $k'_{mi}$ .



Dla zginania ważnym był tylko jeden promień rdzenia uogólnionego dla poszczególnego stanu. W naszym przypadku sytuacja jest analogiczna, z tym, że pojęcie górnego i dolnego promienia rdzenia zdefiniujemy nieco odmiennie a mianowicie:



Rys.2

Górnym promieniem rdzenia uogólnionego  $/r'_u/$  nazwiemy ten promień rdzenia, który będzie położony bliżej ściskanego włókna przekroju obciążonego momentem maksymalnym, dolnym promieniem  $/r'_u/$  będzie więc promień położony bliżej włókna rozciąganego pod wpływem tego samego momentu.

Również za kierunek dodatni osi, pokrywający się z osią symetrii przekroju, przyjmować będziemy kierunek od środka ciężkości przekroju do włókien rozciąganych działaniem momentu maksymalnego.

Po dokonaniu tych założeń możemy ustalić, że w stanie "0" interesuje nas tylko  $r'_{u0}$ , w stanie "1" -  $r'_{u1}$ , w stanie "2" -  $r'_{u2}$  i w stanie "2'" -  $r'_{u2'}$ .

Ponieważ wielkości tych promieni są dla każdego stanu różne, każdemu z nich przyporządkujemy indeks tego stanu, dla którego został obliczony. Będziemy mieć odpowiednio:

$$r'_{u0}$$

$$r'_{u1}$$

$$r'_{u2'}$$

$$r'_{u2}$$

Mając na każdy z promieni rdzeniowych po dwa wyrażenia, zależne od naprężeń dopuszczalnych, musimy ustalić które z nich jest w danym przypadku miarodajne. Wybór z poszczególnych par ważnych wzorów, zależęć będzie od położenia siły sprężającej względem tzw. "siły właściwej" każdego stanu.

Dla przykładu przedyskutujemy to zagadnienie dla stanu "Q". Są tu dwa wyrażenia na dolny promień rdzenia uogólnionego:

$$r'_{uo} = \begin{cases} r'_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k'_{mo}\right) \\ r_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k_{mo}\right) \end{cases}$$

Założmy że:

$$r'_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k'_{mo}\right) \leq r_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k_{mo}\right)$$

i wprowadzając związki  $r_w = r'_w \frac{v}{v'}$ , otrzymamy po przekształceniu

$$S \leq \eta \frac{F}{h} (v' k'_{mo} - v k_{mo})$$

Podstawiając tu wzory 2.1.2.1 i 2.1.2.2 dostaniemy:

$$S \leq \eta \left[ \frac{F}{h} (v' k'_o - v k_t) - N_g \right]$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym nazywamy siłą właściwą dla stanu "Q"

/2.1.3/

$$S_{wo} = \frac{F}{h} (v' k'_o - v k_o) - N_g$$

Jeżeli stwierdzimy, że  $S \leq \eta S_{wo}$  to miarodajnym wyrażeniem na promień rdzenia uogólnionego jest:

$$/2.1.4/ \quad r'_{uo} = r'_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k'_{mo}\right) = r'_w \left[1 - \frac{\eta}{S} (F k'_o - N_g)\right]$$

Gdy chcemy wykorzystać obydwa naprężenia to musi być:

$$r'_{uo} = r'_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k'_{mo}\right) = r_w \left(1 - \eta \frac{F}{S} k_{mo}\right)$$



Sily właściwe i promienie rdzeni uogólnionych

$$\Sigma N = N_g + \Delta N_p + N_p$$

L.p.	Stan i	Sila $S_{wi}$	Wielkość sily $S$	Promień rdzenia uogólnionego
1	0	$S_{w0} = \frac{F}{h}(\psi'k'_0 - \psi k_0) - N_g$	$S \leq \eta S_{w0}$	$r'_{u0} = r'_w \left[ 1 - \frac{\eta(Fk'_0 - N_g)}{S} \right]$
2			$S = \eta S_{w0}$	$r'_{u0} = r'_w \frac{v(k'_0 - k_0)}{v'k'_0 - vk_0 - \frac{hN_g}{F}} = r_w \frac{v(k'_0 - k_0)}{v'k'_0 - vk_0 - \frac{hN_g}{F}}$
3			$S \geq \eta S_{w0}$	$r'_{u0} = r'_w \left[ 1 - \frac{\eta(Fk'_0 - N_g)}{S} \right]$
4	1	$S_{w1} = \frac{F}{h}(\psi'k'_1 - \psi k_1) - N_g$	$S \leq S_{w1}$	$r'_{u1} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_1 - N_g}{S} \right)$
5			$S = S_{w1}$	$r'_{u1} = r'_w \frac{v(k'_1 - k_1)}{v'k'_1 - vk_1 - \frac{hN_g}{F}} = r_w \frac{v(k'_1 - k_1)}{v'k'_1 - vk_1 - \frac{hN_g}{F}}$
6			$S \geq S_{w1}$	$r'_{u1} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_1 - N_g}{S} \right)$
7	2'	$S_{w2'} = \frac{F}{h}(\psi'k'_2 - \psi k_2) - (N_g + \Delta N_p)$	$S \leq S_{w2'}$	$r'_{u2'} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_2 - N_g - \Delta N_p}{S} \right)$
8			$S = S_{w2'}$	$r'_{u2'} = r'_w \frac{v(k'_2 - k_2)}{v'k'_2 - vk_2 - \frac{h(N_g + \Delta N_p)}{F}} = r_w \frac{v(k'_2 - k_2)}{v'k'_2 - vk_2 - \frac{h(N_g + \Delta N_p)}{F}}$
9			$S \geq S_{w2'}$	$r'_{u2'} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_2 - N_g - \Delta N_p}{S} \right)$
10	2	$S_{w2} = \frac{F}{h}(\psi'k'_2 - \psi k_2) - \Sigma N$	$S \leq S_{w2}$	$r_{u2} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_2 - \Sigma N}{S} \right)$
11			$S = S_{w2}$	$r_{u2} = r'_w \frac{v(k_2 - k'_2)}{v'k_2 - vk'_2 - \frac{h\Sigma N}{F}} = r_w \frac{v(k_2 - k'_2)}{v'k_2 - vk'_2 - \frac{h\Sigma N}{F}}$
12			$S \geq S_{w2}$	$r_{u2} = r'_w \left( 1 - \frac{Fk'_2 - \Sigma N}{S} \right)$

co jest równoznaczne z przyjęciem  $S = \eta S_{w0}$ . Po wstawieniu do tej relacji wzorów 2.1.2.1, 2.1.2.2<sup>w0</sup> i 2.2.9 otrzymamy:

$$/2.1.5/ \quad r'_{uo} = r'_w \frac{v(k'_0 - k_0)}{v'k'_0 - vk_0 - \frac{hN}{F}} = r_w \frac{v'(k'_0 - k_0)}{v'k'_0 - vk_0 - \frac{hN}{F}}$$

W przypadku gdy  $S \geq \eta S_{w0}$  miarodajnym wyrażeniem na promień rdzenia uogólnionego jest:

$$/2.1.6/ \quad r'_{uo} = r_w \left(1 - \frac{\eta F}{S} k_{mo}\right) = r_w \left[1 - \frac{\eta}{S} (F k_0 - N_g)\right]$$

Postępując podobnie potrafimy określić dla pozostałych stanów kiedy która wartość promienia rdzenia jest miarodajna w zależności od położenia siły sprężającej względem siły właściwej dla danego stanu. Wyniki tych rozważań przedstawiono w tablicy I.

## 2.2. Zakresy projektowania i nierówności

Zasadniczym stanem pracy pręta jest stan 2, i zarówno przy projektowaniu przekroju jak i przy samym dobieraniu siły staramy się wykorzystać naprężenia w tym stanie.

Z pozostałych stanów ten będzie miarodajny do projektowania, dla którego nieprzekroczenie naprężeń dopuszczalnych, będzie gwarantowało nieprzekroczenie naprężeń w pozostałych stanach. Łącząc ten stan ze stanem 2 otrzymamy miarodajny **z a k r e s** projektowania.

Ogólnie możemy wyróżnić trzy zakresy projektowania 0-2, 1-2, i 2'-2.

Dla każdego zakresu projektowania możemy ustawić nierówności służące za punkt wyjścia przy dobieraniu siły i jej mimośrod, a wiążące jej wartość i położenie z cechami geometrycznymi przekroju, obciążeniami i naprężeniami dopuszczalnymi dla danego zakresu.

Dla zakresu 0-2 mamy

$$/2.2.1.1/ \quad \frac{\Sigma M}{S} \leq v' - r_{u2} - a'$$

$$/2.2.1.2/ \quad \frac{\Sigma M}{S} \leq -r_{u2} + r'_{uo} + \frac{\eta M}{S}$$

gdzie:

$$\Sigma M = M_g + \Delta M_p + M_p$$

Nierówności te podają nam warunki wytrzymałościowe, których spełnienie jest konieczne by przekrój mógł przenieść obciążenia przy naprężeniach programowych.

Istnieje jeszcze nierówność trzecia:

$$\frac{\gamma M_g}{S} \geq v' - r'_{uo} = a'$$

określająca nam w zależności od kierunku znaku nierówności przekrój względem konwencjonalnej, ewentualnie właściwej granicy ciężaru własnego.

Mając do czynienia z dobozem siły sprężającej do gotowego już przekroju rzadko odnajdziemy przypadek dla którego promienie rdzeni uogólnionych  $r_{u2}$  i  $r'_{u1}$  z rozpatrywanego zakresu projektowania, obliczone przy pomocy obydwu naprężeń  $k_2$  i  $k'_2$  oraz  $k_1$  i  $k'_1$  byłyby sobie równe, a więc dawały wykorzystanie obydwu naprężeń. Jeżeli więc istnieje możliwość zetknięcia się obwiedni granicznych w obszarze  $v' - r'_{u1} = a'$ , to ogólnie biorąc na pewno wykorzystamy dwa naprężenia - po jednym z każdego stanu.

Znajdując zatem przypadek obciążeń, dla którego obwiednie przetną się na prostej  $a'$ , potraktujemy go jako wartość graniczną i nazwiemy "konwencjonalną granicą ciężaru własnego". Oczywiście dla obciążenia powyżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego istnieje możliwość wykorzystania naprężenia /najczęściej jednego/ tylko ze stanu 2.

Jeżeli jednak mamy możliwość kształtowania przekroju dobieramy go w ten sposób, by obwiednie przecinając się w obszarze  $v' - r'_{u1} = a'$ , dawały nam możliwość wykorzystania 4 różnoimiennych naprężeń miarodajnych do projektowania. Dochodzimy tu do pojęcia znanej powszechnie "granicy ciężaru własnego", określonej przez położenie siły sprężającej na maksymalnym mimośrodzie przy wykorzystaniu 4 naprężeń.

W części poświęconej dobieraniu siły do istniejącego przekroju posługiwać się będziemy pojęciem konwencjonalnej granicy ciężaru własnego w zależności od znaku nierówności we wzorze 2.2.1.3 i odpowiednich z innych zakresów projektowania.



W zakresie 1-2 znajdujemy:

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq v' - r_{u2} - a'$$

/2.2.2.2/

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq -r_{u2} + r'_{u1} + \frac{M}{S}$$

oraz

/2.2.2.3/

$$\frac{M}{S} \geq v' - r'_{u1} - a'$$

a w zakresie 2'-2

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq v' - r_{u2} - a'$$

/2.2.3.2/

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq -r_{u2} + r'_{u2'} + \frac{M + \Delta M_p}{S}$$

/2.2.3.3/

$$i \quad \frac{M + \Delta M_p}{S} \geq v' - r'_{u2'} - a'$$

## 2.3. Ustalenie niebezpiecznych stanów obciążenia

Najwyższe położenie osi ciśnień wskaże nam stan niebezpieczny, który wraz ze stanem 2 określi miarodajny zakres projektowania.

Rozpatrzenie wszystkich trzech stanów łącznie gmatwa bardzo rachunek; uwzględnimy więc stany parami, co wymaga dwukrotnego przeliczenia, prowadzi jednak do dużo prostszych wzorów.

### 2.3.1. Stan 0 i 1

Największy możliwy mimośród  $e_{\max}$  dla poszczególnych stanów będzie:

$$\text{dla stanu 0} \quad e_{\max} = r'_{u0} + \frac{\gamma M}{S}$$

$$\text{dla stanu 1} \quad e_{\max} = r'_{u1} + \frac{\gamma M}{S}$$



Zakładając

$$/2.3.1.1/ \quad r'_{uo} + \frac{\eta_M E}{S} \leq r'_{u1} + \frac{M E}{S}$$

przyjmujemy, że niebezpieczniejszym jest stan 0.

Ponieważ siły właściwe dla danego przekroju zależą od jego cech geometrycznych i naprężeń zmodyfikowanych, rozpatrując położenie  $S$  względem  $S_w$ , potrafimy określić warunki, wyrażające się w znanych nam parametrach, dla których ważna jest nierówność 2.3.1.1.

Siła sprężająca  $S$  może przyjąć względem dwóch niezależnych wartości siły właściwej cztery położenia, a mianowicie:

$$/2.3.1.2/ \quad \text{I. } S < \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w1} \end{cases}$$

$$/2.3.1.3/ \quad \text{II. } \eta S_{wo} \leq S \leq S_{w1}$$

$$/2.3.1.4/ \quad \text{III. } \eta S_{wo} > S > S_{w1}$$

$$/2.3.1.5/ \quad \text{IV. } S > \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w1} \end{cases}$$

Wypadek I

$$S \leq \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w1} \end{cases}$$

dla takiego założenia

$$r'_{uo} = r'_w \left( 1 - \frac{\eta F}{S} k'_0 \right) + r'_w \frac{\eta N E}{S}$$

$$r'_{u1} = r'_w \left( 1 - \frac{F}{S} k'_1 \right) + r'_w \frac{N E}{S}$$

wstawiając te wzory do 2.3.1.1 otrzymamy:

$$r'_w \left(1 - \frac{\eta F}{S} k'_0\right) + r'_w \frac{\eta N}{S} + \frac{\eta M}{S} \leq r_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_1\right) + r'_w \frac{N}{S} + \frac{M}{S}$$

skąd po uporządkowaniu i przy założeniu  $k'_1 - \eta k'_0 > 0$

$$/2.3.1.6/ \quad \frac{(1-\eta)(M + r'_w N)}{k'_1 - \eta k'_0} \geq r'_w F = W$$

ewentualnie dla  $k'_1 - \eta k'_0 < 0$

$$/2.3.1.7/ \quad \frac{(1-\eta)(M + r'_w N)}{k'_1 - \eta k'_0} < r'_w F = W$$

#### Wypadek II

$$\eta S_{w0} \leq S \leq S_{w1}$$

tutaj ważne będą promienie rdzeni:

$$r'_{u0} = r_w \left(1 - \frac{\eta F}{S} k_0\right) + r_w \frac{\eta N}{S}$$

$$r'_{u1} = r'_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_1\right) + r'_w \frac{N}{S}$$

Po wstawieniu do 2.3.1.1 i uporządkowaniu otrzymamy warunek

$$/2.3.1.8/ \quad \frac{-(1-\eta) M - (r'_w - \eta r_w) N - F(r_w \eta k_0 - r'_w k'_1)}{S} < r'_w - r_w$$

Podstawiając odpowiednie promienie rdzeni uogólnionych do wypadku III i IV otrzymamy warunki zestawione w tablicy II.

## 2.3.2. Stan 0 i 2'

Występujący tutaj największy mimośród może przybierać wartości:

$$\text{dla stanu } 0 \quad e_{\max} = r'_{u0} + \frac{\gamma M_E}{S}$$

$$\text{dla stanu } 2' \quad e_{\max} = r'_{u2'} + \frac{M_E + \Delta M_P}{S}$$

Przyjęcie jako niebezpiecznego stanu 0 jest określone warunkiem

$$/2.3.2.1/ \quad r'_{u0} + \frac{\gamma M_E}{S} \leq r'_{u2'} + \frac{M_E + \Delta M_P}{S}$$

Rozpatrując położenie siły względem sił właściwych ze stanu 0 i 2' i wstawiając odpowiednie wartości promieni rdzeni uogólnionych otrzymamy warunki, zestawione w tablicy III, które muszą być spełnione by niebezpiecznym był stan 0. Jeżeli oczywiście kierunek nierówności jest przeciwny - determinującym jest stan 2'.

## 2.3.3. Stan 1 i 2'

Wzory na największy mimośród są tu następujące:

$$\text{dla stanu } 1 \quad e_{\max} = r'_{u1} + \frac{M_E}{S}$$

$$\text{dla stanu } 2' \quad e_{\max} = r'_{u2'} + \frac{M_E + \Delta M_P}{S}$$

Jeżeli założymy

$$/2.3.3.1/ \quad r'_{u1} + \frac{M_E}{S} \leq r'_{u2'} + \frac{M_E + \Delta M_P}{S}$$

czyli

$$r'_{u1} \leq r'_{u2'} + \frac{\Delta M_P}{S}$$

przyjmujemy tym samym, że niebezpieczniejszym jest stan 1.

Powtarzając podobne rozumowanie jak poprzednio otrzymamy wyniki zebrane w tablicy IV.

Tablica II

Kryteria określające kiedy stan 0 jest niebezpieczniejszy od stanu 1

Lp	Warunki	Kryteria
1	$S \leq \begin{cases} \eta S_{W0} \\ S_{W1} \end{cases}$	$k'_1 - \eta k'_0 > 0$ $\frac{(1-\eta)(M_0 + r'_W N_0)}{k'_1 - \eta k'_0} > r'_W F - W$
2		$k'_1 - \eta k'_0 < 0$ $\frac{(1-\eta)(M_0 + r'_W N_0)}{k'_1 - \eta k'_0} \leq r'_W F - W$
3	$\eta S_{W0} \leq S \leq S_{W1}$	$\frac{-(1-\eta)M_0 - (r'_W - \eta r'_W)N_0 - F(r'_W \eta k'_0 - r'_W k'_1)}{S} \leq r'_W - r_W$
4	$\eta S_{W0} \geq S \geq S_{W1}$	$\frac{(1-\eta)M_0 - (\eta r'_W - r_W)N_0 + F(r'_W \eta k'_0 - r'_W k'_1)}{S} \leq r'_W - r_W$
5	$S \geq \begin{cases} \eta S_{W0} \\ S_{W1} \end{cases}$	$k_1 - \eta k_0 > 0$ $\frac{-(1-\eta)(M_0 + r_W N_0)}{k_1 - \eta k_0} < -r_W F - W'$
6		$k_1 - \eta k_0 < 0$ $\frac{-(1-\eta)(M_0 + r_W N_0)}{k_1 - \eta k_0} \geq -r_W F - W'$



# Tablica III

Kryteria określające kiedy stan 0 jest niebezpieczniejszy od stanu 2'

L.p.	Warunki		Kryteria
1	$S < \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2'} \end{cases}$	$k_2' - \eta k_0' > 0$	$\frac{(1-\eta)(M_g + r_w' N_g) + \Delta M_p + r_w' \Delta N_p}{k_2' - \eta k_0'} \geq r_w' F = W$
2		$k_2' - \eta k_0' < 0$	$\frac{(1-\eta)(M_g + r_w' N_g) + \Delta M_p + r_w' \Delta N_p}{k_2' - \eta k_0'} < r_w' F = W$
3	$\eta S_{w0} \leq S \leq S_{w2'}$		$\frac{-(1-\eta)M_g - \Delta M_p + (\eta r_w' - r_w) N_g - r_w' \Delta N_p - F(r_w \eta k_0 - r_w' k_2')}{S} \leq r_w' - r_w$
4	$\eta S_{w0} > S \geq S_{w2'}$		$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p - (\eta r_w' - r_w) N_g + r_w \Delta N_p + F(r_w' \eta k_0' - r_w k_2)}{S} < r_w' - r_w$
5	$S \geq \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2'} \end{cases}$	$k_2 - \eta k_0 > 0$	$\frac{-(1-\eta)(M_g + r_w N_g) - \Delta M_p - r_w \Delta N_p}{k_2 - \eta k_0} \leq r_w F = W'$
6		$k_2 - \eta k_0 < 0$	$\frac{-(1-\eta)(M_g + r_w N_g) - \Delta M_p - r_w \Delta N_p}{k_2 - \eta k_0} > r_w F = W'$

### 3. DOBÓR SIŁY SPRĘŻAJĄCEJ DO PRZEKROJU

W zagadnieniu tym trzeba znaleźć siłę sprężającą mającą zadane cechy geometryczne przekroju wraz z minimalnym otuleniem kabli  $a'$ , naprężenia dopuszczalne oraz obciążenia.

Dla każdego zakresu projektowania możemy ustawić wzory służące do bezpośredniego znajdowania siły sprężającej i ewentualnie mimośrodów opierając się na podstawowych nierównościach podanych uprzednio.

W nierównościach tych występują promienie rdzeni uogólnionych, które wyrazić musimy przez promienie rdzeni właściwych i inne znane nam parametry, porządkując otrzymane wyniki w zależności od położenia siły  $S$  względem odpowiednich sił właściwych.

#### 3.1. Rozpatrzmy szczegółowo zakres 0-2

##### 3.1.1. Nierówność 2.2.1.1.

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq v' - r_{u2} - a'$$

może przybrać dwie postacie w zależności od położenia  $S$  względem  $S_{w2}$ .

Założmy, że  $S \leq S_{w2}$

wtedy

$$r_{u2} = r_w \left( 1 - \frac{F}{S} k'_2 \right) + r_w \frac{\Sigma N}{S}$$

a po wstawieniu tej wartości do 2.2.1.1 i uporządkowaniu względem  $S$  otrzymamy warunek:

$$/2.4.1.1/ \quad S \geq \frac{\Sigma M + r_w \Sigma N - r_w F k'_2}{v' - r_w - a'}$$

Jeżeli zaś

$$S \geq S_{w2}$$

to

$$r_{u2} = r'_w \left( 1 - \frac{F}{S} k'_2 \right) + r'_w \frac{\Sigma N}{S}$$

i po powtórzeniu operacji jak wyżej otrzymamy:

$$/2.4.1.2/ \quad S \geq \frac{\Sigma M + r'_w \Sigma N - r'_w F k'_2}{v' - r'_w - a'}$$

Tak wyprowadzone zależności nazywamy wzorami I grupy.

3.1.2. Dyskusja nierówności 2.2.1.2.

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq -r_{u2} + r'_{wo} + \frac{\eta M_E}{S}$$

wymaga przebadania położenia siły  $S$  względem  $S_{wo}$  i  $S_{w2}$ .

Dla przypadku

$$S < \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w2} \end{cases}$$

znajdziemy odpowiednio w tablicy I.

$$r'_{uo} = r'_w \left(1 - \frac{\eta F}{S} k'_o\right) + r'_w \frac{\eta N_E}{S}$$

$$r_{u2} = r_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_2\right) + r_w \frac{\Sigma N}{S}$$

co po wstawieniu do 2.2.1.2 i uporządkowaniu względem  $S$  daje

$$/2.4.1.3/ \quad S \geq \frac{\Sigma M - \eta M_E + r_w \Sigma N - \eta r'_w N_E + F(\eta r'_w k'_o - r_w k'_2)}{r'_w - r_w}$$

Jeżeli jest  $\eta S_{wo} < S < S_{w2}$  to po odszukaniu ważnych promieni rdzeni uogólnionych w tablicy I wstawiamy je do 2.2.1.2 i otrzymujemy warunek wiążący nam bezpośrednio obciążenia z przekrojem, gdyż siła sprężająca redukuje się.

$$/2.4.1.4/ \quad w' = -r_w F \geq \frac{\Sigma M - \eta M_E + r_w (\Sigma N - \eta N_E)}{\eta k'_o - k'_2}$$



# Tablica IV

Kryteria określające kiedy stan 1 jest niebezpieczniejszy od stanu 2'

L.p.	Warunki		Kryteria
1	$S \leq \begin{cases} S_{W1} \\ S_{W2} \end{cases}$	$k_2' - k_1' > 0$	$\frac{\Delta M_p + r_W' \Delta N_p}{k_2' - k_1'} \geq r_W' F = W$
2		$k_2' - k_1' < 0$	$\frac{\Delta M_p + r_W' \Delta N_p}{k_2' - k_1'} \leq r_W' F = W$
3	$S_{W1} \leq S \leq S_{W2'}$		$\frac{-\Delta M_p + (r_W' - r_W) N_g - r_W' \Delta N_p - F(r_W k_1 - r_W' k_2')}{S} \leq r_W' - r_W$
4	$S_{W1} \geq S \geq S_{W2'}$		$\frac{\Delta M_p - (r_W' - r_W) N_g + r_W \Delta N_p + F(r_W' k_1' - r_W k_2)}{S} \geq r_W' - r_W$
5	$S \geq \begin{cases} S_{W1} \\ S_{W2'} \end{cases}$	$k_2 - k_1 > 0$	$\frac{-\Delta M_p - r_W \Delta N_p}{k_2 - k_1} \leq -r_W F = W'$
6		$k_2 - k_1 < 0$	$\frac{-\Delta M_p - r_W \Delta N_p}{k_2 - k_1} \geq -r_W F = W'$



Kładąc siłę  $S$  kolejno

$$\eta S_{w0} \geq S \geq S_{w2} \quad i \quad S \geq \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2} \end{cases}$$

znajdujemy z tablicy I przynależne wartości  $r'_{u0}$  i  $r_{u2}$ , które po wstawieniu do 2.2.1.2 dają nam wzory:

$$/2.4.1.5/ \quad W = r'_w F \geq \frac{\Sigma M_E - \eta M_E + r'_w (\Sigma N_E - \eta N_E)}{k_2 - \eta k'_0}$$

oraz

$$/2.4.1.6/ \quad S \leq \frac{-\Sigma M_E + \eta M_E - r'_w \Sigma N_E + \eta r_w N_E + F(r'_w k_2 - \eta r_w k'_0)}{r'_w - r_w}$$

Te zależności nazywamy **w z o r a m i II g r u p y**.

3.1.3. Trzecia nierówność 2.2.1.3.  $\frac{\eta M_E}{S} \geq v' - r'_{u0} - a'$  zależy tylko od położenia siły  $S$  względem  $\eta S_{w0}$  i wymaga przebadania wypadków:

1.  $S \leq \eta S_{w0}$  co po wyszukaniu odpowiedniej wartości  $r'_{u0}$  w tablicy I, wstawieniu do 2.2.1.3 i uporządkowaniu względem  $S$  daje:

$$/2.4.1.7/ \quad S \leq \frac{\eta [M_E + r'_w (N_E - F k'_0)]}{v' - r'_w - a'}$$

oraz

2.  $S \geq \eta S_{w0}$ . Postępując analogicznie otrzymamy:

$$/2.4.1.8/ \quad S \leq \frac{\eta [M_E + r_w (N_E - F k_0)]}{v' - r_w - a'}$$

Te nierówności są z kolei **w z o r a m i III g r u p y**.

Myślą przewodnią przy dobieraniu siły było znaleźć taką najmniejszą jej wartość, która na odpowiednim mimośrodku nie dopuściłaby do przekroczenia żadnego z naprężeń dopuszczalnych.

Jeżeli pręt jest powyżej i na konwencjonalnej granicy ciężaru własnego, to postulat ten daje się zrealizować gdy postawimy siłę na maksymalnym, możliwym konstrukcyjnie mimośrodku.

Dla przypadku poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego mimośrodek siły sprężającej wyliczymy z odpowiednich wzorów.

1. Przypadek powyżej i na konwencjonalnej granicy ciężaru własnego jest określony warunkiem:

$$\frac{\eta M_E}{S} \geq v' - r'_{uo} - a'$$

co możemy napisać w postaci:

$$/2.4.1.9/ \quad S \leq \frac{\eta [M_E + r'_w (N_E - Fk'_0)]}{v' - r'_w - a'}$$

lub

$$/2.4.1.10/ \quad S \leq \frac{\eta [M_E + r'_w (N_E - Fk'_0)]}{v' - r'_w - a'}$$

Udowodnimy teraz, że w tym przypadku zbędnym jest sprawdzanie wzorów II grupy a siła  $S$  wyliczona z wzorów I grupy i postawiona na mimośrodku  $e = v' - a'$  spełnia postawione zadanie.

Jeżeli jest

$$/2.2.1.1/ \quad \frac{\Sigma M}{S} \leq v' - r_{u2} - a'$$

oraz

$$/2.2.1.3/ \quad \frac{\eta M_E}{S} \geq v' - r'_{uo} - a'$$

To po prostym podstawieniu musi być

$$\frac{\Sigma M}{S} \leq -r_{u2} + r'_{u0} + \frac{\eta M_0}{S}$$

Jest to jak widać wyrażenie 2.2.1.2, które dla tych założeń jest zawsze spełnione.

Praktycznie postępujemy w ten sposób, że wyliczamy siłę ze wzorów I grupy i sprawdzamy czy jesteśmy w odpowiednim przedziale względem sił właściwych. Jeżeli tak, to sprawdzamy odnośny wzór III grupy i gdy zachodzi przypadek powyżej lub na konwencjonalnej granicy ciężaru własnego pozostawiamy siłę na maksymalnym mimośrodzie kończąc obliczenie.

2. Przypadek poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego. Mamy tu

$$S > \frac{\eta [M_g + r'_w (N_g - F k'_0)]}{v' - r'_w - a'}$$

lub

$$S > \frac{\eta [M_g + r_w (N_g - F k_0)]}{v' - r_w - a'}$$

Jeżeli przypadek ten zachodzi dla któregoś ze środkowych położeń siły  $S$  względem sił właściwych, a więc  $\eta S_{w0} \leq S \leq S_{w2}$  lub  $S_{w2} \leq S \leq \eta S_{w0}$ , to o ile przyjmujemy siłę wyliczoną z wzorów I grupy, przekrój nie przeniesie obciążenia.

Udowodnimy to dla  $\eta S_{w0} \leq S \leq S_{w2}$

Założmy, że dla  $S$  wyliczonego przy założeniu równości we wzorze 2.4.1.1 zachodzi  $M_g \leq M_{gr.k}$ , czyli

$$S > \frac{\eta [M_g + r_w (N_g - F k_0)]}{v' - r_w - a'}$$

porównując to z 2.4.1.1 musi być:

$$\frac{\Sigma M + r_w \Sigma N - r_w F k'_2}{v' - r_w - a'} > \frac{\eta [M_g + r_w (N_g - F k_0)]}{v' - r_w - a'}$$

po przekształceniu otrzymamy:

$$\frac{\Sigma M_E + r_w (\Sigma N_E - \eta N_E)}{\eta k_0 - k'_2} > - r_w F = W'$$

Wyrażenie to jest właśnie odnośnym wzorem II grupy /2.4.1.4/ z tym, że zmieniono tu kierunek znaku nierówności co dowodzi, że przekrój nie przenosi obciążenia.

Dla położenia siły  $S_{w2} < S < \eta S_{wo}$  dowód jest analogiczny.

Jak widać dla tych wartości i położenia siły względem sił właściwych i przypadku poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego, przekrój nie przenosi obciążenia.

Jeżeli dla przypadku poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru zachodzi także

$$S > \frac{\Sigma M + r_w (\Sigma N - Fk'_2)}{v' - r_w - a'}$$

to warunkiem by przekrój przeniósł obciążenie jest

$$\frac{\Sigma M + r_w (\Sigma N - Fk'_2)}{v' - r_w - a'} < \frac{\eta [M_E + r_w (N_E - Fk_0)]}{v' - r_w - a'}$$

co jak łatwo sprawdzić daje nierówności II dla odnośnego położenia siły względem sił właściwych. Przynależny mimośród tej siły wyliczymy tak jak dla jej skrajnych położenia.

Gdy siła znajduje się w którymś ze skrajnych położenia względem sił właściwych, a więc

$$S < \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad S > \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w2} \end{cases}$$

i w przypadku poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego, znaczy to, że przekrój nie może przenieść obciążenia na założonym mimośrodku  $e = v' - a'$ . Wyliczamy wtedy siłę sprężającą  $S$  z odpowiedniego wzoru II grupy



i zakładając równość w korespondującym wzorze III grupy obliczamy dla tej siły przynależny mimośród

$$/2.4.1.11/ \quad a' = v' - r'_w - \frac{\eta [M_g + r'_w (N_g - P k'_o)]}{S}$$

$$/2.4.1.12/ \quad a' = v' - r_w - \frac{\eta [M_g + r_w (N_g - P k_o)]}{S}$$

Odpowiedni wzór I grupy, jak łatwo dowieść jest spełniony automatycznie.

Jeżeli okaże się, że nie można dobrać siły sprężającej w ten sposób by spełniła wzory wszystkich grup i była odpowiednio położona względem sił właściwych - znaczy to, że przekrój nie może przenieść zadanego obciążenia.

3.2. Takie samo rozumowanie możemy przeprowadzić dla pozostałych zakresów: 1-2 i 2'-2, na podstawie odpowiednich nierówności z rozdziału 2.2.

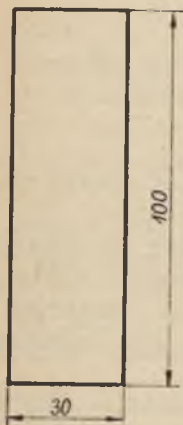
Wzory ze wszystkich zakresów zostały zestawione w tablicy V.

Po znalezieniu siły dla danego zakresu należy sprawdzić przy pomocy tablic II, III, IV, czy któryś z pozostałych stanów obciążenia nie jest bardziej niebezpieczny.

Z góry trudno jest przewidzieć, który z zakresów jest niebezpieczny, sprawę komplikuje udział siły osiowej - ogólnie powiedzieć jednak można, że przy momentach jednoimiennych i małym  $\eta \sim 0,7$  niebezpiecznym jest stan 0, przy dużych  $\eta$  stan 1, jeżeli zaś momenty są różnych znaków stan 2' może być decydujący.

Przykład 1

Dla przekroju prostokątnego o wymiarach 0,3 . 1,0 m dobrać siłę sprężającą przy obciążeniach:



Rys.3

$$M_g = 30 \text{ Tm} \quad N_g = 10 \text{ T}$$

$$\Delta M_p = 20 \text{ Tm} \quad \Delta N_p = 10 \text{ T}$$

$$M_p = 30 \text{ Tm} \quad N_p = 20 \text{ T}$$

Napężenia dopuszczalne

$$k_o = 2000 \text{ T/m}^2 \quad k_1 = 1600 \text{ T/m}^2 \quad k_2 = 1300 \text{ T/m}^2$$

$$k'_o = -200 \text{ T/m}^2 \quad k'_1 = 0 \quad k'_2 = 100 \text{ T/m}^2$$

Współczynnik strat przyjęto  $\eta = 0,7$

Charakterystyka geometryczna przekroju

$$F = 0,3 \text{ m}^2, \quad I = 0,025 \text{ m}^4, \quad i^2 = 0,0833 \text{ m}^2,$$

$$W = W' = 0,05 \text{ m}^3, \quad v = -0,5 \text{ m}, \quad v' = 0,5 \text{ m}, \quad r_w = -0,166 \text{ m},$$

$$r'_w = 0,166 \text{ m}, \quad a' = 0,1 \text{ m}.$$

Obliczamy siły właściwe poszczególnych stanów wg tabl.I

$$S_{wo} = \frac{F}{h} (v' k'_o - v k_o) - N_g = \frac{0,3}{1} [0,5 \cdot (-200) - (-0,5) \cdot 2000] - 10 = 260 \text{ T}$$

$$\eta S_{wo} = 0,7 \cdot 260 = 182 \text{ T}$$

$$S_{w1} = \frac{F}{h} (v' k'_1 - v k_1) - N_g = \frac{0,3}{1} [0,5 \cdot 0 - (-0,5) \cdot 1600] - 10 = 230 \text{ T}$$

$$S_{w2'} = \frac{F}{h} (v' k'_2 - v k_2) - N_g - \Delta N_p = \frac{0,3}{1} [0,5 \cdot 100 - (-0,5) \cdot 1300] - 10 - 10 = 190 \text{ T}$$

$$S_{w2} = \frac{F}{h} (v' k_2 - v k'_2) - \Sigma N = \frac{0,3}{1} [0,5 \cdot 1300 - (-0,5) \cdot 100] - 40 = 170 \text{ T}$$



Dobór siły sprężającej do gotowego przekroju przy zadanych obciążeniach, naprężeniach i stratach

L.p.	Wielkość siły S	Wzory II grupy	Wzory I grupy	Wzory III grupy		
				$M_g \geq M_{gr.k}$	$M_g < M_{gr.k}$	
					Jeżeli	to obliczyć
1	0-2	$S \leq \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{\Sigma M - \eta M_g + r_w \Sigma N - \eta r'_w N_g + F(\eta r'_w k'_0 - r_w k'_2)}{r'_w - r_w} \leq S$	$\frac{\eta [M_g + r'_w (N_g - Fk'_0)]}{v' - r'_w - \alpha'} \geq S$	$\frac{\eta [M_g + r'_w (N_g - Fk'_0)]}{v' - r'_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha' = v' - r'_w - \frac{\eta [M_g + r'_w (N_g - Fk'_0)]}{S}$
2		$\eta S_{w0} \leq S \leq S_{w2}$	$\frac{\Sigma M - \eta M_g + r_w (\Sigma N - \eta N_g)}{\eta k'_0 - k'_2} \leq -r'_w F - W'$	$\frac{\eta [M_g + r_w (N_g - Fk_0)]}{v' - r_w - \alpha'} \geq S$	$\frac{\eta [M_g + r_w (N_g - Fk_0)]}{v' - r_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha' = v' - r_w - \frac{\eta [M_g + r_w (N_g - Fk_0)]}{S}$
3		$\eta S_{w0} \geq S \geq S_{w2}$	$\frac{\Sigma M - \eta M_g + r'_w (\Sigma N - \eta N_g)}{k_2 - \eta k'_0} \leq r'_w F - W$	$\frac{\Sigma M + r'_w \Sigma N - r'_w Fk_2}{v' - r'_w - \alpha'} \leq S$	jak rubryka 1	jak rubryka 1
4		$S \geq \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{-\Sigma M + \eta M_g - r'_w \Sigma N + \eta r_w N_g + F(r'_w k_2 - \eta r_w k'_0)}{r'_w - r_w} \geq S$	jak rubryka 2	jak rubryka 2	jak rubryka 2
5	1-2	$S \leq \begin{cases} S_{w1} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{\Delta M_p + M_p + r_w (\Delta N_p + N_p) + F(r'_w k'_1 - r_w k'_2)}{r'_w - r_w} - N_g \leq S$	$\frac{\Sigma M + r_w \Sigma N - r_w Fk'_2}{v' - r_w - \alpha'} \leq S$	$\frac{M_g + r'_w (N_g - Fk'_1)}{v' - r'_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha = v' - r'_w - \frac{M_g + r'_w (N_g - Fk'_1)}{S}$
6		$S_{w1} \leq S \leq S_{w2}$	$\frac{\Delta M_p + M_p + r_w (\Delta N_p + N_p)}{k_1 - k'_2} \leq -r'_w F - W'$	$\frac{M_g + r_w (N_g - Fk_1)}{v' - r_w - \alpha'} \geq S$	$\frac{M_g + r_w (N_g - Fk_1)}{v' - r_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha = v' - r_w - \frac{M_g + r_w (N_g - Fk_1)}{S}$
7		$S_{w1} \geq S \geq S_{w2}$	$\frac{\Delta M_p + M_p + r'_w (\Delta N_p + N_p)}{k_2 - k'_1} \leq r'_w F - W$	$\frac{\Sigma M + r'_w \Sigma N - r'_w Fk_2}{v' - r'_w - \alpha} \leq S$	jak rubryka 5	jak rubryka 5
8		$S \geq \begin{cases} S_{w1} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{-\Delta M_p - M_p - r'_w (\Delta N_p + N_p) + F(r'_w k_2 - r_w k'_1)}{r'_w - r_w} - N_g \geq S$	jak rubryka 6	jak rubryka 6	jak rubryka 6
9	2'-2	$S \leq \begin{cases} S_{w2'} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{M_p + r_w N_p}{r'_w - r_w} + Fk'_2 - N_g - \Delta N_p \leq S$	$\frac{\Sigma M + r_w \Sigma N - r_w Fk'_2}{v' - r_w - \alpha'} \leq S$	$\frac{M_g + \Delta M_p + r'_w (N_g + \Delta N_p - Fk'_2)}{v' - r'_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha = v' - r'_w - \frac{M_g + \Delta M_p + r'_w (N_g + \Delta N_p - Fk'_2)}{S}$
10		$S_{w2'} \leq S \leq S_{w2}$	$\frac{M_p + r_w N_p}{k_2 - k'_2} \leq -r'_w F - W'$	$\frac{M_g + \Delta M_p + r_w (N_g + \Delta N_p - Fk_2)}{v' - r_w - \alpha'} \geq S$	$\frac{M_g + \Delta M_p + r_w (N_g + \Delta N_p - Fk_2)}{v' - r_w - \alpha'} \leq S$	$\alpha = v' - r_w - \frac{M_g + \Delta M_p + r_w (N_g + \Delta N_p - Fk_2)}{S}$
11		$S_{w2'} \geq S \geq S_{w2}$	$\frac{M_p + r'_w N_p}{k_2 - k'_2} \leq r'_w F - W$	$\frac{\Sigma M + r'_w \Sigma N - r'_w Fk_2}{v' - r'_w - \alpha'} \leq S$	jak rubryka 9	jak rubryka 9
12		$S \geq \begin{cases} S_{w2'} \\ S_{w2} \end{cases}$	$\frac{-M_p - r'_w N_p}{r'_w - r_w} + Fk_2 - N_g - \Delta N_p \geq S$	jak rubryka 10	jak rubryka 10	jak rubryka 10



Z tablicy V obliczamy  $S$  ze wzorów I grupy

$$\frac{\sum M + r_w \sum N - r_w Fk'_2}{v' - r_w - a'} = \frac{80 + (-0,166) \cdot 40 - (-0,166) \cdot 0,3 \cdot 100}{0,5 - (-0,166) - 0,1} =$$

$$= 138 \text{ T}$$

Przyjmujemy pierwotnie  $S = 138 \text{ T}$  i widzimy że jest:

$$S \leq \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w2} \end{cases}$$

Kontrolujemy odnośny wzór III grupy

$$\frac{\eta \left[ \frac{M}{r'_w} + r'_w (N - Fk'_o) \right]}{v' - r'_w - a'} = \frac{0,7 \{ 30 + 0,166 [10 - 0,3 \cdot (-200)] \}}{0,5 - 0,166 - 0,1}$$

$$= 124,3 \text{ T} < S$$

czyli mamy przypadek poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego. Obliczamy teraz siłę z przynależnego wzoru II grupy

$$\frac{\sum M - \eta \frac{M}{r'_w} + r_w \sum N - \eta r_w N + F(\eta r'_w k'_o - r_w k'_2)}{r'_w - r_w} =$$

$$= \frac{80 - 0,7 \cdot 30 + (-0,166) \cdot 40 - 0,7(-0,166) \cdot 10 + 0,3 [0,7 \cdot 0,166 (-200) - (-0,166) \cdot 100]}{0,166 - (-0,166)} = 147,5 \text{ T}$$

Przyjmujemy  $S = 147,5 \text{ T}$  jako aktualną wartość siły sprężającej. Pozostajemy w tym samym przedziale w stosunku do sił właściwych

$$S \leq \begin{cases} \eta S_{wo} \\ S_{w2} \end{cases}$$

Sprawdzamy w tablicy II czy miarodajnym jest stan 0 w stosunku do stanu 1.

$$k'_1 - \eta k'_0 = 0 - 0,7 \cdot (-200) = 140 > 0$$

$$\frac{(1-\eta)(M_E + r'_W N_E)}{k'_1 - \eta k'_0} \geq r'_W F ; \quad \frac{(1-0,7)(30+0,166 \cdot 10)}{140} \geq 0,166 \cdot 0,3$$

$$0,0678 > 0,05$$

Miarodajny jest stan 0

I jeszcze w tablicy III czy stan 2' nie jest niebezpieczniejszy od stanu 0.

$$k'_2 - \eta k'_0 = 100 - 0,7 \cdot (-200) = 240 > 0$$

$$\frac{(1-\eta)(M_E + r'_W N_E) + \Delta M_D + r'_W \Delta N_D}{k'_2 - \eta k'_0} \geq r'_W F_i \quad \frac{(1-0,7)(30+0,166 \cdot 10) + 20 + 0,166 \cdot 10}{240} > 0,166 \cdot 0,3$$

$$0,130 > 0,05$$

Miarodajny jest stan 0.

Przynależny mimośród obliczamy wg wzoru z tablicy V

$$a' = v' - \frac{\eta [M_E + r'_W (N_E - F k'_0)]}{S} = 0,5 - 0,166 - \frac{0,7 \{ 30 + 0,166 [10 - 0,3(-200)] \}}{147,5} = 0,1354 \text{ m}$$

$$e = v' - a' = 0,5 - 0,1354 = 0,3646 \text{ m}$$

Sprawdzenie naprężeń

$$\sigma'_0 = \frac{147,5}{0,7 \cdot 0,05} - \frac{147,5 \cdot 0,3646}{0,7 \cdot 0,05} + \frac{10}{0,3} + \frac{30}{0,05} = 703 - 1535 + 33 + 600 = -199 \text{ T/m}^2 \approx k'_0$$

$$\sigma_0 = 703 + 1535 + 33 - 600 = 1671 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_1 = \frac{147,5}{0,3} - \frac{147,5 \cdot 0,3646}{0,05} + 33 + 600 = 492 - 1075 + 33 + 600 = 50 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_1 = 492 + 1075 + 33 - 600 = 1000 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_{2'} = 50 + \frac{10}{0,3} + \frac{20}{0,05} = 50 + 33 + 400 = 483 \text{ T/m}^2$$

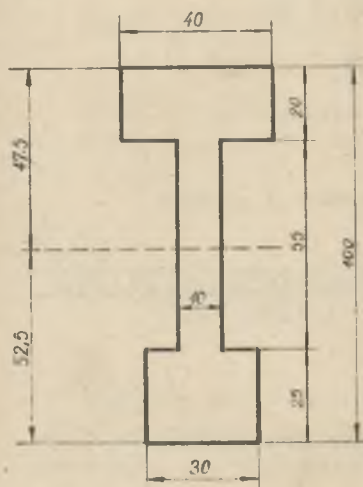
$$\sigma_{2'} = 1000 + 33 - 400 = 633 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_2 = 483 + \frac{20}{0,3} + \frac{30}{0,05} = 483 + 66 + 600 = 1149 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_2 = 633 + 66 - 600 = 99 \text{ T/m}^2 \approx k'_2$$

### P r z y k ł a d   2

Dla przekroju jak na rys.4 dobrać siłę sprężającą przy obciążeniach:



Rys.4

$$M_g = 20 \text{ Tm}$$

$$N_g = 10 \text{ T}$$

$$\Delta M_p = -30 \text{ Tm}$$

$$\Delta N_p = 10 \text{ T}$$

$$M_p = 50 \text{ Tm}$$

$$N_p = 30 \text{ T}$$

Napężenia dopuszczalne

$$k_0 = 2000 \text{ T/m}^2 \quad k_1 = 1600 \text{ T/m}^2 \quad k_2 = 1300 \text{ T/m}^2$$

$$k'_0 = -200 \text{ T/m}^2 \quad k'_1 = 0 \quad k'_2 = 100 \text{ T/m}^2$$

Współczynnik strat przyjęto

$$\eta = 0,75$$

Charakterystyka geometryczna przekroju

$$F = 0,21 \text{ m}^2, \quad I = 0,0253 \text{ m}^4, \quad i^2 = 0,01205 \text{ m}^2, \quad W = 0,0533 \text{ m}^3$$

$$W' = 0,0482 \text{ m}^2, \quad v = -0,475 \text{ m}, \quad v' = 0,525 \text{ m}, \quad r_w = -0,2295 \text{ m}$$

$$r'_w = 0,2535 \text{ m}, \quad a' = 0,1 \text{ m}.$$



Obliczamy siły właściwe poszczególnych stanów wg tabl. I.

$$S_{w0} = \frac{F}{h} (v' k'_0 - v k_0) - N_g = \frac{0,21}{1} [0,525(-200) - (-0,475) \cdot 2000] - 10 = 167,5 \text{ T}$$

$$\eta S_{w0} = 0,75 \cdot 167,5 = 125,5 \text{ T}$$

$$S_{w1} = \frac{F}{h} (v' k'_1 - v k_1) - N_g = \frac{0,21}{1} [0,525 \cdot 0 - (-0,475) \cdot 1600] - 10 = 149,5 \text{ T}$$

$$S_{w2'} = \frac{F}{h} (v' k'_2 - v k_2) - N_g - \Delta N_p = \frac{0,21}{1} [0,525 \cdot 100 - (-0,475) \cdot 1300] - 10 - 10 = 120,5 \text{ T}$$

$$S_{w2} = \frac{F}{h} (v' k'_2 - v k_2) - \Sigma N = \frac{0,21}{1} [0,525 \cdot 1300 - (-0,475) \cdot 100] - 50 = 103,3 \text{ T}$$

Z tablicy V obliczamy S ze wzorów I grupy

$$\frac{\Sigma M + r_w \Sigma N - r_w F k'_2}{v' - r_w - a'} = \frac{40 + (-0,2295) 50 - (-0,2295) \cdot 0,21 \cdot 100}{0,525 - (-0,2295) - 0,1} = 51,0 \text{ T}$$

Jeżeli przyjmiemy  $S = 51,0 \text{ t}$  mamy przypadek:

$$S \leq \begin{cases} \eta S_{w0} \\ S_{w2} \end{cases}$$

Sprawdzamy w tablicy II który ze stanów 0 i 1 jest miarodajny

$$k'_1 - \eta k'_0 = 0 - 0,75(-200) = 150 > 0$$

$$\frac{(1-\eta)(M_g + r'_w N_g)}{k'_1 - \eta k'_0} \stackrel{?}{>} r'_w F; \quad \frac{(1-0,75)(20 + 0,2535 \cdot 10)}{150} < 0,2535 \cdot 0,21$$

$$0,0375 < 0,0533$$

Z tych dwu stanów determinującym jest stan 1. W tablicy IV sprawdzamy czy stan 2' nie jest bardziej miarodajny od stanu 1.

$$k'_2 - k'_1 = 100 - 0 > 0$$

$$\frac{\Delta M_p + r'_w \Delta N_p}{k'_2 - k'_1} \geq r'_w F; \quad \frac{-30 + 0,2535 \cdot 10}{100} < 0,2535 \cdot 0,21$$

$$- 0,27465 < 0,0538$$

Miarodajnym jest stan 2'.

Według tablicy V obliczamy odnośny wzór III grupy

$$\frac{M_g + \Delta M_p + r'_w (N_g + \Delta N_p - Fk'_2)}{v' - r'_w - a'} = \frac{20 - 30 + 0,2535(10 + 10 - 0,21 \cdot 100)}{0,525 - 0,2535 - 0,1} = -59,7 \text{ t} < S$$

Jest to przypadek poniżej konwencjonalnej granicy ciężaru własnego. Obliczamy siłę z przynależnego wzoru II grupy.

$$\frac{M_p + r'_w N_p}{r'_w - r'_w} + Fk'_1 - N_g - \Delta N_p = \frac{50 + (-0,2295) \cdot 30}{0,2535 - (-0,2295)} + 0,21 \cdot 100 - 10 - 10 = 90,2 \text{ T}$$

Przyjmujemy  $S = 90,2 \text{ T}$  jako rzeczywistą wartość siły sprężającej. Pozostajemy w tym samym przedziale w stosunku do sił właściwych

$$S \leq \begin{cases} S_{w2'} \\ S_{w2} \end{cases}$$

Przynależny mimośród obliczamy według właściwego wzoru z tablicy V

$$a' = v' - r'_w - \frac{M_g + \Delta M_p + r'_w (N_g + \Delta N_p - Fk'_2)}{S} = 0,525 - 0,2535 - \frac{20 - 30 + 0,2535(10 + 10 - 0,21 \cdot 100)}{90,2} = 0,385 \text{ m}$$

$$e = v' - a' = 0,525 - 0,385 = 0,140 \text{ m.}$$

Sprawdzenie naprężeń

$$\sigma'_0 = \frac{90,2}{0,75 \cdot 0,21} - \frac{90,2 \cdot 0,140}{0,75 \cdot 0,0533} + \frac{10}{0,21} + \frac{20}{0,0533} = 574 - 316 + 48 + 375 = 681 \text{ T/m}^2$$

$$\bar{\sigma}_0 = 574 + \frac{90,2 \cdot 0,140}{0,75 \cdot 0,0482} + 48 - \frac{20}{0,0482} = 574 + 349 + 48 - 415 = 556 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_1 = \frac{90,2}{0,21} - \frac{90,2 \cdot 0,140}{0,0533} + 48 + 375 = 430 - 237 + 48 + 375 = 616 \text{ T/m}^2$$

$$\bar{\sigma}_1 = 430 + \frac{90,2 \cdot 0,140}{0,0482} + 48 - 415 = 430 + 252 + 48 - 415 = 325 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_{2'} = 616 - \frac{30}{0,0533} + \frac{10}{0,21} = 616 - 563 + 48 = 101 \text{ T/m}^2 \approx k'_2$$

$$\bar{\sigma}_{2'} = 325 + \frac{30}{0,0482} + 48 = 325 + 622 + 48 = 995 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_2 = 101 + \frac{50}{0,0533} + \frac{30}{0,21} = 101 + 938 + 143 = 1182 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_2 = 995 - \frac{50}{0,0482} + 143 = 995 - 1037 + 143 = 101 \text{ T/m}^2 \approx k'_2$$

#### 4. PROJEKTOWANIE

4.1. W poprzednim rozdziale mieliśmy zadane w sposób bezpośredni wszystkie parametry potrzebne do doboru siły do przekroju. Obecnie zagadnienie postawić możemy w podobny sposób, z tym, że przekrój będziemy mieć określony przez założenia programowe oraz pewne przyjęcia geometryczne. /h/.



Przy projektowaniu staramy się zazwyczaj wykorzystać możliwie największą liczbę naprężeń dopuszczalnych. Z uwagi na ekonomię nie jest to regułą, żądamy jednak przynajmniej wykorzystania naprężeń z jednego stanu ważnego zakresu projektowania. Pociąga to za sobą warunek, by siła sprężająca przyjęła wartość równą którejś z sił właściwych z danego zakresu, ewentualnie  $S = \eta S_{wo}$ .

W rozważaniach wstępnych wyprowadzimy związki pomiędzy przeznaczonymi do wykorzystania siłami właściwymi, /danymi w postaci naprężeń i wartości geometrycznych w przekroju/, a położeniem środka ciężkości przekroju.

Rozpatrzmy to zagadnienie na zakresie 0-2, pozostałe będą analogiczne.

Zakładamy, że  $S = \eta S_{wo}$  i badamy jej położenie względem  $S_{w2}$

Przyjmując  $S = \eta S_{wo} \leq S_{w2}$  po podstawieniu wartości sił właściwych otrzymamy:

$$\frac{\eta P}{h} (v' k'_o - v k_o) - \eta N_g \leq \frac{P}{h} (v' k_2 - v k'_2) - \Sigma N$$

co daje

$$\frac{k_2 - \eta k'_o - \frac{1}{P} (\Sigma N - \eta N_g)}{\eta k_o - k'_2 + \frac{1}{P} (\Sigma N - \eta N_g)} \geq - \frac{v}{v'}$$

Oczywiście pozostaje tu w mocy wzór 2.4.1.4, określający wielkość  $W'$ , wyprowadzony w rozdziale poprzednim dla tych samych założeń.

Podobnie dla warunku  $S = \eta S_{wo} \geq S_{w2}$  otrzymamy:

$$\frac{k_2 - \eta k'_o - \frac{1}{P} (\Sigma N - \eta N_g)}{\eta k_o - k'_2 + \frac{1}{P} (\Sigma N - \eta N_g)} \leq - \frac{v}{v'}$$

Równocześnie jest tu ważny wzór 2.4.1.5 podający wielkość  $W$ .

Powtarzając ten sam typ rozumowania dla pozostałych zakresów, a więc kładąc kolejno jako równą siłę sprężającą  $S_{w1}$  i  $S_{w2}$ , otrzymamy wyniki zestawione w tablicy IV.

W celu uzupełnienia dodano tu jeszcze wzory I grupy z tablicy V, wyprowadzone dla tych samych założeń.

Dla każdego zakresu najczęstszym jest jednak przypadek, przyjęty jako podstawa do dalszych rozważań, kiedy wykorzystujemy obydwa naprężenia w stanie 2, a więc

$$S = S_{w2}.$$

Daje to nierówności typu  $S = S_{w2} \geq S_{w1}$  lub

$S = S_{w2} \geq \gamma S_{w0}$  wyrażające się takimi samymi warunkami na położenie środków ciężkości i wskaźniki  $W'$  /ewentualnie  $W$ /. Pewna zmiana występuje jedynie we wzorach I grupy, pozostają one mianowicie obydwa w mocy ponieważ zależą tylko od naprężeń dopuszczalnych w stanie 2.

#### 4.2. Kryteria stosowalności poszczególnych zakresów projektowania.

W części pracy poświęconej dobieraniu siły do już istniejącego przekroju mieliśmy do dyspozycji jego rzeczywiste cechy geometryczne. Obecnie cechy te mamy dane w postaci funkcji obciążeń i naprężeń dopuszczalnych. W opracowanym tu sposobie projektowania przyjmujemy wykorzystanie naprężeń w stanie użytkowym, a więc  $S = S_{w2}$ . Chcąc znaleźć miarodajny zakres projektowania musimy wybrać ze stanów wchodzących ze stanem 2 w zakresy projektowania ten, dla którego otrzymamy największe wskaźniki wytrzymałości  $W$  i  $W'$ .

##### 4.2.1. Dyskusja miarodajnego zakresu z 0-2 i 1-2

Warunki ustawiać będziemy w ten sposób, że przy ich spełnieniu miarodajny będzie zakres 0-2, ewentualnie szczegółowo określony zakres mieszany.

Ażeby się przekonać, które spośród wskaźników wytrzymałości są decydujące, musimy w dyskusji przebadać położenie siły sprężającej /równej sile właściwej stanu 2/ względem  $\gamma S_{w0}$  i  $S_{w1}$ , co pozwoli nam na określenie aktualnych przedziałów położenia środka ciężkości przekroju, a tym samym ustalenie ważnych wskaźników wytrzymałości.



Określenie ważności poszczególnych wzorów w zależności od  $-\frac{v}{v'}$  i  $S_{wi}$

L.p.	Zakres	Stosunek sił	Warunki	Wskaźnik wytrzymałości	$S_i$	Wzory 1 grupy	
						$S - S_i$	$S - S_{w2} - \frac{F}{h}(v'k_2 - vk_2') - \Sigma N$
1	0-2	$\eta S_{w0} \leq S_{w2}$	$-\frac{v}{v'} \leq \frac{F(k_2 - \eta k_0') - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k_2') + \Sigma N - \eta N_g}$	$W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$	$S_{w0} = \frac{\eta F}{h}(v'k_0' - vk_0) - \eta N_g$	$S \geq \frac{\Sigma M + r_w(\Sigma N - Fk_2')}{v' - r_w - a'}$	$S \geq \frac{\Sigma M + r_w(\Sigma N - Fk_2')}{v' - r_w - a}$
2		$S_{w2} \leq \eta S_{w0}$	$-\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - \eta k_0') - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k_2') + \Sigma N - \eta N_g}$	$W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$		$S > \frac{\Sigma M + r_w'(\Sigma N - Fk_2)}{v' - r_w' - a'}$	
3	1-2	$S_{w1} \leq S_{w2}$	$-\frac{v}{v'} \leq \frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p}$	$W_1' = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$	$S_{w1} = \frac{F}{h}(v'k_1' - vk_1) - N_g$	$S \geq \frac{\Sigma M + r_w(\Sigma N - Fk_2')}{v' - r_w - a'}$	
4		$S_{w2} \leq S_{w1}$	$-\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p}$	$W_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$		$S \geq \frac{\Sigma M + r_w'(\Sigma N - Fk_2)}{v' - r_w' - a'}$	
5	2'-2	$S_{w2'} \leq S_{w2}$	$-\frac{v}{v'} \leq \frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p}$	$W_{2'}' = \frac{M_p}{k_2 - k_2' + \frac{N_p}{F}}$	$S_{w2'} = \frac{F}{h}(v'k_2' - vk_2) - N_g - \Delta N_p$	$S \geq \frac{\Sigma M + r_w(\Sigma N - Fk_2')}{v' - r_w - a'}$	
6		$S_{w2} \leq S_{w2'}$	$-\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p}$	$W_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k_2' - \frac{N_p}{F}}$		$S \geq \frac{\Sigma M - r_w'(\Sigma N - Fk_2)}{v' - r_w' - a'}$	



Rozróżnimy tu 4 przypadki:

$$1. \quad s_{w2} > \begin{cases} \eta s_{wo} \\ s_{w1} \end{cases}$$

$$2. \quad \eta s_{wo} \leq s_{w2} \leq s_{w1}$$

$$3. \quad \eta s_{wo} \geq s_{w2} \geq s_{w1}$$

$$4. \quad s_{w2} \leq \begin{cases} \eta s_{wo} \\ s_{w1} \end{cases}$$

Przeanalizujemy przypadek 1.

Opierając się na poprzednich wywodach i tablicy VI napisać go możemy w postaci:

$$/4.2.1.1/ \quad - \frac{\sigma}{\sigma'} \leq \begin{cases} \frac{(k_2 - \eta k'_0) F - (\Sigma N - \eta N_g)}{(\eta k_0 - k'_2) F + \Sigma N - \eta N_g} \\ \frac{(k_2 - k'_1) F - (\Delta N_p + N_p)}{(k_1 - k'_2) F + \Delta N_p + N_p} \end{cases}$$

Jeżeli teraz po skontrolowaniu miarodajnego wskaźnika wytrzymałości z tablicy VI założymy  $W'_0 > W_1$  ustalimy tym samym, że niebezpiecznym jest stan 0. W postaci rozwiniętej otrzymamy

$$\frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)} \geq \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$$

co po przekształceniu daje

$$/4.2.1.2/ \quad \frac{M_g}{M_p + \Delta M_p} \geq \frac{1}{1-\eta} \left[ \frac{F(\eta k_0 - k'_1) + (1-\eta)N_g}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p} \right]$$

Wzór ten opierając się na wykorzystaniu  $W'$  określa jako miarodajne do wykorzystania naprężenie  $k_o$ .

Mamy tu ogólny przypadek projektowania na założony stosunek  $\frac{v}{v'}$  i wykorzystania naprężenia  $k_o$  - odpowiadający jak wiadomo projektowaniu powyżej granicy ciężaru własnego.

Dla przypadku 2 zapisanego inaczej

$$/4.2.1.3/ \quad \frac{F(k_2 - \eta k'_o) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_o - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g} > \frac{v}{v'} \geq \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p}$$

staramy się znowu wyznaczyć miarodajne wskaźniki. Na podstawie tablicy VI widzimy, że są to  $W'_o$  i  $W_1$ ; porównać je możemy przy pomocy  $-\frac{v}{v'}$  a mianowicie

$$W'_o > -\frac{v}{v'} W_1$$

Wyrażając nierówność w naprężeniach i obciążeniach otrzymamy:

$$\frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_o - k'_2 + \frac{1}{F} (\Sigma N - \eta N_g)} > -\frac{v}{v'} \cdot \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k'_1 - \frac{1}{F} (\Delta N_p + N_p)}$$

a po przekształceniu

$$/4.2.1.4/ \quad \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1-\eta} \left\{ \frac{F(\eta k_o - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)]} - 1 \right\}$$

W tym przypadku, również miarodajnym do wykorzystania jest  $k_o$ .

Przypadek 3.  $\eta S_{wo} \geq S_{w2} \geq S_{w1}$  zapisać możemy w postaci:

$$/4.2.1.5/ \quad \frac{F(k_2 - \eta k'_o) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_o - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g} < \frac{v}{v'} \leq \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{v' F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p}$$

# Tablica VII

Kryteria określające zakres 0-2 jako miarodajny w stosunku do zakresu 1-2

L.p.	Warunki	Kryteria	Napężenia
1	$-\frac{v}{v'} \leq \begin{cases} \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} \\ \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + (\Delta N_p + N_p)} \end{cases}$	$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1 - \eta} \left[ \frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1 - \eta) N_g}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p} \right]$	$k_0$  $k_2 \quad k'_2$
2	$\frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} > -\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + (\Delta N_p + N_p)}$	$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1 - \eta} \left\{ \frac{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)]} - 1 \right\}$	$k_0$  $k_2 \quad k'_2$
3	$\frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} < -\frac{v}{v'} < \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + (\Delta N_p + N_p)}$	$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1 - \eta} \left\{ \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{-\frac{v}{v'} [F(k_1 - k'_2) + (\Delta N_p + N_p)]} - 1 \right\}$	$k'_0$  $k_2 \quad k'_2$
4	$-\frac{v}{v} > \begin{cases} \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} \\ \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + (\Delta N_p + N_p)} \end{cases}$	$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} \geq \frac{1}{1 - \eta} \left[ \frac{F(k'_1 - \eta k'_0) - (1 - \eta) N_g}{F(k_2 - k'_1) - (N_p + \Delta N_p)} \right]$	$k'_0$  $k_2 \quad k'_2$



Jak łatwo zauważyć, dla takiego położenia  $S_{w2}$  miarodajne są  $W_0$  i  $W'_1$ . Założywszy

$$W_0 > -\frac{v'}{v} W'_1$$

otrzymujemy po podstawieniu i przekształceniach

$$/4.2.1.6/ \quad \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1-\eta} \left\{ \frac{F(k_1 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{-\frac{v}{v'}[(k_1 - k'_2)F + (\Delta N_p + N_p)]} - 1 \right\}$$

Tu jednak, z uwagi na wykorzystanie  $W_0$  miarodajnym jest  $k'_0$ .

Przypadek 4 charakteryzuje się odwrotnym położeniem siły sprężającej w stosunku do  $\eta S_{w0}$  i  $S_{w1}$  aniżeli w przypadku 1; skąd

$$/4.2.1.7/ \quad -\frac{v}{v'} > \left\{ \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g} \right. \\ \left. \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p} \right\}$$

dla takiego położenia miarodajnymi są  $W_0$  i  $W_1$ . Determinując stan 0 napiszemy  $W_0 > W_1$  - zakładamy w ten sposób również wykorzystanie naprężenia  $k'_0$ . Inaczej warunek ten możemy napisać:

$$/4.2.1.8/ \quad \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} > \frac{1}{1-\eta} \left[ \frac{F(k'_1 - \eta k'_0) + (1-\eta) N_g}{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)} \right]$$

Wyniki tych rozważań zestawiono w tablicy VII.

Jeżeli chcemy wykorzystać 4 naprężenia, określamy tym samym jednoznacznie położenie środka ciężkości  $-\frac{v}{v'}$  i zakładamy wykorzystanie obydwu wskaźników  $W'$  i  $W$ .

Zakładając jako niebezpieczniejszy stan 0 żądamy równocześnie by obydwie wskaźniki wytrzymałości dla tego stanu były większe od wskaźników obliczonych dla stanu 1. Zdarzyć się może jednak, że większe z jednoimiennych

wskaźników leżą w dwóch stanach wtedy mamy do czynienia z mieszanymi zakresami projektowania.

I tak dla  $W'_0 > W'_1$  oraz  $W_1 > W_0$  miarodajnymi do wykorzystania są naprężenia  $k_2, k'_2$  i  $k_0, k'_1$ ; odwrotnie dla  $W'_1 > W'_0$  i  $W_0 > W_1$  wykorzystamy naprężenia  $k_2, k'_2$  i  $k_1, k'_0$ .

W tablicy VIIa zestawiono te przypadki wyrażając wskaźniki wytrzymałości przy pomocy naprężeń i obciążeń.

4.2.2. Rozumowanie tego samego typu przeprowadzić możemy w odniesieniu do pozostałych par zakresów 0-2 i 2-2 oraz 1-2 i 2-2. Otrzymamy w ten sposób zbiór tablic VIII, VIIla, IX, IXa pozwalający określić który zakres, dla danych obciążeń i naprężeń jest miarodajny do projektowania.

Chcąc znaleźć miarodajny zakres projektowania musimy wybrać sposób, przy pomocy którego chcemy projektować; a więc wykorzystanie 4 czy 3 naprężeń. Oczywiście wybór zależy w dużej mierze od charakteru obciążenia. Przy znacznej przewadze obciążeń użytkowych  $\frac{M_0}{M_F} \leq 0,3$ ; jeżeli są dosyć duże dodatnie siły osiowe stosunek ten może być większy/ wskazane jest projektowanie na wykorzystanie 4 naprężeń; w przypadku gdy udział momentu od ciężaru własnego jest większy, a siły osiowe są ujemne lub niewielkie dodatnie, projektować należy na wykorzystanie 3 naprężeń. Rozwiązania mogą istnieć w obydwu metodach i z góry zazwyczaj trudno jest wskazać, które jest ekonomiczniejsze.

Jeżeli projektujemy na 4 naprężenia, to po wstępnym przyjęciu  $F$ , znajdujemy w którejś z tablic VIIa, VIIla, IXa, właściwą czwórkę naprężeń. Gdy naprężenia leżą w jednym zakresie np. 0-2 a posługiwaliśmy się tablicą VIIa /eliminując zakres 1-2/ sprawdzamy jeszcze tablicą VIIla czy zakres 2-2 nie jest determinujący.

Mając do czynienia z czwórką naprężeń mieszanych np. z tablicy VIIa  $k_0, k'_1, k_2, k'_2$ , określamy przy pomocy przyporządkowanych wskaźników wytrzymałości  $\frac{v}{v_r}$  i na podstawie tablicy VIII lub IX badamy czy bardziej miarodajne nie jest któreś naprężenie ze stanu 2'. Oczywiście i tu operować musimy pewnym z góry przyjętym przekrojem  $F$ ; po dobraniu rzeczywistego przekroju okazać się może czasem, że odbiega on znacznie od przyjętego i wtedy determinującym może być inne naprężenie. Przypadek ten jednak-

# Tablica VIIa

Określenie 4 naprężeń do projektowania z zakresów 0-2 i 1-2

Jeżeli	Kryteria	Jeżeli	Kryteria	Jeżeli
$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} \leq$ <p>to wykorzystać:</p>		$\leq \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} \leq$ <p>to wykorzystać:</p>		$\leq \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p}$ <p>to wykorzystać:</p>
$k_1 \quad k'_1 \quad k_2 \quad k'_2$  zakres 1-2	$< \frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_1 - k'_2) + N_p + \Delta N_p]} <$	$k_0 \quad k'_1$  $k_2 \quad k'_2$	$< \frac{F(k'_1 - \eta k'_0) - (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)]} <$	$k_0 \quad k'_0 \quad k_2 \quad k'_2$  zakres 0-2
$k_0 \quad k'_0 \quad k_2 \quad k'_2$  zakres 0-2	$> \frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p]} >$	$k'_0 \quad k_1$  $k_2 \quad k'_2$	$> \frac{F(k'_1 - \eta k'_0) - (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)]} >$	$k_1 \quad k'_1 \quad k_2 \quad k'_2$  zakres 1-2



# Tablica VIII

Kryteria określające zakres 0-2 jako miarodajny w stosunku do zakresu 2'-2

L.p.	Warunki	Kryteria	Napężenia
1	$-\frac{v}{v'} \leq \begin{cases} \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} \\ \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p} \end{cases}$	$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta)N_g + \Delta N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p}$	$k_0$ $k_2 \quad k'_2$
2	$\frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} > -\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p}$	$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k'_2) - N_p]} - 1$	$k_0$ $k_2 \quad k'_2$
3	$\frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} < -\frac{v}{v'} < \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p}$	$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k'_2) + N_p]} - 1$	$k'_0$ $k_2 \quad k'_2$
4	$-\frac{v}{v'} \geq \begin{cases} \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + (\Sigma N - \eta N_g)} \\ \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p} \end{cases}$	$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} > \frac{F(k'_2 - \eta k'_0) - (1-\eta)N_g - \Delta N_p}{F(k'_2 - k'_2) - N_p}$	$k'_0$ $k_2 \quad k'_2$

# Tablica VIIIa

Określenie 4 naprężeń do projektowania z zakresów 0-2 i 2'-2

Jeżeli $\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \leq$ to wykorzystać:	Kryteria	Jeżeli $\leq \frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \leq$ to wykorzystać:	Kryteria	Jeżeli $\leq \frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p}$ to wykorzystać:
$k_2 \quad k_2' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 2'-2	$\leq \frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta)N_g + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \leq$	$k_0 \quad k_2'$ $k_2 \quad k_2'$	$\leq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p} \leq$	$k_0 \quad k_0' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 0-2
$k_0 \quad k_0' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 0-2	$\geq \frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta)N_g + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \geq$	$k_2 \quad k_0'$ $k_2 \quad k_2'$	$\geq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p} \geq$	$k_2 \quad k_2' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 2'-2

# Tablica IX

Kryteria określające zakres 1-2 jako miarodajny w stosunku do zakresu 2'-2

L.p.	Warunki	Kryteria	Napężenia
1	$-\frac{v}{v'} \leq \begin{cases} \frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + (\Delta N_p + N_p)} \\ \frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \end{cases}$	$\frac{\Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p}$	$k_1$ $k_2 \quad k_2'$
2	$\frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + (\Delta N_p + N_p)} > -\frac{v}{v'} > \frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p}$	$\frac{\Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k_2') - N_p]} - 1$	$k_1$ $k_2 \quad k_2'$
3	$\frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + (\Delta N_p + N_p)} < -\frac{v}{v'} < \frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p}$	$\frac{\Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{-\frac{v}{v'} [F(k_2 - k_2') + N_p]} - 1$	$k_1'$ $k_2 \quad k_2'$
4	$-\frac{v}{v'} \geq \begin{cases} \frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + (\Delta N_p + N_p)} \\ \frac{F(k_2 - k_2') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + \Delta N_p} \end{cases}$	$\frac{\Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p}$	$k_1'$ $k_2 \quad k_2'$



# Tablica IXa

Określenie 4 naprężeń do projektowania z zakresów 1-2 i 2-2

Jeżeli $\frac{\Delta M_p}{M_p} \leq$ to wykorzystać:	Kryteria	Jeżeli $\leq \frac{\Delta M_p}{M_p} \leq$ to wykorzystać:	Kryteria	Jeżeli $\leq \frac{\Delta M_p}{M_p}$ to wykorzystać:
$k_2 \quad k_2' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 2'-2	$\leq \frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \leq$	$k_1 \quad k_2'$ $k_2 \quad k_2'$	$\leq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p} \leq$	$k_1 \quad k_1' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 1-2
$k_1 \quad k_1' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 1-2	$\geq \frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \geq$	$k_2 \quad k_1'$ $k_2 \quad k_2'$	$\geq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p} \geq$	$k_2 \quad k_2' \quad k_2 \quad k_2'$ zakres 2'-2

że jest dość rzadki, a jeżeli nawet znajdzie, to następne przyjęcie pozwoli nam zwykle znaleźć właściwy zakres projektowania.

Przy projektowaniu na wykorzystanie 3 naprężeń postępować możemy dwojako:

1. Przyjmujemy  $F$  i  $-\frac{v}{v'}$ , /gdz ciężar własny przekracza wartość graniczną jest najczęściej  $-\frac{v}{v'} < 1/$  i na podstawie dwu z tablic VII, VIII, IX, wybieramy odpowiedni zakres projektowania. Po rozwiązaniu równania na  $x = \frac{v'}{h}$  wyprowadzonego na str.85, kontrolujemy czy rzeczywiste  $-\frac{v}{v'}$  zajmuje to samo położenie co założone.

2. Po przyjęciu  $F$  obliczamy wskaźniki wytrzymałości ze wszystkich stanów /0, 1, 2/, decydujemy czy projektujemy na  $W$  czy  $W'$  /powyżej granicy ciężaru własnego zawsze  $W'$  i rozwiązujemy równanie na  $x$ , wstawiając tam największą wartość wybranego wskaźnika wytrzymałości. Obliczamy następnie drugi wskaźnik wytrzymałości i badamy czy nie jest on mniejszy od któregośkolwiek z poprzednio wyliczonych /dla tego samego włókna/.

4.3. Dobór siły sprężającej i jej mimośrod u przy projektowaniu na wykorzystanie 4 naprężeń

Mając ustalony zakres projektowania, w zasadzie mamy jednoznacznie określoną wartość siły sprężającej. Dla przypadku kiedy wykorzystujemy naprężenia z jednego zakresu zachodzić musi relacja:  $S = S_{w1} = S_{w2}$  ewentualnie  $S = \eta S_{w0} = S_{w2}$ .

Przykładowo biorąc pod uwagę zakres 0-2 otrzymujemy:

$$S = \frac{\eta F}{h} (v' k'_0 - v k_0) - \eta N_g = \frac{F}{h} (v' k_2 - v k'_2) - \Sigma N$$

W wyrażeniach tych siła sprężająca jest również funkcją  $v$  i  $v'$ ; po łatwym przekształceniu parametry te możemy wyeliminować.

Otrzymamy wtedy

$$/4.3.1/ \quad S = \frac{\eta F (k_0 k_2 - k'_0 k'_2) - \eta N_g (k_2 - k'_2) - \eta (k_0 - k'_0) \Sigma N}{k_2 - k'_2 + \eta (k_0 - k'_0)}$$

przekształcając według tego schematu siły właściwe dla zakresów 1-2 i 2-2 otrzymamy odpowiednio

$$/4.3.2/ \quad S = \frac{F(k_1 k_2 - k'_1 k'_2) - N_g (k_2 - k'_2) - (k_1 - k'_1) \Sigma N}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2}$$

oraz

$$/4.3.3/ \quad S = \frac{F(k_2 + k'_2) - N_p}{2} - N_g - \Delta N_p$$

Oczywiście jeżeli mamy do czynienia z projektowaniem na jakikolwiek zakres mieszany, to siła sprężająca przybiera tylko wartość siły właściwej stanu 2 i nie mamy możliwości redukcji parametrów  $v$  i  $v'$ . Przynależną wartość mimośrodów siły sprężającej możemy łatwo obliczyć ze wzorów I grupy. /tablica V/, które w naszym przypadku przybierają znak równości i dają nam dwa równorzędne wyrażenia określające położenie środka ciężkości kabli

$$/4.3.4/ \quad e = v' - a' = r_w + \frac{\Sigma M + r_w (\Sigma N - Fk'_2)}{S}$$

lub

$$/4.3.5/ \quad e = v' - a' = r'_w + \frac{\Sigma M + r'_w (\Sigma N - Fk_2)}{S}$$

Przy dokładnym doborze przekroju obydwie wzory dają wartości identyczne; w praktyce jednak jest to trudne do osiągnięcia i dlatego najczęściej posługujemy się wzorem 4.3.4, obawiając się bardziej przekroczenia  $k'_2$  aniżeli  $k_2$ .

W tablicy X zestawiono wzory na wartości sił, jej położenie oraz niektóre charakterystyki geometryczne przekroju dla przypadku wykorzystania 4 naprężeń z jednego zakresu projektowania. Tablica XI zestawiona w postaci umożliwiającej wyszukanie odpowiedniego zakresu, określa nam te parametry przy projektowaniu na 4 naprężenia nie leżące w jednym zakresie.



Projektowanie przekroju przy wykorzystaniu 4 naprężeń z jednego zakresu

Lp.	Zakres	Siła sprężająca	$-\frac{v}{v'}$	Wskaźniki wytrzymałości	Położenie środka ciężkości kabli
1	0-2	$S = \frac{\eta [F(k_0 k_2 - k'_0 k'_2) - (k_0 - k'_0) \Sigma N - (k_2 - k'_2) N_g]}{\eta (k_0 - k'_0) + k_2 - k'_2} =$ $= \frac{\eta F(v' k'_0 - v k_0)}{h} - \eta N_g =$ $= \frac{F(v' k_2 - v k'_2)}{h} - \Sigma N$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g}$	$W'_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$ $W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k'_0 - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$	$\alpha' = v' - r_N = \frac{\Sigma M + r'_N (\Sigma N - F k'_2)}{S}$ $\alpha' = v' - r'_N = \frac{\Sigma M + r_N (\Sigma N - F k_2)}{S}$
2	1-2	$S = \frac{F(k_1 k_2 - k'_1 k'_2) - (k_1 - k'_1) \Sigma N - (k_2 - k'_2) N_g}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2} =$ $= \frac{F(v' k'_1 - v k_1)}{h} - N_g =$ $= \frac{F(v' k_2 - v k'_2)}{h} - \Sigma N$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p}$	$W'_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$ $W_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k'_1 - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$	
3	2-2	$S = \frac{F(k_2 + k'_2) - N_p}{2} - (N_g + \Delta N_p) =$ $= \frac{F(v' k'_2 - v k_2)}{h} - (N_g + \Delta N_p) =$ $= \frac{F(v' k_2 - v k'_2)}{h} - \Sigma N$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p}$	$W'_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 + \frac{N_p}{F}}$ $W_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 - \frac{N_p}{F}}$	

## 5. PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW

## W OPARCIU O WYKORZYSTANIE MAKSYMALNEGO MIMOŚRODU

5.1. Projektowania na 4 naprężenia i  $e_{\max}$ 

Przekrój, którym posługiwaliśmy się powyżej, był określony tylko wskaźnikami  $W$  i  $W'$  oraz powinien być tak skonstruowany ażeby praktycznie zrealizowana siła sprężająca na ramieniu  $e$  miała jeszcze odpowiednie otulenie. Kształt pręta, sposób rozłożenia materiału w przekroju pozostawał tu teoretycznie dowolny. Istnieją jednakże warunki konstrukcyjne, które dla przekrojów teowych i dwuteowych, a z takimi mamy najczęściej do czynienia, ustalają pewne graniczne stosunki wymiarów przekroju poprzecznego pręta.

Z drugiej strony wiemy, że umieszczenie siły sprężającej na możliwie dużym mimośrodku daje zazwyczaj najkorzystniejsze wyniki, w tym znaczeniu, że dla takiego samego efektu sprężania jak i przy innych położeniach siły mamy tu jej wartość najmniejszą.

Jeżeli więc założymy, że obwiednie momentów granicznych przetną się ze sobą w punkcie oddalonym o  $a'$  od dolnej krawędzi przekroju, znaczyć to będzie, że projektujemy na wykorzystanie 4 naprężeń i maksymalnego mimośrodu, a w oparciu o definicję granicy ciężaru własnego - właśnie na tę granicę.

W tej sytuacji mamy  $W$  i  $W'$  przekroju a pozostaje do określenia  $h$  i  $F$ . Obydwu tych parametrów obliczyć naraz nie możemy i w praktyce przyjmujemy najczęściej  $h$  a wyliczamy  $F$ .

Mamy tu do rozpatrzenia dwa wypadki:

- a/ gdy wszystkie naprężenia leżą w jednym zakresie
- b/ gdy mamy do czynienia z zakresem mieszanym.

Sposób postępowania będzie taki sam, jednak wzory w końcowym rezultacie będą różne.

5.1.1. Załóżmy więc, że 4 naprężenia, które chcemy wykorzystać leżą w jednym zakresie i że jest to zakres  $0-2$ . Jako punkt wyjścia do znalezienia pola przekroju posłużymy nam wzór 2.2.1.1, który w naszym przypadku przyjmie formę równości

/5.1.1.1/

$$\frac{\Sigma M}{S} = v' - r_{u2} - a'$$

Ponieważ jest

$$M_g = M_{g1} + F\beta$$

$$N_g = N_{g1} + F\lambda$$

to podstawiamy

$$r_{u2} = r_w \left(1 - \frac{F}{S} k'_2\right) + r_w \frac{N_{g1} + \Delta N_p + N_p + F\lambda}{S} \quad \text{wg tabl. I}$$

w którym

$$/2.4.1.4/ \quad r_w = -\frac{W'}{F} = -\frac{[(1-\eta)(M_{g1} + F\beta) + \Delta M_p + M_p]}{F(\eta k_0 - k'_2) + N_{g1} + \lambda F + \Delta N_p + N_p}$$

i

$$/4.3.1/ \quad S = \frac{\eta F(k_0 k_2 - k'_0 k'_2) - \eta(N_{g1} + \lambda F)(k_2 - k'_2) - \eta(N_{g1} + \lambda F + \Delta N_p + N_p)(k_0 - k'_0)}{k_2 - k'_2 + \eta(k_0 - k'_0)}$$

Jak również

$$/ \quad v' - a = h \left( \frac{1}{1 - \frac{v}{v'}} - \alpha' \right)$$

gdzie

$$\alpha' = \frac{a'}{h}$$

oraz

$$/4.1.2/ \quad -\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - [(N_{g1} + \lambda F)(1-\eta) + \Delta N_p + N_p]}{F(\eta k_0 - k'_2) + [(N_{g1} + \lambda F)(1-\eta) + \Delta N_p + N_p]}$$

Po dokonaniu podstawień i przekształceń otrzymujemy wyrażenie

$$/5.1.1.2/ \quad (M_{g1} + \Delta M_p + M_p)(k_0 - k'_0) + M_{g1}(k_2 - k'_2) = F \left\{ h \left[ k_0 k_2 - k'_0 k'_2 - \frac{\Delta N_p + N_p}{F} (k_0 - k'_0) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left( \frac{N_{g1}}{F} + \lambda \right) (k_0 - k'_0 + k_2 - k'_2) \right] \left[ \frac{\eta k_0 - k'_2 + \frac{(1-\eta)N_{g1} + \Delta N_p + N_p}{F} + (1-\eta)\lambda}{\eta(k_0 - k'_0) + k_2 - k'_2} - \alpha \right] - \right. \\ \left. - \beta(k_0 - k'_0 + k_2 - k'_2) \right\}$$



Tablica XI

Projektowanie przekroju przy wykorzystaniu 4 naprężeń z różnych zakresów

$$S = \frac{F}{h} (v'k_2 - vk_2') - \Sigma N$$

L.p.	Zakresy	Kryteria	Wskaźniki wytrzymałości	Położenie środką ciężkości kabli
1	0-2 i 1-2	$\frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p]} \leq \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} \leq \frac{F(k_1' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)]}$	$W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$ $W_1' = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$	$\alpha' = \frac{\Sigma M + r_w'(\Sigma N - Fk_2')}{\Sigma M + r_w'(\Sigma N - Fk_2)}$
2		$\frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p]} > \frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} \geq \frac{F(k_1' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g}{(1-\eta)[F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)]}$	$W_1' = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$ $W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$	
3	0-2 i 2'-2	$\frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta)N_g + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \leq \frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \leq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p}$	$W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_p)}$ $W_{2'}' = \frac{M_p}{k_2 - k_2' - \frac{N_p}{F}}$	
4		$\frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta)N_g + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} > \frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta)N_g - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p}$	$W_{2'}' = \frac{M_p}{k_2 - k_2' + \frac{N_p}{F}}$ $W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$	
5	1-2	$\frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \leq \frac{\Delta M_p}{M_p} \leq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p}$	$W_1' = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$ $W_{2'}' = \frac{M_p}{k_2 - k_2' - \frac{N_p}{F}}$	
6	2'-2	$\frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} > \frac{\Delta M_p}{M_p} \geq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_p}{F(k_2 - k_2') - N_p}$	$W_{2'}' = \frac{M_p}{k_2 - k_2' + \frac{N_p}{F}}$ $W_1' = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$	

Wzór ten możemy zapisać symbolicznie; otrzymamy wtedy równanie kwadratowe na  $F$ .

$$/5.1.1.3/ \quad (B_o D_o - G_o) F^2 + (B_o E_o - C_o D_o - A_o) F - C_o E_o = 0$$

gdzie współczynniki wynoszą

$$A_o = (M_{g1} + \Delta M_p + M_p)(k_o - k'_o) + M_{g1}(k_2 - k'_2)$$

$$B_o = h [k_o k_2 - k'_o k'_2 - \lambda(k_o - k'_o + k_2 - k'_2)]$$

$$C_o = h [(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)(k_o - k'_o) + N_{g1}(k_2 - k'_2)]$$

$$D_o = \frac{\eta k_o - k'_2 + (1-\eta)\lambda}{\eta(k_o - k'_o) + k_2 - k'_2} - \alpha'$$

$$E_o = \frac{(1-\eta)N_{g1} + \Delta N_p + N_p}{\eta(k_o - k'_o) + k_2 - k'_2}$$

$$G_o = \beta(k_o - k'_o + k_2 - k'_2)$$

Dla zakresów 1-2 i 2'-2 sposób postępowania będzie analogiczny, z zastrzeżeniem, że wzory na  $W'_1$ ,  $-\frac{V}{V'_1}$  i  $S$  bierzemy przynależne dla danego zakresu.

Otrzymamy tu odpowiednio:  
dla zakresu 1-2

$$\begin{aligned} & (M_{g1} + \Delta M_p + M_p)(k_1 - k'_1) + M_{g1}(k_2 - k'_2) = \\ & = F \left\{ h \left[ k_1 k_2 - k'_1 k'_2 - \frac{\Delta N_p + N_p}{F} (k_1 - k'_1) - \right. \right. \\ /5.1.1.4/ & \left. \left. - \left( \frac{N_{g1}}{F} + \lambda \right) (k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2) \right] \left( \frac{k_1 - k'_2 + \frac{\Delta N_p + N_p}{F}}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2} - \alpha' \right) - \right. \\ & \left. - \beta (k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2) \right\} \end{aligned}$$

oraz

$$/5.1.1.5/ \quad (B_1 D_1 - G_1) F^2 + (B_1 E_1 - C_1 D_1 - A_1) F - C_1 E_1 = 0$$

A dla zakresu 2-2

$$/5.1.1.6/ \quad \left[ 2(M_{g1} + \Delta M_p) + M_p - F \left[ h \left[ k_2 + k'_2 - 2\lambda - \frac{2(N_{g1} + \Delta N_p) + N_p}{F} \right] \cdot \left[ 0,5 - \alpha' + \frac{N_p}{2F(k_2 - k'_2)} \right] - 2\beta \right] \right]$$

$$/5.1.1.7/ \quad (B_2 D_2 - G_2) F^2 + (B_2 E_2 - C_2 D_2 - A_2) F - C_2 E_2 = 0$$

Wyniki te wraz z podaniem przynależnych wartości współczynników  $A_1, B_1 \dots$  i  $A_2, B_2 \dots$  zestawiono w tabelicy XII.

5.1.2. Dla przypadku, kiedy cztery naprężenia nie leżą w jednym zakresie, wzór 5.1.1.1 pozostaje nadal w mocy. Pozostawiamy te same związki odnośnie  $M_g$  i  $N_g$  oraz wybieramy któreś z wyrażeń na  $r_{w2}$  wg tablicy I; ponieważ  $S = S_{w2}$ , wyrażenia te dają liczbowo wartości sobie równe.

Rozpatrujemy przypadek kiedy oprócz stanu 2 miarodajne do wykorzystania są  $k_0$  i  $k'_1$ , a więc ważne wskaźniki wytrzymałości  $W'_0$  i  $W_1$ . Stosunek  $-\frac{v}{v'}$  możemy zatem określić jako

$$/5.1.2.1/ \quad Y_1 = -\frac{v}{v'} = \frac{W'_0}{W_1} = \frac{[(1-\eta)(M_{g1} + F\beta) + \Delta M_p + M_p][k_2 - k'_1 - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)]}{[\Delta M_p + M_p] \left\{ \eta k_0 - k'_2 + (1-\eta)\lambda + \frac{1}{F}[(1-\eta)(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)] \right\}}$$

ponieważ jest równocześnie

$$S = S_{w2} = \frac{F}{h}(v' k_2 - v k'_2) - (N_{g1} + \lambda F + \Delta N_p + N_p)$$

to po przekształceniach

$$/5.2.2.2/ \quad S = F \left[ \frac{k_2 + Y_1 k'_2}{1 + Y_1} - \frac{1}{F}(N_{g1} + \lambda F + \Delta N_p + N_p) \right] = F \cdot Z_1$$



Projektowanie przy wykorzystaniu 4 naprężeń z jednego zakresu i maksymalnego mimośrod

$$M_g = M_{g1} + F\beta, \quad N_g = N_{g1} + F\lambda$$

L.p		Siła sprężająca	$-\frac{v}{v'}$	Wskaźniki wytrzymałości	Równanie na F
1	0-2	$S = \frac{\eta [F(k_0 k_2 - k'_0 k'_2) - (k_0 - k'_0) \Sigma N - (k_2 - k'_2) N_g]}{\eta(k_0 - k'_0) + k_2 - k'_2}$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g}$	$W'_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$ $W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k'_0 - \frac{1}{F}(\Sigma N - N_g)}$	$(B_0 D_0 - G_0) F^2 + (B_0 E_0 - C_0 D_0 - A_0) F - C_0 E_0 = 0$ <p>gdzie</p> $A_0 = (M_{g1} + \Delta M_p + M_p)(k_0 - k'_0) + M_{g1}(k_2 - k'_2);$ $B_0 = h[k_0 k_2 - k'_0 k'_2 - \lambda(k_0 - k'_0 + k_2 - k'_2)];$ $C_0 = h[(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)(k_0 - k'_0) + N_{g1}(k_2 - k'_2)];$ $D_0 = \frac{\eta k_0 - k'_2 + (1 - \eta)\lambda}{\eta(k_0 - k'_0) + k_2 - k'_2} - \alpha';$ $E_0 = \frac{(1 - \eta)N_{g1} + \Delta N_p + N_p}{\eta(k_0 - k'_0) + k_2 - k'_2};$ $G_0 = \beta(k_0 - k'_0 + k_2 - k'_2)$
2					
3	1-2	$S = \frac{F(k_1 k_2 - k'_1 k'_2) - (k_1 - k'_1) \Sigma N - (k_2 - k'_2) N_g}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2}$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p}$	$W'_1 = \frac{\Delta M_p - M_p}{k_1 - k'_2 + \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$ $W_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k'_1 - \frac{1}{F}(\Delta N_p + N_p)}$	$(B_1 D_1 - G_1) F^2 + (B_1 E_1 - C_1 D_1 - A_1) F - C_1 E_1 = 0$ <p>gdzie</p> $A_1 = (M_{g1} - \Delta M_p + M_p)(k_1 - k'_1) + M_{g1}(k_2 - k'_2);$ $B_1 = h[k_1 k_2 - k'_1 k'_2 - \lambda(k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2)];$ $C_1 = h[(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)(k_1 - k'_1) + N_{g1}(k_2 - k'_2)];$ $D_1 = \frac{k_1 - k'_2}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2} - \alpha';$ $E_1 = \frac{\Delta N_p + N_p}{k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2};$ $G_1 = \beta(k_1 - k'_1 + k_2 - k'_2)$
4					
5	2'-2	$S = \frac{F(k_2 + k'_2) - N_p}{2} - (N_g + \Delta N_p)$	$-\frac{v}{v'} = \frac{F(k_2 - k'_2) - N_p}{F(k_2 - k'_2) + N_p}$	$W'_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 + \frac{N_p}{F}}$ $W_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 - \frac{N_p}{F}}$	$(B_2 D_2 - G_2) F^2 + (B_2 E_2 - C_2 D_2 - A_2) F - C_2 E_2 = 0$ <p>gdzie</p> $A_2 = 2M_{g1} + 2\Delta M_p + M_p;$ $B_2 = h(k_2 + k'_2 - 2\lambda);$ $C_2 = h(2N_{g1} + 2\Delta N_p + N_p);$ $D_2 = 0,5 - \alpha';$ $E_2 = \frac{N_p}{2(k_2 - k'_2)};$ $G_2 = 2\beta$
6					

oraz jak poprzednio

$$v' - a' = h \left( \frac{1}{1+Y_1} - \alpha' \right)$$

Po wstawieniu tych wartości do 5.1.1.1 i dokonaniu przekształceń otrzymujemy równanie na  $F$  w postaci uwiłkanej

$$/5.1.2.3/ \quad FZ_1 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_1} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_1} \right] = (\Delta M_p + M_p) \frac{Z_1 - k'_1 + \lambda + \frac{N_{g1}}{F}}{k_2 - k'_1 - \frac{1}{F} (N_p + \Delta N_p)} + M_{g1}$$

Uporządkowanie tego wzoru wg  $F$  pociąga za sobą tak bardzo rozbudowane współczynniki, że praktycznie nie nadają się one do stosowania. Dlatego też w tym przypadku najlepszą jest metoda kolejnych przybliżeń, która po dwu ewentualnie trzech przeliczeniach daje dostatecznie dokładne wyniki.

Ten sam sposób postępowania zastosowano do pozostałych wypadków a wyniki zestawiono w tablicy XIII w postaci gotowych wzorów.

## 5.2. Projektowanie na wykorzystanie trzech naprężeń i maksymalnego mimośrod

Przypadek ten będący najbardziej ogólnym sposobem projektowania przekrojów wstępnie sprężonych ma również największe znaczenie praktyczne. Pomijając w zasadzie sprawę czy pręt jest powyżej czy poniżej granicy ciężaru własnego dojść możemy w szczególnym przypadku do projektowania na wykorzystanie 4 naprężeń i maksymalnego mimośrod co zostało omówione uprzednio.

Do znalezienia przekroju pręta przy zadanych obciążeniach, naprężeniach dopuszczalnych i przyjętym położeniu środka ciężkości kabli wystarczy nam znajomość wartości:

$$F, I, h, - \frac{V}{v}, \text{ oraz } S$$

Poza tym przekrój musi odpowiadać pewnym warunkom konstrukcyjnym wyrażającym nam pionowe i poziome rozłożenie masy w przekroju.



Wskaźnik wydajności  $\varrho = - \frac{i^2}{v \cdot v'}$  przedstawia rozłożenie masy w kierunku pionowym; napisać go możemy również w praktyczniejszej formie

$$/5.2.1/ \quad \varrho = - \frac{W'}{Fv} = \frac{W}{Fv'}$$

Wielkość wskaźnika wydajności nie powinna w zasadzie przekraczać dla belek dwuteowych wartości 0,55. Z drugiej strony dobierając przekrój coraz bardziej krępy dochodzimy do prostokąta dla którego  $\varrho = 0,33$ . Praktycznie podać można, że dla przekrojów dwuteowych wskaźnik wydajności powinien wahać się w granicach  $0,45 \div 0,55$ .

Wskaźnik tęgłości  $\delta = \frac{F}{h^2}$  /5.2.2/ obrazuje rozłożenie materiału w kierunku poziomym i w przekrojach dwuteowych nie powinien być mniejszy od 0, 2. Granicy górnej ustalić tu niepodobna, zależy ona każdorazowo od charakteru konstrukcji.

W praktyce postępujemy w ten sposób, że dla przyjętego  $h$ , zakładamy również  $\delta$  i wtedy na podstawie wcześniej wyprowadzonych zależności ustawiamy równania w którym niewiadomą jest stosunek  $\frac{v'}{h} = x$ . Po jego znalezieniu obliczamy wartości pozostałych parametrów jak  $I$  i ewentualnie  $W$  lub  $W'$ .

Sprawdzamy czy wskaźnik wydajności  $\varrho$  leży w pożądanym granicach i metodą rozwiązywania układu równań lub drogą prób dobieramy przekrój.

Obecnie wyprowadzimy równanie na  $x$  dla zakresu  $i=2$ , przy wykorzystaniu wskaźnika wytrzymałości  $W'$ . O tym, którego stanu wskaźnik jest ważny, dowiadujemy się z tablicy VII ewentualnie VIII lub IX. Projektujemy na wykorzystanie dwu naprężeń w stanie 2 oraz jednego w stanie 1, tym samym  $S = S_{w2}$ .

Wychodzimy z pozostającego tu dalej w mocy równania 5.1.1.1

$$\frac{\Sigma M}{S} = v' - r_{u2} - a'$$



Projektowanie przy wykorzystaniu 4 naprężeń z różnych zakresów i maksymalnego mimośrod

$$S = F Z_i; \quad Z_i = \frac{k_2 + Y_i k_2'}{1 + Y_i} - \frac{N_{g1} + \Delta N_D + N_D}{F} - \lambda; \quad \alpha' = \frac{\alpha}{h}; \quad M_g = M_{g1} + F \beta; \quad N_g = N_{g1} + F \lambda$$

L.p.	Nr wg tabl. VI		Kryteria	Wskaźniki wytrzymałości	$Y_i = -\frac{v}{V}$	Wzór na F
1	1 i 4	0-2 i 1-2	$\frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta) N_g}{(1-\eta) [F(k_1 - k_2') + \Delta N_D + N_D]} \leq \frac{M_g}{\Delta M_D + M_D} \leq \frac{F(k_1' - \eta k_0') - (1-\eta) N_g}{(1-\eta) [F(k_2 - k_1') - (\Delta N_D + N_D)]}$	$W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{F} (\Sigma N - \eta N_g)}$ $W_1 = \frac{\Delta M_D + M_D}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)}$	$Y_1 = \frac{[(1-\eta) (M_{g1} + F\beta) + \Delta M_D + M_D] [k_2 - k_1' - \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)]}{(\Delta M_D + M_D) \{ \eta k_0 - k_2' + (1-\eta) \lambda + \frac{1}{F} [(1-\eta) N_{g1} + \Delta N_D + N_D] \}}$	$F Z_1 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_1} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_1} \right] = (\Delta M_D + M_D) \frac{Z_1 - k_1' + \lambda + \frac{N_{g1}}{F}}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)} + M_{g1}$
2	3 i 2		$\frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1-\eta) N_g}{(1-\eta) [F(k_1 - k_2') + \Delta N_D + N_D]} \geq \frac{M_g}{\Delta M_D + M_D} \geq \frac{F(k_1' - \eta k_0') - (1-\eta) N_g}{(1-\eta) [F(k_2 - k_1') - (\Delta N_D + N_D)]}$	$W_1' = \frac{\Delta M_D + M_D}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)}$ $W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{F} (\Sigma N - \eta N_g)}$	$Y_2 = \frac{(\Delta M_D + M_D) [k_2 - \eta k_0' - (1-\eta) \lambda - \frac{1}{F} (N_{g1} + \Delta N_D + N_D)]}{[(1-\eta) (M_{g1} + F\beta) + \Delta M_D + M_D] [k_1 - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)]}$	$F Z_2 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_2} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_2} \right] = (\Delta M_D + M_D) \frac{k_1 - Z_2 - \lambda - \frac{N_{g1}}{F}}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)} + M_{g1}$
3	1 i 6	0-2 i 2'-2	$\frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta) N_g + \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') + N_D} \leq \frac{(1-\eta) M_g + \Delta M_D}{M_D} \leq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta) N_g - \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') - N_D}$	$W_0' = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{F} (\Sigma N - \eta N_g)}$ $W_{2'} = \frac{M_D}{k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F}}$	$Y_3 = \frac{[(1-\eta) (M_{g1} + F\beta) + \Delta M_D + M_D] (k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F})}{M_D \{ \eta k_0 - k_2' + (1-\eta) \lambda + \frac{1}{F} [(1-\eta) N_{g1} + \Delta N_D + N_D] \}}$	$F Z_3 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_3} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_3} \right] = M_D \frac{Z_3 + \lambda - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_{g1})}{k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F}} + M_{g1} + \Delta M_D$
4	5 i 2		$\frac{F(\eta k_0 - k_2) + (1-\eta) N_g + \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') + N_D} \geq \frac{(1-\eta) M_g + \Delta M_D}{M_D} \geq \frac{F(k_2' - \eta k_0') - (1-\eta) N_g - \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') - N_D}$	$W_{2'}' = \frac{M_D}{k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F}}$ $W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{F} (\Sigma N - \eta N_g)}$	$Y_4 = \frac{M_D [k_2 - \eta k_0' - (1-\eta) \lambda - \frac{1}{F} [(1-\eta) N_{g1} + \Delta N_D + N_D]]}{[(1-\eta) (M_{g1} + F\beta) + \Delta M_D + M_D] (k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F})}$	$F Z_4 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_4} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_4} \right] = M_D \frac{k_2 - Z_4 - \lambda - \frac{1}{F} (N_{g1} + \Delta N_D)}{k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F}} + M_{g1} + \Delta M_D$
5	3 i 6	1-2 i 2'-2	$\frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') + \Delta N_D} \leq \frac{\Delta M_D}{M_D} \leq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') - \Delta N_D}$	$W_1' = \frac{\Delta M_D + M_D}{k_1 - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)}$ $W_{2'} = \frac{M_D}{k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F}}$	$Y_5 = \frac{(\Delta M_D + M_D) (k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F})}{M_D [k_1 - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)]}$	$F Z_5 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_5} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_5} \right] = M_D \frac{Z_5 + \lambda - k_2' + \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_{g1})}{k_2 - k_2' - \frac{N_D}{F}} + M_{g1} + \Delta M_D$
6	5 i 4		$\frac{F(k_1 - k_2) + \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') + \Delta N_D} \geq \frac{\Delta M_D}{M_D} \geq \frac{F(k_2' - k_1') - \Delta N_D}{F(k_2 - k_2') - \Delta N_D}$	$W_{2'}' = \frac{M_D}{k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F}}$ $W_1 = \frac{\Delta M_D + M_D}{k_2 - k_1' - \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)}$	$Y_6 = \frac{M_D [k_2 - k_1' - \frac{1}{F} (\Delta N_D + N_D)]}{(\Delta M_D + M_D) (k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F})}$	$F Z_6 \left[ h \left( \frac{1}{1+Y_6} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z_6} \right] = M_D \frac{k_2 - Z_6 - \lambda - \frac{1}{F} (N_{g1} + \Delta N_D)}{k_2 - k_2' + \frac{N_D}{F}} + M_{g1} + \Delta M_D$

Projektowanie przy wykorzystaniu 3 naprężeń i maksymalnego mimośrod

$$S = \frac{F}{h} (v'k_2 - vk_2') - \Sigma N$$

Lp.	Zakres	Kryteria	Wskaźnik wytrzymałości	Równanie na $x = \frac{v'}{h}$
1	0 - 2	$\frac{F(k_2 - \eta k_0') - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k_2') + (\Sigma N - \eta N_g)} \geq -\frac{v}{v'}$	$\frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_0 - k_2' + \frac{1}{\delta h^2} (\Sigma N - \eta N_g)} = W_0'$	$x^2 \delta h^3 (k_2 - k_2') + x [(W' - \alpha' \delta h^3)(k_2 - k_2') - \delta h^3 (\lambda - k_2') - h(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)] +$ $+ \alpha' h [(N_{g1} + \Delta N_p + N_p) + \delta h^2 (\lambda - k_2')] - (M_{g1} + \Delta M_p + M_p) - \beta \delta h^2 = 0$
2		$\frac{F(k_2 - \eta k_0') - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k_2') + (\Sigma N - \eta N_g)} \leq -\frac{v}{v'}$	$\frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k_0' - \frac{1}{\delta h^2} (\Sigma N - \eta N_g)} = W_0$	$x^2 \delta h^3 (k_2 - k_2') - x [(W + \alpha' \delta h^3)(k_2 - k_2') + \delta h^3 (\lambda - k_2') + h(N_{g1} + \Delta N_p + N_p)] +$ $+ \alpha' h [(N_{g1} + \Delta N_p + N_p) + \delta h^2 (\lambda - k_2')] + W(k_2 - k_2') - (M_{g1} + \Delta M_p + M_p) - \beta \delta h^2 = 0$
3	1 - 2	$\frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p} \geq -\frac{v}{v'}$	$\frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k_2' + \frac{1}{\delta h^2} (\Delta N_p + N_p)} = W_1'$	jak rubryka 1
4		$\frac{F(k_2 - k_1') - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k_2') + \Delta N_p + N_p} \leq -\frac{v}{v'}$	$\frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k_1' - \frac{1}{\delta h^2} (\Delta N_p + N_p)} = W_1$	jak rubryka 2
5	2' - 2	$\frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \geq -\frac{v}{v'}$	$\frac{M_p}{k_2 - k_2' + \frac{N_p}{\delta h^2}} = W_2'$	jak rubryka 1
6		$\frac{F(k_2 - k_2') - N_p}{F(k_2 - k_2') + N_p} \leq -\frac{v}{v'}$	$\frac{M_p}{k_2 - k_2' - \frac{N_p}{\delta h^2}} = W_2$	jak rubryka 2



Uwzględniając teraz, że

$$r_{u2} = r_w \left( 1 - \frac{F}{S} k'_2 + \frac{\Sigma N}{S} \right)$$

$$r_w = - \frac{W_1}{F}$$

$$S = S_{w2} = \frac{F}{h} (v' k_2 - v k'_2) - \Sigma N, \quad F = \delta h^2$$

Otrzymamy po podstawieniu i uporządkowaniu względem  $x = \frac{v'}{h}$  równanie kwadratowe

$$\begin{aligned} & x^2 \delta h^3 (k_2 - k'_2) + x \left[ (W'_1 - \alpha \delta h^3) (k_2 - k'_2) - \delta h^3 (\lambda - k'_2) - \right. \\ /5.2.3/ & \left. - h(N_{g1} + \Delta N_p + N_p) \right] + \alpha' h \left[ (N_{g1} + \Delta N_p + N_p) + \right. \\ & \left. + \delta h^2 (\lambda - k'_2) \right] - (M_{g1} + \Delta M_p + M_p) - \beta \delta h^2 = 0 \end{aligned}$$

Jeżeli ważne jest  $W$ , to odpowiednie podstawienia będą

$$\begin{aligned} r_{u2} &= r'_w \left( 1 - \frac{F}{S} k_2 + \frac{\Sigma N}{S} \right) \\ r'_w &= + \frac{W_1}{F} \end{aligned}$$

Analogiczne równanie na  $x$  ma postać

$$\begin{aligned} & x^2 \delta h^3 (k_2 - k'_2) - x \left[ (W_1 + \alpha' \delta h^3) (k_2 - k'_2) + \delta h^3 (\lambda - k'_2) + \right. \\ /5.2.4/ & \left. + h(N_{g1} + \Delta N_p + N_p) \right] + \alpha' h \left[ (N_{g1} + \Delta N_p + N_p) + \right. \\ & \left. + \delta h^2 (\lambda - k'_2) \right] + W_1 (k_2 - k'_2) - (M_{g1} + \Delta M_p + M_p) - \\ & - \beta \delta h^2 = 0 \end{aligned}$$

Szczegółowe wzory z podaniem przynależnych wskaźników wytrzymałości podano w tablicy XIV.



Przykład 3

Dla danych jak niżej zaprojektować przekrój przy wykorzystaniu 4 naprężeń i maksymalnego mimośrod.

$$\begin{aligned} \text{Obciążenia: } M_g &= 20 F + 20 Tm & N_g &= 10 F + 10 T \\ \Delta M_p &= 10 Tm & \Delta N_p &= 10 T \\ M_p &= 80 Tm & N_p &= 20 T \end{aligned}$$

Naprężenia dopuszczalne

$$\begin{aligned} k_0 &= 2000 \text{ T/m}^2 & k_1 &= 1600 \text{ T/m}^2 & k_2 &= 1300 \text{ T/m}^2 \\ k'_0 &= -100 \text{ T/m}^2 & k'_1 &= 0 & k &= 100 \text{ T/m}^2 \end{aligned}$$

Przyjęto  $\eta = 0,75$   $h = 1,0 \text{ m}$   $\alpha' = 0,1$   
i w przybliżeniu do obliczeń przy kryteriach  $\delta = 0,3$

Przy pomocy tablicy VIIa określamy ważny z zakresów 0-2 i 1-2

$$\frac{M_g}{\Delta M_p + M_p} = \frac{20 \cdot 0,3 + 20}{10 + 80} = 0,289$$

$$\frac{F(\eta k_0 - k_1) + (1 - \eta) N_g}{(1 - \eta)[F(k_1 - k'_1) + N_p + \Delta N_p]} =$$

$$\frac{0,3(0,75 \cdot 2000 - 1600) + (1 - 0,75)(10 \cdot 0,3 + 10)}{(1 - 0,75)[0,3(1600 - 100) + 20 + 10]} = 0,233$$

$$\frac{F(k'_1 - \eta k'_0) - (1 - \eta) N_g}{(1 - \eta)[F(k_2 - k'_1) - \Delta N_p - N_p]} =$$

$$\frac{0,3 \cdot 0 - 0,75(-100) - (1 - 0,75) \cdot 13}{(1 - 0,75)[0,3(1300 - 0) - 10 - 20]} = 0,214$$

$$- 0,233 < 0,214 < 0,289$$

Z kierunku nierówności w tabl.VIIa wynika ważny zakres 0-2.

Sprawdzamy jeszcze w tablicy VIIIa zakresy 0-2 i 2'-2

$$\frac{\Delta M_D + (1-\eta)M_E}{M_P} = \frac{10 + (1 - 0,75) 26}{80} = 0,206$$

$$\frac{(1-\eta)N_E + \Delta N_D + F(\eta k_0 - k_2)}{F(k_2 - k_2') + N_P} =$$

$$\frac{(1 - 0,75) \cdot 13 + 10 + 0,3(0,75 \cdot 200 - 1300)}{0,3(1300 - 100) + 20} = 0,193$$

$$\frac{-(1-\eta)N_E - \Delta N_D + F(k_2' - \eta k_0')}{F(k_2 - k_2') - N_P} =$$

$$\frac{-(1 - 0,75) \cdot 13 - 10 + 0,3[100 - 0,75(-100)]}{0,3(1300 - 100) - 20} = 0,116$$

$$0,206 > 0,193 > 0,116$$

Miarodajnym jest zakres 0-2.

Według tablicy XII obliczamy dla zakresu 0-2 współczynniki do równania kwadratowego na  $F$

$$\begin{aligned} A_0 &= (20 + 10 + 80) [2000 - (-100)] + 20(1300 - 100) = \\ &= 253000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \left\{ 2000 \cdot 1300 - (-100) \cdot 100 - 10 [2000 - (-100) + \right. \\ &\quad \left. + 1300 - 100] \right\} = 2577000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 [(10 + 10 + 20) (2000 + 100) + 10 (1300 - 100)] = \\ &= 96000 \end{aligned}$$

$$D_0 = \frac{0,75 \cdot 2000 - 100 + 0,25 \cdot 10}{0,75(2000 + 100) + 1300 - 100} = 0,1 = 0,405$$

$$E_o = \frac{0,25 \cdot 10 + 10 + 20}{0,75(2000 + 100) + 1300 - 100} = 0,01171$$

$$G_o = 20(2000 + 100 + 1300 - 100) = 52000$$

Po wstawieniu do równania  $(B_o D_o - G_o) F^2 + (B_o E_o - C_o D_o - A_o) F - C_o E_o = 0$

$$(2577000 \cdot 0,405 - 52000) F^2 + (2577000 \cdot 0,01171 - 96000 \cdot 0,405 - 255000) F - 96000 \cdot 0,01171 = 0$$

$$990000 F^2 - 263700 F - 1125 = 0$$

rozwiązaniu i wybraniu właściwego pierwiastka, mamy

$$F = 0,271 \text{ m}^2$$

Wskaźniki wytrzymałości

$$W'_o = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_o - k'_2 + \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$$

$$= \frac{(1 - 0,75)(20 \cdot 0,271 + 20) + 10 + 80}{0,75 \cdot 2000 - 100 + \frac{1}{0,271}[0,25(10 \cdot 0,271 + 10) + 10 + 20]} = 0,0632 \text{ m}^3$$

$$W_o = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k'_o - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)}$$

$$= \frac{(1 - 0,75)(20 \cdot 0,271 + 20) + 10 + 80}{1300 + 0,75 \cdot 100 - \frac{1}{0,271}[0,25(10 \cdot 0,271 + 10) + 10 + 20]} =$$

$$= 0,0768 \text{ m}^3$$

położenie środka ciężkości

$$\frac{v}{v'} \frac{W'}{W} = \frac{0,0632}{0,0768} = 0,824, \quad v \perp v' = 1,0 \text{ m} \quad v = -0,452 \text{ m}; \quad \varphi = \frac{W}{Fv} = \frac{0,0768}{0,271 \cdot 0,548} = 0,518$$

Przekrój konstrukcyjny



i siła sprężająca

$$S = S_{w2} = \frac{F}{h} (v' k_2 - v k_2') - \Sigma N = \frac{0,271}{1} (0,548 \cdot 1300 - 0,452 \cdot 100) - 42,71 = 162,5 \text{ T}$$

Jeżelibyśmy przeprowadzali zupełnie dokładne obliczenie numeryczną wartość  $a'$  powinna być dokładnie jak założono  $a' = \alpha' h = 0,1 \text{ m}$ .

Ponieważ obliczenia przeprowadzano na suwaku 27 cm, skorygujemy wartość  $a'$  dla obliczonego  $F = 0,271 \text{ m}$  według tablicy X.

$$I = v' W' = 0,548 \cdot 0,0632 = 0,0347 \text{ m}^4; i^2 = \frac{I}{F} = \frac{0,0347}{0,271} = 0,128 \text{ m}^2$$

$$r'_w = - \frac{i^2}{v} = \frac{0,128}{0,452} = 0,283 \text{ m}$$

$$a' = v' - r'_w - \frac{\Sigma M + r'_w (\Sigma N - F k_2)}{S} = 0,548 - 0,283 - \frac{25,42 + 10 + 80 + 0,283(42,71 - 0,271 \cdot 1300)}{162,5} = 0,094 \text{ m}$$

$$e = v' - a' = 0,548 - 0,094 = 0,454 \text{ m}$$

Sprawdzenie naprężeń

$$\sigma'_0 = \frac{162,5}{0,75 \cdot 0,271} - \frac{162,5 \cdot 0,454}{0,75 \cdot 0,0768} + \frac{12,71}{0,271} + \frac{25,42}{0,0768} = 800 - 1280 + 47 + 331 = -102 \text{ T/m}^2 \approx k'_0$$

$$\sigma_0 = 800 + \frac{162,5 \cdot 0,454}{0,75 \cdot 0,0632} + 47 - \frac{25,42}{0,0632} = 800 + 1555 + 47 - 402 = 2000 \text{ T/m}^2 = k_0$$

$$\sigma'_1 = \frac{162,5}{0,271} - \frac{162,5 \cdot 0,454}{0,0768} + 47 + 331 = 600 - 960 + 47 + 331 = 18 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_1 = 600 + \frac{162,5 \cdot 0,454}{0,0632} - 47 - 402 = 600 + 1167 + 47 - 402 = 1412 \text{ T/m}^2$$

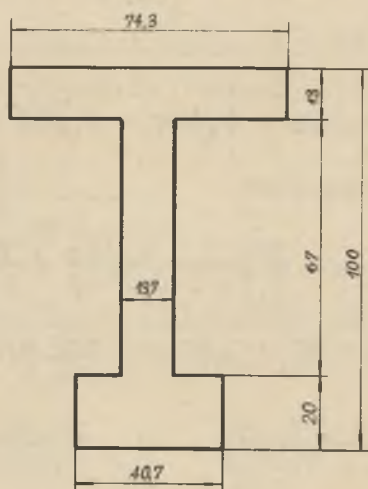
$$\sigma_2' = 18 + \frac{10}{0,271} + \frac{10}{0,0768} = 18 + 37 + 131 = 186 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_2' = 1412 + 37 - \frac{10}{0,0632} = 1412 + 37 - 158 = 1291 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_2 = 186 + \frac{20}{0,271} + \frac{80}{0,0768} = 186 + 74 + 1040 - 1300 \text{ T/m}^2 = k_2$$

$$\sigma_2' = 1291 + 74 - \frac{80}{0,0632} = 1291 + 74 - 1265 = 100 \text{ T/m}^2 = k_2$$

Metodą rozwiązywania równań dobrano przekrój jak na rys.5.



Rys.5

Przykład 4

Dla danych jak niżej zaprojektować przekrój przy wykorzystaniu 4 naprężeń i maksymalnego mimośrod.

$$\text{Obciążenia: } M_g = 20 F + 20 Tm \quad N_g = 10 F + 10 T$$

$$\Delta M_p = 5 Tm \quad \Delta N_p = 10 T$$

$$M_p = 80 Tm \quad N_p = 20 T$$

Naprężenia dopuszczalne

$$k_o = 2000 T/m \quad k_1 = 1600 T/m \quad k_2 = 1300 T/m$$

$$k'_o = -100 T/m \quad k'_1 = 0 \quad k'_2 = 100 T/m$$

Przyjęto  $\eta = 0,75$   $h = 1,0 m$   $\alpha' = 0,1$  i w przybliżeniu do obliczeń przy kryteriach  $\delta = 0,27$ .

Przy pomocy tablicy VIIa określamy ważny z zakresów 0-2 i 2'-2

$$\frac{(1-\eta)M_g + \Delta M_p}{M_p} = \frac{(1-0,75) \cdot 25,4 + 5}{80} = 0,142$$

$$\frac{(1-\eta)N_g + \Delta N_p + F(\eta k_o - k_2)}{F(k_2 - k'_2) + N_p} =$$

$$\frac{(1-0,75) \cdot 12,7 + 5 + 0,27(0,75 \cdot 2000 - 1300)}{0,27(1300 - 100) + 20} = 0,181$$

$$\frac{-(1-\eta)N_g - \Delta N_p + F(k'_2 - \eta k'_o)}{F(k_2 - k'_2) - N_p} =$$

$$\frac{-(1-0,75) \cdot 12,7 - 5 + 0,27[100 - 0,75(-100)]}{0,27(1300 - 100) - 20} = 0,1285$$

$$0,181 > 0,142 > 0,1285$$



Z kierunku nierówności wynika zakres mieszany na wykorzystanie naprężeń  $k_2, k'_2, k_2, k'_2$ . Ważne wskaźniki wytrzymałości  $W'_2, W_0$  /tabl.XIII/.

$$W'_2 = \frac{M_D}{k_2 - k'_2 + \frac{N_D}{F}} = \frac{80}{1300 - 100 + \frac{20}{0,27}} = 0,0627 \text{ m}^3$$

$$W_0 = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k'_0 - \frac{1}{F}(\Sigma N - \eta N_g)} =$$

$$= \frac{(1 - 0,75) 25,4 + 5 + 80}{1300 - 0,75 \cdot (-100) - \frac{1}{0,27}[(1 - 0,75) \cdot 12,7 + 10 + 20]} =$$

$$= 0,0729 \text{ m}^3$$

Z tablicy VII wnioskujemy czy w grę nie wchodzi jeszcze zakres 1-2

$$- \frac{v}{v'} = \frac{W'}{W} = \frac{0,0629}{0,0729} = 0,861$$

$$\frac{F(k_2 - \eta k'_0) - (\Sigma N - \eta N_g)}{F(\eta k_0 - k'_2) + \Sigma N - \eta N_g} =$$

$$= \frac{0,27[1300 - 0,75 \cdot (-100)] - [(1 - 0,75) \cdot 12,7 + 10 + 20]}{0,27(0,75 \cdot 2000 - 100) + 0,25 \cdot 12,7 + 10 + 20} =$$

$$= 0,823$$

$$\frac{F(k_2 - k'_1) - (\Delta N_p + N_p)}{F(k_1 - k'_2) + \Delta N_p + N_p} = \frac{0,27(1300 - 0) - 10 - 20}{0,27(1600 - 100) + 10 + 20} = 0,738;$$

$$0,861 > \begin{cases} 0,823 \\ 0,738 \end{cases}$$

$$\frac{25,4}{5 + 80} > \frac{1}{1 - 0,75} \cdot \frac{0,27 [0 - 0,75(-100)] - (1 - 0,75) \cdot 12,7}{0,27(1300 - 0) - 10 - 20}$$

$$0,299 > 0,208$$

Ważny jest zakres mieszany  $k_2$   $k'_0$   $k_2$   $k'_2$ . Należy obliczać według tablicy XIII.

Zakładamy w pierwszym przybliżeniu  $\delta = 0,27$  i obliczamy wielkości pomocnicze

$$Y_4 = \frac{M_p \left[ k_2 - \eta k'_0 - (1 - \eta) \lambda - \frac{1}{F} \left[ (1 - \eta) N_{g1} + \Delta N_p + N_p \right] \right]}{\left[ (1 - \eta) (M_{g1} + F\beta) + \Delta M_p + M_p \right] \left( k_2 - k'_2 + \frac{N_p}{F} \right)} =$$

$$= \frac{80 \left\{ 1300 - 0,75 \cdot (-100) - (1 - 0,75) \cdot 10 - \frac{1}{0,27} \left[ (1 - 0,75) 10 + 10 + 20 \right] \right\}}{\left[ (1 - 0,75)(20 + 20 \cdot 0,27) + 5 + 80 \right] (1300 - 100 + \frac{20}{0,27})}$$

$$= 0,860$$

$$Z = \frac{k_2 + Y_4 k'_2}{1 + Y_4} - \frac{N_{g1} + \Delta N_p + N_p}{F} - \lambda = \frac{1300 + 0,860 \cdot 100}{1 + 0,860} - \frac{10 + 10 + 20}{0,27} -$$

$$- 10 = 587$$

Wstawiamy teraz do równania

$$F \cdot Z \left[ h \left( \frac{1}{1 + Y_4} - \alpha' \right) - \frac{\beta}{Z} \right] = M_p \frac{k_2 - Z - \lambda - \frac{1}{F} (N_{g1} + \Delta N_p)}{k_2 - k'_2 + \frac{N_p}{F}} + M_{g1} + \Delta M_p$$

$$F \cdot 587 \left[ 1 \left( \frac{1}{1 + 0,86} - 0,1 \right) - \frac{20}{587} \right] = 80 \frac{1300 - 587 - 10 - \frac{1}{0,27} (10 + 10)}{1300 - 100 + \frac{20}{0,27}} +$$

$$+ 20 + 5$$

skąd otrzymujemy

$$F = 0,271 \text{ m}^2$$

Jest to przybliżenie wystarczające. Z uwagi na przybliżony charakter obliczenia i niedokładności suwakowe obliczamy powtórnie  $a'$  według wzorów z tablicy XI. Wskaźniki wytrzymałości pozostają praktycznie takie same jak początkowo wyliczone.

$$-\frac{V}{V'} = 0,861; v' - v = 1,0 \rightarrow v = -0,462 \text{ m}, \quad v' = 0,538 \text{ m}$$

$$\xi = \frac{W}{Fv'} = \frac{0,0729}{0,271 \cdot 0,538} = 0,50. \text{ Przekrój konstrukcyjny}$$

$$S = F \cdot Z = 0,271 \cdot 587 = 158,5 \text{ t}; I = v'W' = 0,538 \cdot 0,0627 = 0,0337 \text{ m}^4$$

$$i^2 = \frac{I}{F} = \frac{0,0337}{0,271} = 0,125 \text{ m}^2; r_w = -\frac{i^2}{v'} = -\frac{0,125}{0,538} = -0,232 \text{ m}$$

$$a' = v' - r_w = \frac{\Sigma M + r_w (\Sigma N - Fk'_2)}{S} = 0,538 - (-0,232) - \frac{25,4 + 5 + 80 - 0,232(42,7 - 0,271 \cdot 100)}{158,5}$$

$$a' = 0,097 \text{ m} \quad e = v' - a' = 0,538 - 0,097 = 0,441 \text{ m}$$

Sprawdzenie naprężeń

$$\sigma'_0 = \frac{158,5}{0,75 \cdot 0,271} - \frac{158,5 \cdot 0,441}{0,75 \cdot 0,0729} + \frac{12,71}{0,271} + \frac{25,42}{0,0729} = 783 - 1278 + 47 + 348 = -100 \text{ T/m}^2 = k'_0$$

$$\sigma_0 = 783 + \frac{158,5 \cdot 0,441}{0,75 \cdot 0,0627} + 47 - \frac{25,42}{0,0627} = 783 + 1485 + 47 - 405 = 1910 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_1 = \frac{158,5}{0,271} - \frac{158,5 \cdot 0,441}{0,0729} + 47 + 348 = 587 - 958 + 47 + 348 = 24 \text{ T/m}^2$$



$$\sigma_1 = 587 + \frac{158,5 \cdot 0,441}{0,0627} + 47 - 405 = 587 + 1114 + 47 - 405 = 1343 \text{ T/m}^2$$

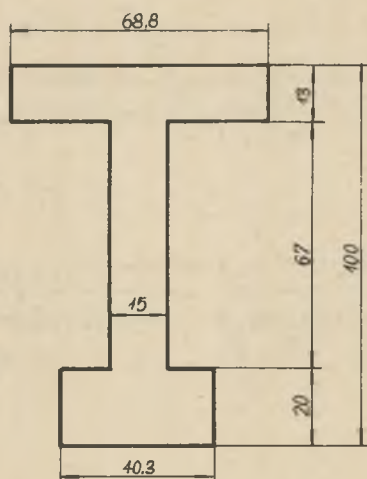
$$\sigma'_{2'} = 24 + \frac{10}{0,271} + \frac{5}{0,0729} = 24 + 37 + 68,5 = 129,5 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_{2'} = 1343 + 37 - \frac{5}{0,0627} = 1343 + 37 - 80 = 1300 \text{ T/m}^2 = k_2$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= 129,5 + \frac{20}{0,271} + \frac{80}{0,0729} = 129,5 + 74 + 1097 = \\ &= 1300,5 \text{ T/m}^2 \approx k_2 \end{aligned}$$

$$\sigma'_2 = 1300 + 74 - \frac{80}{0,0627} = 1300 + 74 - 1275 = 99 \text{ T/m}^2 \approx k'_2$$

Metodą rozwiązywania równań dobrano przekrój jak na rys.6.



Rys.6

Przykład 5

Dla danych jak niżej zaprojektować przekrój przy wykorzystaniu 3 naprężeń i maksymalnego mimośrod.

$$\text{Obciążenia} \quad M_g = 25 F + 40 Tm \quad N_g = 10 F + 10 T$$

$$\Delta M_p = -10 Tm \quad \Delta N_p = 10 T$$

$$M_p = 80 Tm \quad N_p = 20 T$$

Naprężenia dopuszczalne

$$k_o = 2000 T/m^2 \quad k_1 = 1600 T/m^2 \quad k_2 = 1300 T/m^2$$

$$k'_o = -100 T/m^2 \quad k'_1 = 0 \quad k'_2 = 100 T/m^2$$

Przyjęto  $\eta = 0,75$   $h = 1,0$  m  $\alpha' = 0,1$   $\delta = +0,27$

Projektujemy na podstawie tablicy XIV.

Obliczamy wskaźniki wytrzymałości ze wszystkich stanów

$$W'_o = \frac{\Sigma M - \eta M_g}{\eta k_o - k'_2 + \frac{1}{\delta h^2} (\Sigma N - \eta N_g)} =$$

$$= \frac{(1 - 0,75)(25 \cdot 1^2 \cdot 0,27 + 40) - 10 + 80}{0,75 \cdot 2000 - 100 + \frac{1}{0,27 \cdot 1^2} [(1 - 0,75)(10 \cdot 1^2 \cdot 0,27) + 10 + 10 + 20]} =$$

$$= 0,0536 \text{ m}^3$$

$$W'_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_1 - k'_2 + \frac{1}{\delta h^2} (\Delta N_p + N_p)} = \frac{-10 + 80}{1600 - 100 + \frac{1}{0,27 \cdot 1^2} (10 + 20)} =$$

$$= 0,0434 \text{ m}^3$$

$$W'_2 = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 + \frac{N_p}{\delta h^2}} = \frac{80}{1300 - 100 + \frac{20}{0,27 \cdot 1^2}} = 0,0628 \text{ m}^3$$

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{\Sigma M - \eta M_g}{k_2 - \eta k'_0 - \frac{1}{\delta h^2}(\Sigma N - \eta N_g)} = \\
 &= \frac{(1 - 0,75)(25 \cdot 0,27 \cdot 1^2 + 40) - 10 + 80}{1300 - 0,75(-100) - \frac{1}{0,27 \cdot 1^2}[(1 - 0,75)(10 \cdot 0,27 \cdot 1^2 + 10) + 10 + 20]} \\
 &= 0,0652 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

$$W_1 = \frac{\Delta M_p + M_p}{k_2 - k'_1 - \frac{1}{\delta h^2}(\Delta N_p + N_p)} = \frac{-10 + 80}{1300 - 0 - \frac{1}{0,27 \cdot 1^2}(10 + 20)} = 0,0589 \text{ m}^3$$

$$W_{2'} = \frac{M_p}{k_2 - k'_2 - \frac{N_p}{\delta h^2}} = \frac{80}{1300 - 100 - \frac{20}{0,27 \cdot 1^2}} = 0,0710 \text{ m}^3$$

Zakładamy wykorzystanie  $W'_{2'}$ . Podstawiamy do równania z rubryki 1.

$$\begin{aligned}
 x^2 \delta h^3 (k_2 - k'_2) + x \left[ (W' - \alpha' \delta h^3) (k_2 - k'_2) - \delta h^3 (\lambda - k'_2) - h(N_{g1} + \right. \\
 \left. + \Delta N_p + N_p) \right] + \alpha' h \left[ (N_{g1} + \Delta N_p + N_p) + \delta h^2 (\lambda - k'_2) \right] - (M_{g1} + \\
 + \Delta M_p + M_p) - \beta \delta h^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 \cdot 0,27 \cdot 1^3 (1300 - 100) + x \left[ (0,0628 - 0,1 \cdot 0,27 \cdot 1^3) (1300 - 100) - \right. \\
 \left. - 0,27 \cdot 1^3 (-100 + 10) - 1(10 + 10 + 20) \right] + 0,1 \cdot 1 \left[ (10 + 10 + 20) + \right. \\
 \left. + 0,27 \cdot 1^2 (10 - 100) \right] - 40 + 10 - 80 - 25 \cdot 0,27 \cdot 1^2 = 0
 \end{aligned}$$

$$324 x^2 + 27,3 x - 115,18 = 0$$



Po rozwiązaniu właściwy pierwiastek wynosi  $x = 0,556$   
 $v' = 0,556 \text{ m}$ ,  $v = -0,444 \text{ m}$ ;  $I = W'_{2,1} \cdot v = 0,0628 \cdot 0,556 = 0,0349 \text{ m}^4$

$$\varrho = -\frac{W'}{Fv} = \frac{0,0628}{0,27 \cdot 0,444} = 0,524$$

$$W = -\frac{I}{v} = \frac{0,0349}{0,444} = 0,0785 \text{ m}^3$$

Ponieważ obliczone  $W$  jest większe od poprzednio wyliczonych, naprężenia w żadnym stanie nie zostaną przekroczone.

Siła sprężająca i mimośród

$$S = S_{w2} = \frac{P}{h}(v'k_2 - vk'_2) - \Sigma N = \frac{0,27}{1} [0,556 \cdot 1300 - (-0,444) \cdot 100] - (10 \cdot 0,27 + 10 + 10 + 20) = 164 \text{ T}$$

$$e = v' - 0,1 h = 0,556 - 0,1 \cdot 1,0 = 0,456 \text{ m}$$

Sprawdzenie naprężeń

$$\sigma'_0 = \frac{164}{0,75 \cdot 0,27} - \frac{164 \cdot 0,456}{0,75 \cdot 0,0785} + \frac{12,7}{0,27} + \frac{46,75}{0,0785} = 810 - 1270 + 47 + 595 = 182 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_0 = 810 + \frac{164 \cdot 0,456}{0,75 \cdot 0,0628} + 47 - \frac{46,75}{0,0628} = 810 + 1588 + 47 - 745 = 1700 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma'_1 = \frac{164}{0,27} - \frac{164 \cdot 0,456}{0,0785} + 47 + 595 = 607 - 952 + 47 + 595 = 297 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_1 = 607 + \frac{164 \cdot 0,456}{0,0628} + 47 - 745 = 607 + 1192 + 47 - 745 = 1101 \text{ T/m}^2$$

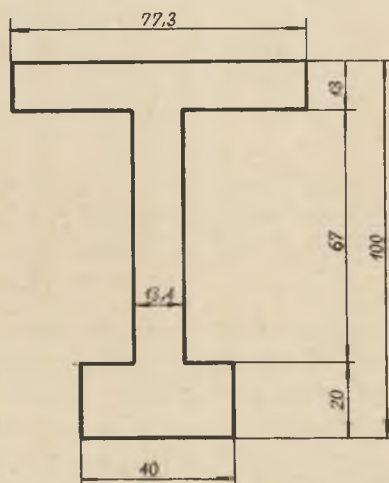
$$\sigma'_{2'} = 297 + \frac{10}{0,27} - \frac{10}{0,0785} = 297 + 37 - 127 = 207 \text{ T/m}^2$$

$$\sigma_{2'} = 1101 + 37 + \frac{10}{0,0628} = 1101 + 37 + 159 = 1297 \text{ T/m}^2 \approx k_2$$

$$\sigma_2 = 207 + \frac{20}{0,27} + \frac{80}{0,0785} = 207 + 74 + 1018 = 1299 \text{ T/m}^2 \approx k_2$$

$$\sigma'_2 = 1297 + 74 - \frac{80}{0,0628} = 1297 + 74 - 1272 = 99 \text{ T/m}^2 \approx k_2$$

Zakładając stosunki wysokościowe przekroju i rozwiązując układ 3 równań o 3 niewiadomych otrzymujemy przekrój o ściśle dobranej charakterystyce geometrycznej, w praktycznej realizacji należy wymiary zaokrąglić w górę do całych cm. Rys.7.



Rys.7

## LITERATURA

1. Y.Guyon - Béton précontraint 2 wyd. Paryż 1953 r.
2. S.Kaufman - J.Mames: Uogólniony rdzeń przekroju w belce wstępnie sprężonej - Archiwum Inżynierii Lądowej /3-4/ 1955 r.
3. J.Mames: Sprężona belka ciągła. Analiza i projektowanie. Archiwum Inżynierii Lądowej /4/ 1957 r.
4. W.Starosolski: Projektowanie sprężonych przekrojów zginanych z uwzględnieniem wszystkich programowych stanów obciążenia. Archiwum Inżynierii Lądowej /3/ 1958 r.



## The Design of Eccentrically Loaded Prestressed Sections

## Summary

In the available literature concerning the design problems of prestressed sections there can be noted a lack of elaborated method of design of an eccentrically loaded section.

This paper deals just with that problem. The considerations are of quite general character; we do not make any limitations as to the applied loads, assuming only all forces acting in the plane of symmetry.

In the paper there are taken into account four loading stages: initial, under dead load, and under minimal and maximal live load, covering so all loading possibilities and variations of prestressing force.

The influence of the axial force is taken into consideration by means of the so called modified stresses represented by the relation.

$$k_{mi} = k_i - \frac{N_i}{F}$$

where

- $k_{mi}$  - modified stress in the stage  $i$
- $k_i$  - allowable stress in the stage  $i$
- $N_i$  - the axial force in the stage  $i$
- $F$  - sectional area.

This assumption reduces farther analysis to a section loaded by the bending moment only with new permissible stresses  $k_{mi}$ . The final solutions are presented in the real permissible stresses  $k_i$  so that the influence of the axial force can be seen at once.

Assuming the longitudinal force or the bending moment equal zero we receive as a special case the known design methods for pure bending or tension respectively.

The loading stages are joined one by one with the stage of maximum live load constituting so the separate design ranges. Depending on external loads and permissible stresses there are given criteria for fixing the proper design range.

The paper discusses principally two problems:

1. the selection of the prestressing force to already existing section,
2. the selection of the proper cross-section and of the prestressing force for given external loads and permissible stresses.

If the dead load is below its critical value there are two alternative solutions, namely:

- a/ utilization of four permissible stresses from one range,
- b/ as above but from two different ranges.

Having fixed the depth of the section we compute its area and locate its centre of gravity; then we can pass over to other characteristics of the section.

If the dead load is above its critical value we utilize the greatest possible eccentricity and only three permissible stresses. In this case we operate with the estimated sectional depth and with the empirical coefficient

$$\delta = \frac{F}{h^2}$$

which is easy to determine - and we compute the distance from the bottom fibre to the centre of gravity.

The results for all stages and ranges are given in form of design charts, which make possible the immediate numerical solution.