ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 29 Budownictwo z.4 1961

JÓZEF LEDWOŃ

Politechnika Śląska

UOGÓLNIENIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH ODKSZTAŁCEŃ PIERŚCIENIA SPRĘŻYSTEGO W OŚRODKU LINIOWO - SPRĘŻYSTYM

Dany jest pierścień kołowy o przekroju prostokątnym z materiału jednorodnego i izotropowego w ośrodku liniowo - sprężystym. Pierścień ten jest obciążony siłami skupionymi rozmieszczonymi osiowo wzdłuż jego obwodu i skierowanymi radialnie ze zwrotem na zewnątrz (rys.1).

Rozpatrujemy elementarny wycinek pierścienia na odcinku między przyłożonymi siłami skupionymi.

W nawiązaniu do rys.2 wprowadzamy oznaczenia:

b, h - szerokość i wysokość przekroju pierścienia

A - pole radialnego przekroju poprzecznego

R - promień pierścienia mierzony do jego osi

K - współczynnik podatności podłoża na jednostkę długości obwodu

k - jednostkowy współczynnik podatności podłoża (o wymiarze np. w kG/cm^3)

Q - siła poprzeczna
N - siła podłużna
M - moment zginający
} w płaszczyźnie pierścienia

d s - elementarna długość łuku o promieniu R

Biorąc pod uwagę siły wewnętrzne i reakcje ośrodka sprężystego, otrzymamy następujące równania równowagi. Suma sił w kierunku x

$$Q \sin \frac{d\varphi}{2} + (Q + dQ) \sin \frac{d\varphi}{2} + dN = 0. \qquad (1a)$$

Suma sił w kierunku osi y

$$- K w d s + N \sin \frac{d\varphi}{2} + (N + d N) \sin \frac{d\varphi}{2} - d Q = 0. \quad (1b)$$

Moment względem jednego końca elementu łuku

$$M - (M + d M) - Q d s + K w \frac{d s^2}{2} - N d s \sin d\varphi = 0. \quad (1c)$$

Pomijając małe rzędu drugiego, układ równań (1) uprości się do postaci

$$\frac{d N}{d s} + \frac{Q}{R} = 0 \quad (2a)$$

$$\frac{d Q}{d s} + K w - \frac{N}{R} = 0 \quad (2b)$$

$$\frac{d M}{d s} + Q = 0. \quad (2c)$$

W równaniu (2b) iloczyn Kw stanowi obciążenie pierścienia na jednostkę długości obwodu, pochodzące od oddziaływania środowiska (K = k h).

Siłę podłużną N i moment zginający M można wyrazić przez odkształcenia za pomocą związków

$$M = \frac{E J}{R^2} \left(\frac{d u}{d\varphi} + \frac{d^2 w}{d\varphi^2}\right) \quad (3a)$$

$$N = \frac{A E}{R} \left(\frac{d u}{d\varphi} - w\right). \quad (3b)$$

Wprowadzając $d s = R d\varphi$ i podstawiając do równania (2b) zróżniczkowane podług $d\varphi$ równanie (2a) otrzymamy

$$\frac{d^2 N}{d^2} - K R w = N = 0 \quad (4)$$

Różniczkując dwukrotnie równanie (3b) i wprowadzając $\frac{d^2 N}{d\varphi^2}$ do równania (4) uzyskujemy równanie

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - \frac{K R^2 w}{A E} + \frac{d u}{d\varphi} - w = 0.$$

Oznaczając przez

$$m = 1 + \frac{K R^2}{A E}$$

dochodzimy do pierwszego równania różniczkowego wyrażonego w odkształceniach

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{d u}{d\varphi} - \frac{d^2 w}{d\varphi^2} - m w = 0. \qquad (5)$$

Z równań (2a) i (2c) uzyskujemy

$$\frac{1}{R}\frac{d M}{d\varphi} - \frac{d N}{d\varphi} = 0$$

skąd po podstawieniu pochodnych związków z układu (3), dochodzimy do drugiego równania różniczkowego w postaci

$$\frac{d^3 w}{d\varphi^3} - n \frac{d w}{d\varphi} + (1 + n) \frac{d^2 u}{d\varphi^2} = 0 \qquad (6)$$

przy czym

$$n = \frac{A R^2}{J}.$$

Dwa równania różniczkowe rzędu trzeciego możemy zastąpić jednym równaniem różniczkowym rzędu szóstego.

W tym celu różniczkujemy równanie (6) i dodajemy je stronami do równania (5)

Otrzymujemy

$$\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + (1 - n) \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + n \frac{d^3 u}{d\varphi^3} - \frac{d u}{d\varphi} + m w = 0 \qquad (7)$$

stąd

$$\frac{d\,u}{d\varphi} = \frac{1}{1+n}\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \frac{1}{1+n}\frac{d^2 w}{d\varphi^2} + m\,w$$

i następnie

$$\frac{d^3 u}{d\varphi^3} = \frac{1}{1+n}\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + \frac{1}{1+n}\frac{d^4 w}{d\varphi^2} + m\frac{d^2 w}{d\varphi^2}.$$

Wówczas z równania (7) uzyskujemy równanie

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + (m\,n + m - n)\frac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0.$$

W celu uproszczenia oznaczmy

$$\omega^2 = m\,n + m - n.$$

Wprowadzając wartości na m i n

$$\omega^2 = 1 + \frac{K\,R^4}{E\,J} + \frac{K\,R^2}{A\,E}. \qquad (8)$$

Ostatecznie równanie różniczkowe rzędu szóstego przybierze postać

$$\frac{d^6 w}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4 w}{d\varphi^4} + \omega^2\frac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0. \qquad (9)$$

W światowej literaturze technicznej zagadnienie pierścienia pracującego w opisanych na wstępie warunkach poruszone jest w artykule Dr G.Oravasa pod tytułem "Beitrag zur Berechnung des Kreisringes auf elastischer Unterlage" ogłoszonym w miesięczniku "Der Bauingenieur" nr 5/1956 r.

Oravas dochodzi jednakże do równania różniczkowego piątego rzędu w postaci

$$\frac{d^5 w}{d\varphi^5} + 2\frac{d^3 w}{d\varphi^3} + \left(1 + \frac{K R^4}{E J}\right)\frac{d w}{d\varphi} = 0. \qquad (10)$$

(Równanie nr 22 na stronie 179 we wskazanym powyżej artykule).

Porównując ze sobą (9) z równaniem (10) widzimy, że różnica między nimi jest znaczna, bowiem równania są różnych rzędów oraz występują odmienne wartości współczynników ω^2.

Różnica ta pochodzi stąd, że w równaniu (10) nie jest uwzględniony wpływ zmiany długości obwodu pierścienia, wywołanej jego obciążeniem.

Gdyby więc siły skupione były rozmieszczone gęsto jedna obok drugiej, to wynikające stąd odkształcenie pierścienia i zwiększenie się jego obwodu nie napotkałoby - w ujęciu Oravasa - na opór ze strony ośrodka sprężystego.

Tak jednak nie jest, gdyż przy powiększaniu się obwodu pierścienia następuje zwiększenie nacisku na strony ośrodka na pierścień co znacznie zmienia charakter jego pracy statycznej.

Na wartościach liczbowych można wykazać, że rozwiązanie podane przez Oravasa jest praktycznie nieużyteczne, gdyż otrzymuje się nadmiernie duże wartości numeryczne wielkości statycznych mających wpływ na wymiarowanie ustroju, dla pierścieni o realnych rozmiarach i obciążeniach.

Występują również i takie przypadki, że zmiana modułu sprężystości materiału pierścienia w granicach miarodajnych dla poszczególnych marek betonu, prowadzi do wartości statycznych wyrażonych wyłącznie w liczbach urojonych.

Niezbędnym okazało się więc uogólnić równanie różniczkowe odkształconej osi pierścienia na przypadek zawierający również istotny wpływ zmiany długości jego obwodu pod obciążeniem, co było przedmiotem niniejszej pracy.

Обобщение дифференциальных уравнений деформаций упругого кольца в линейно упругой среде

В статье выведены дифференциальные уравнения в перемещениях упругого кольца, находящегося в упругой среде, а также указано на неполную разработку этого вопроса ХУ-ом.

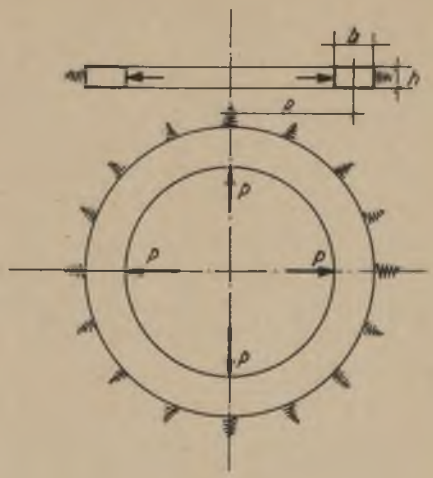
В выведенных уравнениях учтено изменение длины окружности, вызванное нагрузкой собранными и радиально направленными силами.

Generelization of differential equations of elastic ring's strains in a linear medium

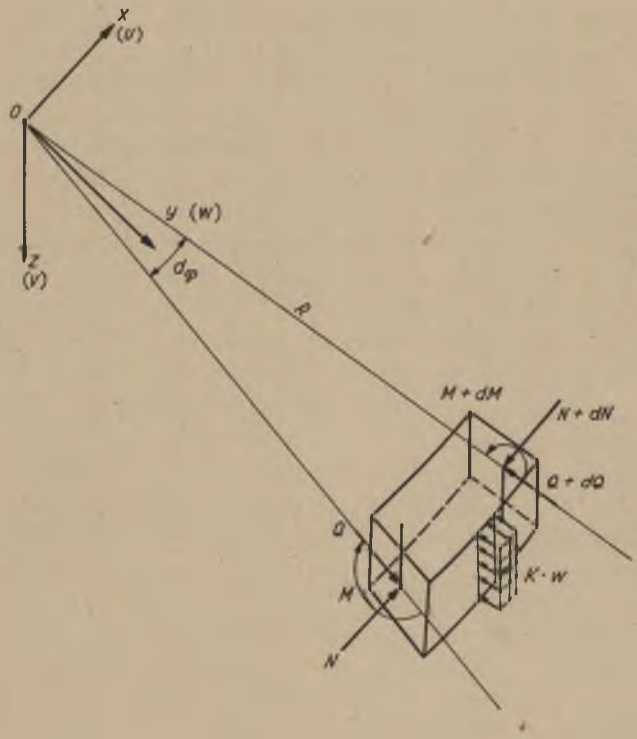
The derivation of differential equations in the elastic ring displacements, being in the elastic medium, has been given in the paper.

The gaps in the elaboration of the problem by xy were indicated, too.

In the derived equations the change of circular circumference, caused by a load of concentrated forces radially directed, was taken into account.



Rys. 1



Rys. 2