ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 29 Budownictwo z.4 1961

ZYGMUNT BOROWIEC

PROJEKTOWANIE BELEK ZESPOLONYCH[1)]

1. WSTĘP

Zagadnienie projektowania belek zespolonych, w których sprężone żebro współpracuje z nadbetonem, nie zostało dotąd w sposób wyczerpujący rozwiązane.

Dotychczas została opracowana [1], [2], [11], [12] metoda projektowania belek zespolonych o nisko położonym styku,[2)] mianowicie desek lub wkładek sprężonych zespolonych z nadbetonem.

Praca belek o nisko położonym styku różni się jednak wyraźnie od pracy belek o wysoko położonym styku,[3)] stanowiących przedmiot analizy niniejszej pracy.

W pierwszym przypadku część sprężona jest wiotka w porównaniu z nadbetonem, zaś w drugim przypadku jest odwrotnie, nadbeton jest wiotki w porównaniu z żebrem sprężonym.

W przypadku desek lub wkładek sprężonych, w nadbetonie mogą powstać rysy, co przy styku wysoko położonym jest niemożliwe.

---

1) Konstrukcje omawiane w niniejszej pracy nie mają ustalonej nomenklatury w języku polskim, np.: Z.Zieliński [11] nazywa je konstrukcjami sprężonymi nadbetonowanymi, natomiast prof. S.Kaufman [8] używa określenie ustrój zespolony, a M.Bieniek [5] żelbetowe konstrukcje zespolone.

2) Styk jest nisko położony, jeśli środek ciężkości przekroju zespolonego C leży powyżej styku.

3) Styk jest wysoko położony, jeśli środek ciężkości przekroju zespolonego C leży poniżej styku.

Obydwa przypadki różnią się sposobem wykonania. Gdy styk jest wysoko położony nie stosuje się rusztowań do podparcia konstrukcji podczas betonowania górnej płyty (nadbetonu) - obciążenie od świeżego betonu i obciążenie robocze przenosi żebro=należy więc rozpatrywać trzy stany pracy belki:

1) stan bezużytkowy, gdy na żebro działa siła sprężająca i ciężar własny żebra,

2) stan roboczy, gdy na żebro działa dodatkowo ciężar świeżego betonu i obciążenie robocze,

3) stan użytkowy, kiedy na żebro nie działa już obciążenie robocze, ale za to na cały przekrój działa obciążenie użytkowe.

W przypadku wiotkich desek lub wkładek sprężonych rusztowanie jest konieczne i stan roboczy nie występuje. Te różnice w pracy belek narzucają odmienne sposoby projektowania.

Praca belek zespolonych o nisko położonym styku podobna jest do pracy belek żelbetowych, dlatego też sposób projektowania ich podobny jest do projektowania belek żelbetowych.

Żebra belek o wysoko położonym styku pracują w stanach "1" i "2" podobnie jak klasyczne belki sprężone, natomiast w stanie "3" na obciążenie użytkowe pracuje cała belka zespolona.

Zagadnienia związane z projektowaniem belek zespolonych w szczególności obliczanie momentów łamiących i rysujących oraz wpływ skurczu i pełzania nadbetonu rozważa Kałasznikow [3].

H.Rühle [13] [14] opublikował wyniki badań nad pracą żelbetowych belek zespolonych i wyciągnął wnioski dla wymiarowania konstrukcji zespolonych.

Wpływ skurczu nadbetonu w konstrukcjach zespolonych omawia również Sattler [4].

W Polsce ukazała się praca Bieńka [5], traktująca o projektowaniu belek zespolonych o wysoko położonym styku w fazie sprężystej i w fazie granicznej, oraz o sposobie obliczenia naprężeń od skurczu i pełzania nadbetonu.

Konstrukcje sprężone nadbetonowane oraz konstrukcje sprężone wkładowe omawia również Z.Zieliński [11].

Autor niniejszej pracy proponuje inny sposób projektowania belek zespolonych o wysoko położonym styku w fazie sprężystej - oparty na przyjęciu trzech stanów pracy belki.

2. OZNACZENIA

Wielkości charakteryzujące przekrój oznaczone indeksem "1" odnoszą się do żebra, wielkości charakteryzujące przekrój oznaczone indeksem "2" odnoszą się do nadbetonu.

Wielkości odnoszące się do całego przekroju zespolonego nie posiadają indeksów.

Ponieważ rozpatruje się pracę belki w fazie sprężystej, współczynnik redukcji przekroju nadbetonu równy jest stosunkowi modułów sprężystości betonu żebra i nadbetonu.

$$n_b = \frac{E_1^{\sigma}}{E_2^{\sigma}} = \frac{E_1^{o}}{E_2^{o}} \qquad (1)$$

E^{σ} - moduł sprężystości dla naprężenia równego "σ".

E^{o} - moduł sprężystości początkowy dla naprężenia równego zeru.

Wzór (1) zakłada proporcjonalny spadek modułów sprężystości w żebrze i w nadbetonie na skutek naprężeń, co w rzeczywistości w przybliżeniu ma miejsce.

S - siła sprężająca,

e - mimośród siły sprężającej,

$\bar{S}$ - moment statyczny, odciętej części przekroju, względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju zespolonego,

$\bar{S}_1$ - moment statyczny, odciętej części przekroju, względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju żebra,

$n_b F_2$ - powierzchnia przekroju nadbetonu,

F_2 - zredukowana powierzchnia przekroju nadbetonu,

F_1 - powierzchnia przekroju żebra,

J_1 - moment bezwładności przekroju żebra względem osi przechodzącej przez środek ciężkości żebra C_1,

v_1 - odległość środka ciężkości żebra od górnego włókna żebra,

v'_1 - odległość środka ciężkości żebra od dolnego włókna żebra,

$W_1 = \frac{J_1}{v_1}$; $W'_1 = \frac{J_1}{v'_1}$ - wskaźniki zginania żebra,

h_1 - wysokość żebra,

h_2 - wysokość nadbetonu,

$n_b b_2$ - szerokość płyty nadbetonu,

b_2 - zredukowana szerokość płyty nadbetonu,

J - moment bezwładności przekroju zespolonego względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju zespolonego C,

v - odległość środka ciężkości przekroju zespolonego od górnego włókna nadbetonu,

v' - odległość środka ciężkości przekroju zespolonego od dolnego włókna żebra,

$s = v-h_2$ - odległość środka ciężkości przekroju zespolonego od styku,

$W_s = \frac{J}{v-h_2}$; $W' = \frac{J}{v'}$; - wskaźniki zginania przekroju zespolonego potrzebne do obliczenia naprężeń w żebrze,

$W = \frac{J}{v}$; - wskaźnik zginania przekroju zespolonego, potrzebny do obliczenia naprężeń w nadbetonie,

M_{g1} - moment zginający od ciężaru własnego żebra,

M_{g2} - moment zginający od ciężaru własnego nadbetonu,

M_q - moment zginający od obciążenia roboczego,

M_p - moment zginający od obciążenia użytkowego,

Q_{g1} - siła poprzeczna od ciężaru własnego żebra,

Q_{g2} - siła poprzeczna od ciężaru własnego nadbetonu,

Q_q - siła poprzeczna od obciążenia roboczego,

Q_p - siła poprzeczna od obciążenia użytkowego.

Naprężenia normalne, rzeczywiście panujące w przekroju oznaczono przez "σ", natomiast naprężenia dopuszczalne przez "k".

Naprężenia normalne ściskające przyjęto za dodatnie (+), naprężenia rozciągające przyjęto jako ujemne (-).

Naprężenia styczne oznaczono przez "τ".

Indeks przy symbolu naprężenia oznacza stan pracy belki, w którym dane naprężenie występuje.

3. STANY PRACY BELKI

3.1. Stan "0"

Jest to stan początkowy. Występuje w żebrze bezpośrednio po sprężeniu.

W dalszych rozważaniach stanu tego nie rozpatruje się, podobnie jak to czyni Guyon [6].

3.2. Stan "1"

W stanie bezużytkowym, podobnie jak w dwóch następnych stanach, występuje siła sprężająca o wartości ustalonej, mniejszej niż w stanie "0" na skutek strat reologicznych. W tym stanie działa na belkę oprócz siły sprężającej także moment zginający od ciężaru własnego żebra.

Naprężenia w żebrze muszą spełnić następujące nierówności:

$$\sigma'_1 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{g1}}{W_1} \geq k'_1 \qquad (2)$$

$$\sigma_1 = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1} - \frac{M_{g1}}{W'_1} \leq k_1 \qquad (3)$$

3.3. Stan "2"

Jest to stan roboczy, występuje wtedy, gdy umocowane do żebra deskowanie wypełnia się świeżym betonem.

Żebro jest obciążone (prócz obciążeń, które występowały już w stanie "i") momentem od obciążenia roboczego i momentem od ciężaru własnego nadbetonu.

W obciążeniu roboczym uwzględnia się: ciężar deskowania, nierównomierne rozprowadzenie betonu bezpośrednio po wylaniu go w deskowanie, obciążenie dynamiczne od betonu spadającego z pewnej wysokości, ciężar robotników i środków transportowych.

Warunki nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w stanie "2" przedstawiają się następująco:

$$\sigma_2 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{g1}}{W_1} + \frac{M_{g2}}{W_1} + \frac{M_q}{W_1} k_2 \qquad (4)$$

$$\sigma_2' = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W_1} - \frac{M_{g1}}{W_1} - \frac{M_{g2}}{W_1} - \frac{M_q}{W_1} k_2 \qquad (5)$$

3.4. Stan "3"

W stanie użytkowym na żebro działa siła sprężająca, moment od ciężaru własnego żebra i nadbetonu, natomiast na moment od ciężaru użytkowego pracuje cały przekrój zespolony.

W stanie użytkowym muszą być spełnione następujące nierówności:

$$\sigma_3 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{g1}}{W_1} + \frac{M_{g2}}{W_1} + \frac{M_p}{W_s} \leq k_3 \qquad (6)$$

$$\sigma_3' = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W_1} - \frac{M_{g1}}{W_1} - \frac{M_{g2}}{W_1} - \frac{M_p}{W} \geq k_3' \qquad (7)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{M_p}{n_b W} \leq \bar{k}_3 \qquad (8)$$

4. OBWIEDNIE GRANICZNE

4.1. Belki o stałej sile sprężającej na długości belki i zmiennym mimośrodzie

Przy wyznaczaniu obwiedni granicznych wprowadzono dodatkowo następujące oznaczenia:

$$\sigma_c = \frac{S}{F_1}; \quad M_I = M_{g1}; \quad M_{II} = M_{g1} + M_{g2} + M_q;$$

$$M_{III} = M_{g1} + M_{g2} + M_p \frac{W_1}{W_s}; \quad M_{III} = M_{g1} + M_{g2} + M \frac{W_1}{p'_W},$$

Rdzenie uogólnione dla stanów "1" i "2" wyznacza się w sposób podobny jak dla klasycznych, niezespolonych belek sprężonych 7; natomiast dla rdzeni w stanie "3" - odpowiedników w klasycznych belkach sprężonych nie ma.

Dolną granicę rdzenia uogólnionego wyznacza się z warunków nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w stanie "1" (por. wzory (2) i (3))

$$\sigma'_1 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_I}{W_1} \geq k'_1 \longrightarrow e \leq \frac{M_I}{S} + \left(1 - \frac{k'_1}{\sigma_c}\right) \frac{W_1}{F_1},$$

$$\sigma_1 = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W_1} - \frac{M_I}{W_1} \leq k_1 \longrightarrow e \leq \frac{M_I}{S} + \left(\frac{k_1}{\sigma_c} - 1\right) \frac{W'_1}{F_1}.$$

Miarodajna jest mniejsza z dwóch wartości rdzenia:

$$r'_{u1} = \begin{cases} \dfrac{W_1}{F_1}\left(1 - \dfrac{k'_1}{\sigma_c}\right), \quad \text{lub} & (9a) \\[2ex] \dfrac{W'_1}{F_1}\left(\dfrac{k_1}{\sigma_c} - 1\right). & (9b) \end{cases}$$

Górną granicę rdzenia uogólnionego wyznacza się z uwagi na naprężenia w stanach "2" i "3". Dla stanu "2" otrzymuje się:

$$\sigma_2 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{II}}{W_1} \leq k_2 \longrightarrow e \geq \frac{M_{II}}{S} - \left(\frac{k_2}{\sigma_c} - 1\right) \frac{W_1}{F_1};$$

$$\sigma'_2 = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1} - \frac{M_{III}}{W'_1} \geq k'_2 \longrightarrow e \geq \frac{M_{II}}{S} - \left(1 - \frac{k'_2}{\sigma_c}\right) \frac{W'_1}{F_1}.$$

W tym przypadku również miarodajna będzie mniejsza z dwóch wartości rdzenia:

$$r_{u2} = \begin{cases} \frac{W_1}{F_1}\left(\frac{k_2}{\sigma_c} - 1\right), \text{ lub} & (10a) \\ \frac{W'_1}{F_1} + 1 - \frac{k'_2}{\sigma_c}). & (10b) \end{cases}$$

Uwaga:

Gdy w stanie "1" wykorzystuje się obydwa naprężenia dopuszczalne, wzory (9a) i (9b) stają się identyczne.

$$\sigma_c = \frac{S}{F_1} = \frac{v_1 k_1 + v'_1 k'_1}{v_1 + v_1}$$

$$r'_{u1} = \frac{W_1}{F_1}\left(1 - \frac{k'_1}{\sigma_c}\right) = \frac{J_1}{v_1 F_1} \frac{k_1 v_1 + v'_1 k'_1 - k'_1 (v_1 + v'_1)}{v_1 k_1 + v'_1 k'_1} =$$

$$= \frac{J_1}{F_1} \frac{k_1 - k'_1}{v_1 k_1 + v'_1 k'_1} \qquad (9c)$$

$$r'_{u1} = \frac{W'_1}{F_1}\left(\frac{k_1}{\sigma_c} - 1\right) = \frac{J_1}{v'_1 f_1}\,\frac{k_1(v_1 + v'_1) - v_1 k_1 - v'_1 k'_1}{v_1 k_1 + v'_1 k'_1} =$$

$$= \frac{J_1}{F_1}\,\frac{k_1 - k'_1}{v_1 k_1 + v'_1 k'_1} \qquad (9c)$$

Podobnie, gdy w stanie "2" wykorzysta się obydwa naprężenia dopuszczalne, wzory (9a) i (9b) przyjmą postać (10c).

$$r_{u2} = \frac{J_1}{F_1}\,\frac{k_2 - k'_2}{v_1 k'_2 + v_1 k'_2} \qquad (10c)$$

Przy wyznaczaniu "r'_{u1}" i "r_{u2}", wiadomo było, że mniejsza wartość rdzenia ogólnionego silniej ogranicza mimośród, gdyż moment pozostał, niezmieniony. W stanie "3" występują dwie różne wartości momentu: M_{III} oraz M_{III}', należy więc rozpatrywać obydwa rdzenie uogólnione.

$$\sigma_3 = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{III}}{W_1} \leqslant k_3 \longrightarrow e \geqslant \frac{M_{III}}{S} - \left(\frac{k_3}{\sigma_c} - 1\right)\frac{W_1}{F_1}$$

$$r_{u3} = \frac{W_1}{F_1}\left(\frac{k_3}{\sigma_c} - 1\right) \qquad (11a)$$

$$\sigma'_3 = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1} - \frac{M_{III}'}{W_1} \geqslant k'_3 \longrightarrow e \geqslant \frac{M_{III}'}{S} - \left(1 - \frac{k'_3}{\sigma_c}\right)\frac{W'_1}{F_1},$$

$$r_{u3}' = \frac{W'_1}{F_1}\left(1 - \frac{k'_3}{\sigma_c}\right) \qquad (11b)$$

Obszar zakreskowany (patrz rys.5), w którym musi się mieścić linia ciśnienia ograniczony jest od góry nie jedną krzywą jak to miało miejsce w belkach sprężonych

niezespolonych, ale trzema krzywymi. W danym przekroju poprzecznym miarodajna jest ta krzywa, która bardziej ogranicza zakreskowany obszar.

4.2. Belki z kablami odginanymi

Dla skrócenia wzorów wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\sigma'_I = -\frac{M_I}{W'_1}; \quad \sigma'_{II} = -\frac{M_{II}}{W'_1}; \quad \sigma'_{III} = -\frac{M_{III}}{W'_1}; \quad \sigma'_w = \frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1};$$

$$\sigma_I = \frac{M_I}{W_1}; \quad \sigma_{II} = \frac{M_{II}}{W_1}; \quad \sigma_{III} = \frac{M_{III}}{W_1}; \quad \sigma_w = \frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1};$$

Warunki nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w żebrze przedstawiają się następująco:

$$\sigma'_w + \sigma'_I \leqslant k_1 \qquad \sigma_w + \sigma_I \geqslant k'_1$$

$$\sigma'_w + \sigma'_{II} \geqslant k'_2 \qquad \sigma_w + \sigma_{II} \leqslant k_2$$

$$\sigma'_w + \sigma'_{III} \geqslant k'_3 \qquad \sigma_w + \sigma_{III} \leqslant k_3$$

Po przekształceniu powyższych nierówności otrzyma się następujące warunki:

$$\frac{k_1 - \sigma'_I}{\sigma'_{wo}} \geqslant \frac{\sigma'_w}{\sigma'_{wo}} \geqslant \begin{cases} \dfrac{k'_2 - \sigma'_{II}}{\sigma'_{wo}} \text{ oraz} \\[2ex] \dfrac{k'_3 - \sigma'_{III}}{\sigma'_{wo}} \end{cases} \tag{12}$$

$$\frac{k_1 - \sigma_I}{\sigma_{wo}} \leq \frac{\sigma_w}{\sigma_{wo}} < \begin{cases} \dfrac{k_2 - \sigma_{II}}{\sigma_{wo}} \text{ oraz} \\ \\ \dfrac{k_3 - \sigma_{III}}{\sigma_{wo}} \end{cases} \tag{13}$$

Nierówności (12) i (13) różnią się swymi prawymi stronami od analogicznych nierówności wyprowadzonych dla klasycznych belek sprężonych [8].

Graficzną interpretacją warunków (12) i (13) będzie zastrzeżenie by "ząbkowane" wykresy funkcji naprężeń od siły sprężającej w skrajnych włóknach żebra mieściły się w zakreskowanych obszarach (patrz rys.6 i 7).

5. REDUKCJA SIŁ POPRZECZNYCH

Na skutek krzywolinijnych tras kabli, występuje pionowa składowa siły sprężającej (V), która redukuje siłę poprzeczną w żebrze belki zespolonej, podobnie jak w klasycznych belkach sprężonych [8].

Funkcje naprężeń stycznych w poszczególnych stanach pracy belki przedstawiają się następująco:

Stan 1 $$\tau_{1(z)} = \frac{(V - Q_{g1})\bar{S}_{1(z)}}{J_1 b(z)} \tag{14}$$

Stan 2 $$\tau_{2(z)} = \frac{(Q_{g1} + Q_{g2} + Q_q - V)\bar{S}_{1(z)}}{J_1 b_{(z)}} \tag{15}$$

Stan 3 $$\tau_{3(z)} = \frac{(Q_{g1} + Q_{g2} - V)\bar{S}_{1(z)}}{J_1 b_{(z)}} \quad \frac{Q_p \bar{S}_{(z)}}{J\ b_{(z)}} \tag{16}$$

W nadbetonie $$\bar{\tau}_{3(z)} = \frac{Q_p \bar{S}_{(z)}}{n_b J\ b_2} \tag{17}$$

Naprężenia ścinające w nadbetonie osiągają swe maksimum w styku.

$$\bar{\tau}_s = \frac{Q_p h_2 (v - \frac{h_2}{2})}{n_b J} \tag{17a}$$

Na podstawie wzoru (17a) można wyznaczyć siłę ścinającą w styku na jednostkę długości belki.

$$T = \bar{\tau}_s \, b_2 n_b = \frac{Q_p F_2 (v - \frac{h_2}{2})}{J} \tag{18}$$

W przypadku, gdy naprężenia styczne maksymalne w stanie "2" są większe od maksymalnych naprężeń stycznych w stanie "3" - minimum naprężeń stycznych wystąpi, kiedy naprężenia styczne w stanie "i" równe będą naprężeniom stycznym w stanie "2". Z tego warunku oblicza się wartość składowej pionowej siły sprężającej oraz przynależną jej funkcję naprężeń stycznych:

$\tau_2^{max} > \tau_3^{max}$

$$V = Q_{g1} + \frac{Q_{g2} + Q_q}{2} \tag{19}$$

$$\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{2}(Q_{g2} + Q_q) \frac{\bar{S}_{1(z)}}{J_1 b_{(z)}} \tag{20}$$

W przypadku, gdy maksymalne naprężenia styczne w stanie "3" są większe od maksymalnych naprężeń stycznych w stanie "2" - minimum naprężeń stycznych wystąpi, kiedy naprężenia styczne w stanie "1" równe będą naprężeniom stycznym w stanie "3". Dla tego przypadku wyrażenia na wartość pionowej składowej siły sprężającej i przynależnej jej funkcji naprężeń stycznych, przyjmą następujące formy:

$\tau_2^{max} < \tau_3^{max}$

$$V = Q_{g1} + \frac{1}{2}(Q_{g2} + \varphi Q_p) \tag{21}$$

$$\varphi = \frac{\bar{S}_{(z)} J_1}{\bar{S}_{1(z)} J} \tag{21a}$$

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{2} \frac{Q_{g2} \bar{S}_{1(z)}}{J_1 b_{(z)}} + \frac{1}{2} \frac{Q_p \bar{S}_{(z)}}{J b_{(z)}} \tag{22}$$

Wartość współczynnika zależy od położenia punktu, w którym oblicza się naprężenia ścinające.

Wartość współczynnika φ należy obliczyć dla punktu, w którym występują największe naprężenia główne rozciągające. Zachodzi to zwykle dla punktu P (por. rys.8).

Wartość współczynnika w punkcie P wynosi φ_p:

$$\varphi_p = \frac{J_1 \bar{S}_p}{J \bar{S}_{1p}} \tag{21b}$$

$\bar{S}p$ - moment statyczny odciętej części przekroju położonej poniżej punktu P, względem osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju zespolonego C,

$\bar{S}_{1p}$ - moment statyczny odciętej części przekroju położonej poniżej punktu P, względem osi przechodzącej przez środek ciężkości żebra C_1.

W powyższych rozważaniach opierano się o wykresy sił poprzecznych w trzech stanach pracy belki, chociaż należało rozpatrywać obwiednie maksymalnych i minimalnych sił poprzecznych.

Sporządzanie jednak obwiedni sił poprzecznych jest na ogół niepotrzebne, gdyż na podporach, gdzie naprężenia ścinające i naprężenia główne rozciągające są najbardziej niebezpieczne obwiednie sił poprzecznych pokrywają się z wykresami sił poprzecznych, natomiast w środku rozpiętości belki, gdzie różnice pomiędzy obwiedniami a wykresami sił poprzecznych są największe - naprężeń ścinających nie bierze się zwykle pod uwagę.

6. DOBÓR PARAMETRÓW SPRĘŻANIA DLA ZADANEGO PRZEKROJU

Sposób wyznaczania siły sprężającej i mimośrodu dla zadanego przekroju oparto na metodzie Magnel'a [9], z tym że za miarodajny przyjęto stan bezużytkowy (1), a nie stan początkowy (0).

Z warunków nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych w żebrze w trzech stanach pracy belki wyprowadzono następujące nierówności:

$$\frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_I}{W_1} \geqslant k_1' \longrightarrow \frac{1}{S} \geqslant \frac{\frac{e}{W_1} - \frac{1}{F_1}}{\frac{M_I}{W_1} - k_1'} \qquad (23)$$

$$\frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W_1'} - \frac{M_I}{W_1'} \leqslant k_1 \longrightarrow \frac{1}{S} \geqslant \frac{\frac{1}{F_1} + \frac{e}{W_1'}}{\frac{M_I}{W_1'} + k_1} \qquad (24)$$

$$\frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{II}}{W_1} \leqslant k_2 \longrightarrow \frac{1}{S} \leqslant \frac{\frac{e}{W_1} - \frac{1}{F_1}}{\frac{M_{II}}{W_1} - k_2} \qquad (25a) \text{ gdy } k_2 < \frac{M_{II}}{W_1}$$

$$\text{lub: } \frac{1}{S} \geqslant \frac{\frac{1}{F_1} - \frac{e}{W_1}}{k_2 - \frac{M_{II}}{W_1}} \qquad (25b) \text{ gdy } k_2 > \frac{M_{II}}{W_1}$$

$$\frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1} \frac{M_{II}}{W'_1} \geqslant k'_2 \longrightarrow \frac{1}{S} \leqslant \frac{\frac{1}{F_1} - \frac{e}{W'_1}}{k'_2 - \frac{M_{II}}{W'_1}} \qquad (26)$$

$$\frac{S}{F_1} - \frac{Se}{W_1} + \frac{M_{III}}{W_1} < k_3 \longrightarrow \frac{1}{S} \leqslant \frac{\frac{e}{W_1} - \frac{1}{F_1}}{\frac{M_{III}}{W_1} - k_3} \qquad (27a) \text{ gdy } k_3 < \frac{M_{III}}{W_1}$$

$$\text{lub} \quad \frac{1}{S} \geqslant \frac{\frac{1}{F_1} - \frac{e}{W_1}}{k_3 - \frac{M_{III}}{W_1}} \qquad (27b) \text{ gdy } k_3 > \frac{M_{III}}{W_1}$$

$$\frac{S}{F_1} + \frac{Se}{W'_1} - \frac{M_{III}'}{W'_1} > k'_3 \longrightarrow \frac{1}{S} \leqslant \frac{\frac{1}{F_1} + \frac{e}{W'_1}}{k'_3 + \frac{M_{III}'}{W'_1}} \qquad (28)$$

Wszystkie warunki: (23), (24), (25a lub 25b), (26), (27a lub 27b), (28) oraz $e \leqslant v'_1 - a'$ spełnione są w obszarach zakreskowanych na rysunkach 9 i 10.

Zasadnicza różnica pomiędzy wykresami powyższymi (rys.9 i 10), a wykresami Magnel'a polega na ilości prostych, które ograniczają obszar wewnątrz którego zawarte punkty (siły sprężające i odpowiadające im mimośrody) spełniają warunki nieprzekroczenia naprężeń w żebrze. Na klasycznych wykresach Magnel'a są cztery proste, natomiast na wykresach dla belek zespolonych jest sześć prostych.

Uwaga:

Ponieważ sprężanie nie wywołuje naprężeń w nadbetonie, zatem nie może być ograniczeń dla parametrów sprężania z uwagi na naprężenia dopuszczalne w nadbetonie.

7. MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA NAPRĘŻEŃ

Należy tu rozróżnić dwa przypadki: pierwszy, gdy rozpiętość belki nie przekracza rozpiętości granicznej oraz drugi, gdy rozpiętość graniczna została przekroczona. Określenie rozpiętości granicznej pozostaje takie same, jak dla klasycznych belek sprężonych [8], z tym że ciężarowi własnemu w klasycznych belkach sprężonych odpowiada ciężar własny żebra w belkach zespolonych, zaś obciążeniu użytkowymu w klasycznych belkach sprężonych - ciężar własny nadbetonu wraz z obciążeniem roboczym lub ciężar własny nadbetonu wraz ze zredukowanym obciążeniem użytkowym (por. wzory na M_{III} i M_{III} na str.8).

7.1. Rozpiętość belki nie przekracza rozpiętości granicznej

Założenia:

1) Nadbeton układany jest nad żebrem, zatem środek ciężkości przekroju zespolonego leży powyżej środka ciężkości żebra,

$$v' > v_1'$$

a środek ciężkości przekroju zespolonego leży powyżej połowy wysokości żebra.

$$v' > s = v - h_2$$

Prawdziwość ostatniej nierówności wykazano na str.72

2) Pomiędzy naprężeniami dopuszczalnymi dla stanów "2" i "3" zachodzi następujący związek:

$$(k_2+k_2') < (k_3+k_3') + \frac{M_g}{W_1}\left(1-\frac{v_1's}{v'v_1}\right)$$

Założenie drugie nie jest silne, zezwala bowiem na znaczne zróżnicowanie naprężeń dopuszczalnych, chociaż do wymiarowania przekroju przyjmuje się je zwykle równe sobie ($k_2=k_3$ $k_2'=k_3'$).

Twierdzenie:

W żebrze można wykorzystać pięć naprężeń dopuszczalnych, ale tylko w dwóch alternatywach:

a) k_1, k_1', k_2, k_2', k_3' lub

b) k_1, k_1', k_2, k_3, k_3'.

Dowód dla alternatywy "a": gdy wykorzystuje się naprężenia k_2 i k_2', to w stanie "3" można wykorzystać tylko naprężenie k_3',

$$\frac{M_p}{W} = \frac{M_q}{W_1}\frac{v_1'}{v_1} + k_2' - k_3'; \quad \frac{M_p}{W_s} = \frac{M_p}{W}\frac{s}{v};$$

$$\sigma_3 = k_2 - \frac{M_q}{W_1} + \frac{s}{v'}\left(\frac{M_q}{W_1}\frac{v_1}{v_1'} + k_2' - k_3'\right) = k_2 + (k_2' - k_3')\frac{s}{v'} - \frac{M_q}{W_1}\left(1 - \frac{v_1's}{v_1v'}\right);$$

Na podstawie założeń 1) i 2) zachodzą związki:

$$\frac{s}{v'} < 1; \quad k_3 > k_2 + (k_2' - k_3') - \frac{M_q}{W_1}\left(1 - \frac{v_1's}{v_1v'}\right),$$

wobec tego zachodzi nierówność:

$$\sigma_3 < k_3 \quad \text{(c.n.u.)}$$

Dowód dla alternatywy "b": gdy wykorzystuje się naprężenia k_3 i k_3', to w stanie "2" można wykorzystać tylko naprężenia k_2.

$$\frac{M_p}{W_s} = \frac{M_q}{W_1} - k_2 + k_3; \quad \frac{M_p}{W'} = \frac{M_p}{W_s}\frac{v'}{s},$$

$$\sigma_2' = k_3' + \frac{M_p}{W'} - \frac{M_q}{W_1}\frac{v_1'}{v_1} = k_3' + (k_3 - k_2)\frac{v'}{s} + \frac{M_p}{W_1}\left(1 - \frac{v_1's}{v_1v'}\right)$$

Ponieważ na podstawie założeń 1) i 2) zachodzą związki:

$$\frac{s}{v'} < 1 \quad \text{oraz} \quad k_2' < k_3' + k_3 - k_2 + \frac{M_g}{W_1}\left(1 - \frac{v_1' s}{v_1 v'}\right);$$

wobec tego można napisać:

$$\sigma_2' > k_2' \qquad (\text{c.n.u.})$$

Uwaga:

Ponieważ we wzorach na σ_3 i σ_2' nie występuje ani σ_1 ani σ_1', więc niewykorzystanie któregoś z naprężeń dopuszczalnych stanu "1" wcale nie umożliwia wykorzystanie naprężeń σ_2' lub σ_3. Naprężenia stanu "1" należy zatem zawsze wykorzystywać.

Nasuwa się jeszcze pytanie, czy prócz piątek wykorzystanych naprężeń: a) k_1, k_1', k_2, k_2', k_3' oraz b) k_1, k_1', k_2, k_3, k_3' nie mogą istnieć inne piątki, mianowicie: c) k_1, k_1', k_3, k_3', k_2', lub d) k_1, k_1', k_2, k_2', k_3'?

Na rys. 12 widać, że zanim zostanie osiągnięte naprężenie k_2' we włóknie dolnym, już wcześniej wystąpi naprężenie k_2 we włóknie górnym, zatem piątka "c" jest niemożliwa do spełnienia. Podobnie na rys. 11 widać, że zanim we włóknie górnym żebra wystąpi naprężenie k_3 już wcześniej wystąpi we włóknie dolnym naprężenia k_3', więc także piątka "d" nie może być spełniona. Piątki "a" i "b" są więc jedynymi, możliwymi do wykorzystania, piątkami naprężeń dopuszczalnych.

Rozważania powyższe są ważne pod warunkiem, że spełnione są założenia geometryczne.

Gdy środek ciężkości żebra leży nie niżej połowy swej wysokości $(v_1 \leq v_1')$, to uwzględniając związki:

$$v_1' < v', \text{ a tym samym } \quad s < v_1$$

otrzymamy wprost nierówności:

$$v' > v_1' > v_1 > s \quad \text{-więc} \quad v' > s \qquad (\text{c.n.u.})$$

Gdy środek ciężkości żebra leży poniżej połowy wysokości żebra ($v_1 > v_1'$), trzeba zrobić jeszcze następujące założenia:

$$\frac{k_3-k_1'}{k_1-k_3} = \eta \leq 1,$$

które zresztą jest zawsze spełnione, gdyż w stanie użytkowym przyjmuje się niższe naprężenia dopuszczalne niż w stanie bezużytkowym.

Z porównania wzorów (6) i (2) oraz (3) i (7) otrzymuje się następujące związki:

$$W_1 = \frac{M_{g2} + M_p \frac{W_1}{W_s}}{k_3-k_1'} \quad (29) \qquad W_1 = \frac{M_{g2} + M_p \frac{W_1}{W}}{k_1 - k_3} \quad (30)$$

Dzieląc stronami równanie (29) przez (30) otrzyma się związek (31):

$$\frac{W_1}{W_1'} = \frac{\frac{M_{g2}}{M_p} + \frac{W_1}{W_s}}{\left(\frac{M_{g2}}{M_p} + \frac{W_1'}{W'}\right)\eta} \quad (31)$$

Po dalszych przekształceniach związek (31) przyjmie postać (31a).

$$\frac{M_{g2}}{M_p}\left(\frac{1}{W_1} - \frac{\eta}{W_1'}\right) = \frac{\eta}{W'} - \frac{1}{W_s'} \quad (31a)$$

Ponieważ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{W_1} > \frac{1}{W_1'}, \quad (\text{bo } v_1 > v_1')$$

zatem lewa strona równania (31a) będzie dodatnia, ale wtedy także prawa strona tegoż równania musi być większa od zera:

$$\frac{\eta}{W'} - \frac{1}{W_s} > 0 \qquad \eta v' > s \qquad v' > s \qquad \text{(c.n.u.)}.$$

7.2. Rozpiętość graniczna jest przekroczona

Gdy rozpiętość belki przekracza rozpiętość graniczną, trzeba zrezygnować z wykorzystania naprężenia k_1', podobnie jak to ma miejsce w klasycznych belkach sprężonych [8]. Niewykorzystanie naprężenia k_1' nie wpływa na wykorzystanie pozostałych naprężeń dopuszczalnych (por. uwagę na str.72), po przekroczeniu rozpiętości granicznej można wykorzystać cztery naprężenia w żebrze i to w dwóch alternatywach:

a) k_1, k_2, k_2', k_3' lub

b) k_1, k_2, k_3, k_3'.

8. WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW KABLOBETONOWYCH

8.1. Rozpiętość nie przekracza rozpiętości granicznej

a) Wykorzystuje się naprężenia: k_1, k_1', k_2, k_2', k_3'. Dane: l, p, q, M_p, M_q, k_1, k_1', k_2, k_2', k_3, k_3', $R_ż$. Należy oszacować wymiary nadbetonu i obliczyć "g_z" oraz "M_{g2}". Z porównania wzorów (2) i (4) oraz (3) i (5) otrzymuje się:

$$W_1 + \frac{M_{g2} + M_q}{k_2 - k_1} \quad (32) \qquad W_1' = \frac{M_{g2} + M_q}{k_1 - k_2} \quad (33)$$

Po przyjęciu "h_1" (np. $h_1 = \frac{l}{20}$ oraz $\varrho = \frac{J_1}{F_1 v_1 v_1'}$ (np. $\varrho = 0{,}5$) (por.[8]) można już obliczyć wszystkie pozostałe wielkości charakteryzujące przekrój:

$$v_1' = \frac{W_1}{W_1' + W_1} h_1; \quad v_1 = h_1 - v_1'; \quad J_1 = W_1 v_1; \quad F_1 = \frac{J_1}{\varrho v_1 v_1'}; \quad g_1 = F_1 \gamma_b \rightarrow M_{g1},$$

Parametry sprężania wyznacza się przy pomocy wykresów (9) i (10), albo bezpośrenio ze wzorów:

$$S = F_1 \sigma_c; \quad \sigma_c = \frac{k_1 v_1 + k_1' v_1'}{h_1}; \qquad e = \frac{1}{S}\left[\frac{J_1}{h_1}(k_1 - k_2) + M_{g1} + (M_{g2} + M_q)\frac{v_1}{h_1}\right] \text{(por.[8])}$$

Jak widać z powyższych wzorów, projektowanie żebra w przypadku "a" nie różni się w swej idei od projektowania klasycznych belek sprężonych.

Nadbeton projektuje się na podstawie wzoru (34), który wyprowadza się ze wzorów: (5) i (7).

$$W' = \frac{M_p}{\frac{M_q}{W_1'} + k_2' - k_3'} \qquad (34) \qquad \text{jeśli } k_2' = k_3' \text{ wtedy } W' = \frac{M_p}{M_q} W_1' \qquad (35)$$

Z warunku równości momentów statycznych żebra i nadbetonu względem środka ciężkości przekroju zespolonego w wynika związek (36a) (por. rys.1)

$$c = v' - v_1' = \frac{F_2}{F_1 + F_2}\left(v_1 + \frac{h_2}{2}\right) = \lambda\left(v_1 + \frac{h_2}{2}\right) \qquad (36a)$$

$$\lambda = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \qquad (36b) \qquad F_2 = F_1 \frac{\lambda}{1-\lambda} \qquad (36c)$$

Jeśli uwzględni się związki (36a) i (36c), można napisać następujący wzór na wskaźnik zginania przekroju zespolonego:

$$W' = \frac{J_1 + F_1 \left(v_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2}{v_1' + \lambda \left(v_1 + \frac{h_2}{h}\right)} \qquad (36d)$$

Po przekształceniu wzoru (36d) otrzymuje się wzór (37).

$$\lambda = \frac{W' v_1' - J_1}{F_1 \left(v_1 + \frac{h_2}{2}\right)^2 + W' \left(v_1 + \frac{h_2}{2}\right)} \qquad (37)$$

Wzory (37) i (36c) pozwalają obliczyć zredukowane pole nadbetonu.

Współczynnik redukcji przekroju nadbetonu, który jednocześnie określa markę nadbetonu (patrz tabela nr 1 na str.29), wynosi:

$$n_b = \frac{g_2}{\gamma_b F_2}$$

g_2 - uprzednio oszacowany ciężar nadbetonu na 1 mb,

F_2 - zredukowane pole nadbetonu, obliczone ze wzorów (37) i (36c),

γ_b - ciężar właściwy nadbetonu.

Jeśli prawidłowo oszacowano ciężar nadbetonu, to współczynnik redukcji winien się zawierać w granicach: od 1,65 do 1,12; w przeciwnym razie trzeba ciężar nadbetonu szacować na nowo, a obliczenie powtórzyć.

Uwaga:

Przy obliczaniu przekroju zespolonego metodą "a" - wstępne założenie odnośnie styku wysoko położonego zostaje zachowane dla $\frac{p}{q} < 1{,}75$, ponieważ dla $p \cong 1{,}75q$

wspólny środek ciężkości przekroju zespolonego znajdzie się w styku, a dla $p > 1{,}75q$ powyżej styku.

$$\frac{h_2}{h_1} \cong 0{,}3 \quad \frac{F_2}{F_1} \cong 2 \quad c = \frac{2}{2+1}(0{,}5h_1 + 0{,}15h_1) \cong 0{,}5h_1 \quad \text{(por. wzór 36a)}$$

$$F_1 \cong 0{,}3^2_1 \qquad J_1 \cong 0{,}04h_1^4$$

$$J \cong J_1 + 0{,}5^2 h_1^2 F_1 + F_2 \cdot 0{,}15^2 h_1^2 \cong 0{,}14\ h_1^4;$$

$$W' \cong \frac{0{,}14h_1^4}{h_1} = 0{,}14h_1^3 \qquad W_1' \cong \frac{0{,}04h_1^4}{0{,}5h_1} = 0{,}08h_1^3$$

$$\frac{p}{q} \cong \frac{W'}{W_1} = \frac{0{,}14h_1^3}{0{,}08h_1^3} = 1{,}75$$

Nadto należy sprawdzić, czy istnieje niebezpieczeństwo przekroczenia naprężeń dopuszczalnych w nadbetonie.

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{M_p}{n_b W} = \frac{M_p v}{n_b W_s s} \quad \bar{k}_3 = \frac{k_3}{m} \quad \text{(por. wzór 8)}$$

$$W_s = W' \frac{w'}{s} \qquad W' = W_1' \frac{M_p}{M_q} \qquad W_s = W_1' \frac{M_p}{M_q} \frac{v'}{s}$$

$$\frac{1}{n_b} \frac{M_q\ s\ v}{W_1' v' s} \leq \frac{k_3}{m} \qquad v = s + h_2 \quad h_2 \leq \frac{n_b k_3 W_1' v'}{m M_q} - s$$

Jeśli uwzględni się związek (33) oraz wprowadzi współczynnik $\alpha = \frac{M_q}{M_q+M_{g2}}$, to wzór na "$h_2$" przyjmie postać następującą:

$$h_2 \leq \frac{n_b k_3 v'}{m(k_1-k_2')} - s \qquad (38)$$

Aby zorietować się co do rzędu "h_2" można założyć następujące wartości czynników we wzorze (38):

$\frac{n_b}{m} = 0,66$ (por. tabelę nr 1) $\alpha = 0,5$

$\frac{k_3}{k_1-k_2'} = 0,8$; $v' = 0,75h_1$; $s = 0,25h_1$

$$h_2 \leq 0,66 \frac{0,8}{0,5} 0,75h_1 - 0,25h_1 = 0,55h_1$$

W belkach o wysoko położonym styku, projektuje się zwykle nadbeton znacznie cieńszy od połowy wysokości żebra, wobec tego naprężenia w nadbetonie będą z reguły niewykorzystane.

b(Wykorzystuje się naprężenia: k_1, k_1', k_2, k_3, k_3'.

Dane jak w przypadku "a".

W tym przypadku również trzeba wstępnie oszacować "g_2" i obliczyć "M_{g2}" oraz $\alpha = \frac{M_p}{M_q+M_{g2}}$, po czym oblicza się wskaźniki zginania:

$W_1 = \frac{M_{g2}+M_q}{k_2-k_1'}$ (32) (por. wzór 32 na str.22)

$$W_s = \frac{M_p}{(k_3-k_2)+\alpha(k_2-k_1')} \qquad (39)$$

Wzór (39) wyprowadza się z porównania wzorów (6), (4) i (2). Pozostałe wskaźniki zginania nie można obliczyć ze wzorów (40) i (41), gdyż wartość "σ_2'" jest nieznana.

$$W_1' = \frac{M_{g2}+M_q}{k_1-\sigma_2'} \tag{40}$$

$$W' = \frac{M_p}{(k_1-k_3')-(1-\alpha)(k_1-\sigma_2')} \tag{41}$$

Wartość powyższych wskaźników zginania może obliczyć przy użyciu współczynników $\varkappa_1 = \frac{v_1}{h_1}$ i $\varkappa = \frac{s}{h_1}$, które wyznacza się z układu równań: (42) i (43b).

Równanie (42) wyprowadza się ze wzorów (40) i (41), po wyrugowaniu σ_2'. Otrzyma się wtedy następujący związek:

$$\frac{v'}{s}\left[(k_3-k_2) + \alpha(k_2-k_1')\right] + \frac{v_1'}{v_1}(1-\alpha)(k_2-k_1') = k_1 - k_3' \tag{41a}$$

Po dokonaniu przekształceń i podstawieniu:

$$A = \frac{(k_3-k_2)+\alpha(k_2-k_1')}{k_1-k_3'} \quad \text{oraz} \quad B = \frac{(1-\alpha)(k_2-k_1')}{k_1-k_3'}$$

związek (41a) przyjmie postać (42):

$$\frac{\varkappa}{\varkappa_1} = \frac{A}{(1+A+B)\varkappa_1 - B} \tag{42}$$

Drugie równanie (43b) otrzymać można z porównania warunku momentów statycznych i równania na moment bezwładności przekroju zespolonego (por. rys.1).

$$F_2\left(s+\frac{h_2}{2}\right) = F_1(v_1-s) \qquad F_2 = F_1\frac{v_1-s}{s+\frac{h_2}{2}} \tag{43a}$$

$$J = J_1 + F_1(v_1-s)^2 + F_1(s+\frac{h_2}{2})(v_1-s)$$

$$J = J_1 + F_1(v_1-s)(v_1+\frac{h_2}{2})$$

$$W\varkappa h_1 = W_1\varkappa_1 h_1 + F_1 h_1^2(\varkappa_1-\varkappa)(\varkappa_1+\frac{h_2}{2h}) \qquad (43b)$$

Porównując wzory (42) i (43b) uzyskuje się następujące równania na $\varkappa_1$ i $\varkappa$:

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_1\left[(\frac{W_1}{h_1F_1}+\frac{h_2}{2h}) - \frac{A+B}{1+A+B}\right] = (\frac{A}{1+A+B})\frac{W}{h_1F_1} +$$

$$+ (\frac{A+B}{1+A+B})\frac{h_2}{2h} \qquad (44)$$

$$\varkappa = \frac{A\,\varkappa_1}{(1+A+B)\varkappa_1-B} \qquad (45)$$

Aby korzystać ze wzoru (44) trzeba z góry przyjąć przekrój żebra "F_1".

Można tego uniknąć zakładając z góry $\varrho = 0{,}5$. Jeśli poza tym przyjmie się $k_2=k_3$ wzór (44) przyjmie postać następującą:

$$\varkappa_1^2 + \varkappa_1\left[(1+\frac{h_2}{h_1}) + \frac{A(\frac{M_p}{M_q}-2)-B}{1+A+B}\right] = \frac{B}{1+A+B}(1+\frac{h_2}{h_1}) +$$

$$+ \frac{A}{1+A+B}(\frac{M_p}{M_q}+\frac{h_2}{h_1}) \qquad (44a)$$

Znając $\varkappa_1$ (wzór 44a) oraz $\varkappa$ (wzór 45) łatwo można już obliczyć pozostałe wartości potrzebne do zwymiarowania przekroju:

$V_1=\varkappa_1 h_1$; $v'_1=h_1-v_1$; $s=\varkappa h_1$; $J_1=W_1v_1$; $W'_1=\frac{J_1}{v'_1}$;

$$J = W_s s; \quad W' = \frac{J}{v'}; \quad F_1 = \frac{J_1}{0{,}5 v'_1 v_1}; \quad g_1 = \gamma_b F_1 - M_{g1},$$

$$S = \frac{k_1 v_1 + k'_1 v'_1}{h_1} F_1; \quad e = \frac{1}{S}\left[\frac{J_1}{h_1}(k_1 - k_2) + M_{g1} + (M_{g2} + M_q)\frac{v_1}{h_1}\right].$$

Parametry sprężania można też wyznaczyć przy pomocy wykresów (9) i (10). Zredukowane pole przekroju nadbetonu równe jest:

$$F_2 = F_1 \frac{v_1 - s}{s + \frac{h_2}{2}} \quad \text{(por. wzór 43a).}$$

Ponieważ ciężar nadbetonu "g_2" został z góry oszacowany współczynnik redukcji nadbetonu można obliczyć z następującego wzoru:

$$n_b = \frac{g_2}{F_2 \gamma_b}.$$

Podobnie jak w metodzie "a" musi być spełniony następujący warunek:

$$1{,}65 \geqslant n_b \geqslant 1{,}12.$$

w przeciwnym wypadku należy ciężar nadbetonu oszacować na nowo i powtórzyć obliczenie.

Wymiarując przekrój sposobem "b" zawsze będzie zachowany warunek wysoko położonego styku, niezależnie od stosunku $\frac{p}{q}$. Na podstawie rys.12 można napisać następującą proporcję:

$$\frac{s}{v'} = \frac{\frac{M_q}{W_1} - k_2 + k_3}{\frac{M_q}{W_1}\frac{v'_1}{v_1} + \sigma'_2 - k'_3}$$

Ponieważ prawa strona tej proporcji jest zawsze większa od zera, więc lewa strona też musi być większa od zera- co równoważne jest z warunkiem styku wysoko położonego.

$$k_2 = k_3; \quad \frac{M_g}{W_1} - k_2 + k_3 > 0; \quad \frac{M_g v'_1}{W_1 v_1} + \sigma'_2 - k'_3 > 0;$$

$$\frac{s}{v'} \quad 0; > s > 0;$$

Niebezpieczeństwo przekroczenia naprężeń dopuszczalnych w nadbetonie jest większe w metodzie "b", aniżeli w metodzie "a", zwłaszcza gdy $\alpha \geqslant 0,5$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{i}{n_b} \frac{M_p(s+h_2)}{W_s \; s} < \bar{k}_3 = \frac{k_3}{\bar{m}} \qquad \text{(por. wzór 8)}$$

$$W_s = \frac{M_p}{k_3 + \alpha(k_2 - k'_1) - k_2} \qquad \text{(por. wzór 39)}$$

$$h_2 \leqslant \left\{ \frac{n_b k_3}{m\left[k_3 - k_2 + \alpha(k_2 - k'_1)\right]} - 1 \right\} s \qquad (46)$$

Jeśli przyjmie się następujące wartości czynników we wzorze (46):

$$k_3 = k_2; \quad \frac{n_b}{m} = 0,66; \quad \frac{k_3}{k_2 - k'_1} = 0,9; \quad s = 0,3h_1;$$

otrzyma się następujące wartości "h_2":

$$\alpha = 0,5 \rightarrow h_2 \leqslant 0,03h_1 \qquad \alpha = 0,4 \rightarrow h_2 \leqslant 0,12h_1$$

Tabela 1

Zestawienie współczynników: $n_b = \frac{E_1}{E_2}$; $m = \frac{R_{w1}}{R_{w2}}$; $\frac{n_b}{m}$;

dla betonu żebra marki R_{w1}=400 i różnych marek nadbetonu R_{w2}.

Marka nadbetonu R_{w2}	n_b	m	$\frac{n_b}{m}$
140	1,65	2,86	0,58
170	1,46	2,35	0,62
200	1,31	2,00	0,66
250	1,19	1,60	0,74
300	1,12	1,33	0,84

8.2. Rozpiętość belki przekracza rozpiętość graniczną

a) Wykorzystuje się naprężenia: k_1, k_2, k_2', k_3'.

W tym przypadku projektuje się żebro tak, jak klasyczną belkę sprężoną według znanych metod [8], natomiast nadbeton dobieramy tak, jak w punkcie 8.1 a), gdy rozpiętość graniczna nie została przekroczona.

Z uwagi na wysokie położenie środka ciężkości żebra, trudniej jest zadośćuczynić założeniu wysoko położonego styku. Konsekwencja tego jest jeszcze silniejsze ograniczenie stosunku $\frac{p}{q}$, aniżeli w przypadku 8.1.a).

Graniczny stosunek obciążenia użytkowego do roboczego, przy którym środek ciężkości przekroju zespolonego znajdzie się w styku, będzie tym mniejszy im większa będzie rozpiętość belki.

b) Wykorzystuje się naprężenia: k_1, k_2, k_3, k_3'.

Aby w tym przypadku można było korzystać ze wzorów podanych w punkcie 8.1 b), należy wyznaczyć naprężenie σ_1', a następnie przyjąć je jako umowne naprężenie dopuszczalne k_1'.

W celu obliczenia rozpiętości granicznej oraz umownego naprężenia dopuszczalnego k - wykorzystano znany w klasycznej teorii belek sprężonych [8] wzór:

$$e - r'_u = \frac{M_g}{S} \tag{47a}$$

Jeśli we wzorze (47a) uwzględni się oznaczenia stosowane w niniejszym artykule - otrzyma się wzór (47b).

$$e - r'_{u1} = \frac{M_{g1}}{S} \tag{47b}$$

Po podstawieniu do wzoru (47b) następujących wyrażeń:

$$e = v'_1 - 0,1h_1; \quad r'_{u1} = \frac{J_1}{F_1}\,\frac{k_1 - k'_1}{v_1k_1+v'_1k'_1} \quad \text{(por. wzór 9c)}$$

$$\frac{J_1}{F_1} = 0,5v_1v'_1; \quad \varkappa_1 = \frac{v_1}{h_1}; \quad S = F_1\,\varkappa_1k_1+(1-\varkappa_1)k'_1;$$

$$M_{g1} = \frac{F_1\,\gamma_b l^2}{8}; \qquad \gamma_b = 2,5\ t/m^3;$$

otrzyma się następujący wzór na umowne naprężenie dopuszczalne k'_1:

$$k'_1 = \frac{\frac{l^2}{h_1} - \varkappa_1k_1(1,28 - 1,6\varkappa_1)}{(1-\varkappa_1)(2,88 - 1,6\varkappa_1)} \tag{48}$$

Wartości $\varkappa_1$ i k_1 otrzymać można z dwóch równań: (44a) i (48). Z uwagi na dość skomplikowaną formę obydwu równań- najlepiej rozwiązać je metodą kolejnych przybliżeń. Metoda ta jednak czasem prowadzi do rozwiązania bardzo wolno; wtedy można posłużyć się wykresem (por. rys. 13).

Jeśli orietujemy się, co do rzędu wartości poszukiwanego rozwiązania, wystarczy obliczyć po dwie wartości

obydwu funkcji $(k'_1(\varkappa_1^a), k'_1(\varkappa_1^b), \varkappa_1(k'_{1I}), \varkappa_1(k'_{1II})$.
Przez obydwie pary punktów prowadzimy proste. Punkt przecięcia obydwu prostych stanowi szukane rozwiązanie. (patrz rys. 14).

Po wyznaczeniu umownego naprężenia dopuszczalnego k'_1, można już dalej liczyć jak w punkcie 8.1.b).

Przekształcając wzór (48), można otrzymać wyrażenie na rozpiętość graniczną:

$$l_{gr} = \sqrt{h_1\left[\varkappa_1 k_1(1{,}28-1{,}6\varkappa_1)+(1-\varkappa_1)k'_1(2{,}88-1{,}6\varkappa_1)\right]} \quad (49)$$

9. WYMIAROWANIE PRZEKROJÓW STRUNOBETONOWYCH

Do projektowania żebra belek zespolonych, sprężonych strunami służą podobne wzory jak w przypadku żeber sprężonych kablami, z tym że zmieni się wartość momentów zginających i wielkości charakteryzujących przekrój.

Wszędzie tam, gdzie występował moment zginający od ciężaru nadbetonu "M_{g2}" - należy podstawić moment od ciężaru całego przekroju zespolonego "$M_g = M_{g1}+M_{g2}$"; dotyczy to wszystkich wzorów na wskaźniki zginania i współczynnik α.

Przy obliczaniu wielkości charakteryzujących przekrój żebra, a także cały przekrój zespolony - należy uwzględnić struny stalowe, podobnie jak to ma miejsce w klasycznych belkach strunobetonowych [8].

Parametry sprężania dobiera się w ten sposób, by wykorzystać naprężenia dopuszczalne w przekroju podporowym, tak jak w klasycznych belkach strunobetonowych [8].

Przy spełnieniu wszystkich powyższych zastrzeżeń można korzystać ze wzorów podanych pod 8.1a), lub 8.1b).

Projektowanie nadbetonu, gdy żebro jest już zaprojektowane, niezależne jest od sposobu sprężania, można zatem bez zastrzeżeń korzystać ze wzorów wyprowadzonych dla belek kablobetonowych.

10. WNIOSKI KOŃCOWE

Belki zespolone są ekonomiczniejsze od belek sprężonych. W belkowych mostach sprężonych nie układa się nawierzchni bezpośrednio na belkach sprężonych, lecz daje się warstwę betonu, na której dopiero układa się nawierzchnię. Tej warstwy betonu nie uwzględniano w obliczeniach statycznych. Jeśli te same belki sprężone zaprojektuje się jako zespolone, traktując wyżej wymienioną warstwę betonu jako nadbeton, uzyska się znaczne oszczędności na: stali, betonie wstępnie sprężonym, a także na ogólnym ciężarze konstrukcji.

W przeliczonych przykładach liczbowych autor uzyskał następujące wyniki:

	(p=3,6t/mb; l=20m)	(p=1,25t/mb; l=50m)
Zysk na sile sprężającej:	14%	12%
Zysk na betonie żebra:	70%	20%
Zysk na ciężarze konstrukcji:	12%	10%

Jak widać zysk na betonie żebra jest szczególnie duży dla silnych obciążeń i stosunkowo niedużych rozpiętości. Zysk ten jest szczególnie ważny z uwagi na to, że żebro trzeba zwykle transportować na miejsce wbudowania.

W przykładach tych obliczono także niekorzystny wpływ skurczu i pełzania nadbetonu sposobem podanym przez Kałasznikowa [3]. Uzyskane w ten sposób dodatkowe naprężenia są nieduże.

W górnym włóknie żebra otrzymano naprężenia rzędu $+15 kg/cm^2$, natomiast we włóknie dolnym $-5 kg/cm^2$. Przekroczenia naprężenia dopuszczalnego we włóknie dolnym można uniknąć zakładając naprężenie k_3 o 5 kg/cm^2 wyższe od przewidzianego w normie.

Dodatkowe naprężenie we włóknie górnym żebra nie jest niebezpieczne dla konstrukcji, gdyż jak wykazały doświadczenia Levi [10], beton ulega w tym miejscu zmiażdżeniu znacznie później niż by to wynikało z wartości odkształcenia, lub naprężenia niszczącego.

Porównanie belek zespolonych z belkami sprężonymi, nad którymi nie daje się betonu jest mniej korzystne dla belek zespolonych niż w wypadku opisanym poprzednio.

Jednak i wtedy stosowanie belek zespolonych jest celowe z uwagi na oszczędność betonu wstępnie sprężonego i stali, chociaż otrzymuje się konstrukcję cięższą od sprężonej z uwagi na nadbeton.

W rozdziale 8 podano dwa sposoby wymiarowania przekroju: "a" i "b". Zachodzi pytanie, który z tych sposobów pozwala ekonomiczniej zaprojektować przekrój?

Na podstawie przeliczonych przykładów stwierdzono, że w przypadkach gdy obciążenie użytkowe jest nieduże ($\frac{p}{q} < 1,5$) lepsze wyniki daje sposób "a", natomiast dla dużych obciążeń użytkowych ($\frac{p}{q} > 1,5$) lepsze wyniki uzyskuje się projektując przekrój sposobem "b".

W przypadkach, gdy $\frac{p}{q} = 1,5$ obydwie metody dają przekroje mniej więcej równowarte pod względem ekonomicznym, jednak w metodzie "a" uzyskujemy mniejszą siłę sprężającą i przekrój żebra, ale za to większy przekrój nadbetonu w porównaniu z metodą "b".

Ta graniczna wartość obciążenia użytkowego, powyżej której przekroje zaprojektowane sposobem "b" są bardziej ekonomiczne od przekrojów zaprojektowanych sposobem "a" zależy od rozpiętości belki; po przekroczeniu rozpiętości granicznej w miarę dalszego wzrostu rozpiętości - graniczna wartość obciążenia użytkowego ulega zmniejszeniu.

We wszystkich rozważaniach traktowano nadbeton jako płytę o przekroju prostokątnym (por. rys.1); jednak ze wzorów wyprowadzonych w tej pracy można korzystać także w przypadku gdy nadbeton ma kształt dowolny (ale symetryczny względem osi pionowej); wtedy "h_2" oznaczyć będzie podwójną odległość środka ciężkości przekroju nadbetonu od skrajnego górnego włókna żebra, a przy sprawdzaniu naprężeń w nadbetonie należy brać pod uwagę faktyczną odległość górnego, skrajnego włókna nadbetonu od środka ciężkości przekroju zespolonego.

Literatura

[1] W.Grzegorzewski: "Żelbetowe konstrukcje w kładkami sprężonymi" - Inż. i bud. nr 10 1953.

[2] T.Kluz: "Zastosowanie wkładek sprężonych strunobetonowych do żelbetowych przepustów i mostów" - Postęp techniczny w budowie mostów - NOT - Warszawa 1954.

[3] N.A.Kałasznikow: "Kombinirowannyj napriażenno-armirowannyj bieton i wozmożnosti jewo primienienia w gorodskich i awtodorożnych mostach" - Moskwa 1952.

[4] K.Sattler: "Theorie der Verbundkonstruktionen - Berlin 1953.

[5] M.Bieniek: "Obliczanie żelbetowych konstrukcji zespolonych" - Archiwum inżynierii lądowej T.IV.z.3 1958.

[6] Y.Guyon: "Béton précontraint" - Paryż 1953 r.

[7] J.Mames i S.Kaufman: "Uogólniony rdzeń przekroju w belce wstępnie sprężonej" - Archiwum inżynierii lądowej T 4 1957.

[8] S.Kaufman: "Mosty sprężone" - Warszawa 1956.

[9] G.Magnel: "Le béton précontraint" - Gandawa 1958r.

[10] F.Levi, G.Pizzetti: "Fluage, Plasticité, Précontrainte" - Paryż 1951 r.

[11] Z.Zieliński: "Prefabrykowane betonowe dźwigary sprężone" - Warszawa 1956 r.

[12] R.Kozak: "Strunobeton" - Warszawa 1954 r.

[13] H.Rühle: "Ergebnisse von Dauerstand und Bruchlastversuchen an schlaff bewehrten Betonverbundbalken" - Bauplanung und Bautechnik Z. 3,5,6, 1957 r.

[14] H.Rühle: "Vorschläge für Bemessung und Konstruktion von Betonverbundkonstruktionen mit schlaffer oder vorgespannter Bewehrung" - Bauplanung und Bautechnik Z.5 i 6 1958 r.

LE CALCUL DES POUTRES COMPOSÉES

R é s u m é

L'article susdit conserne les calcules, dans la phase élastique, des poutres composées avec le joint située en haut.

On a introduit trois phases de travail de la poutre: à vide, sous la charge de service et sous la charge d'usage.

Tous les calculs statiques sont adaptés à ses trois phases.

On a prouvé, q'on peut réaliser seulement cinq de six contraintes limites et que c'est possible seulement dans deux alternatives.

On a donné les formules de dimension de la section transversale de la poutre; aussi bien pour le cas d'une poutre de portée inferieure à la portée critique, que pour le cas d'une poutre de portée supériere à la portée critique.

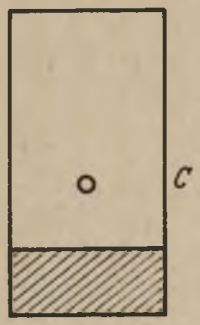
ENTWURF DER VERBUNDTRÄGER

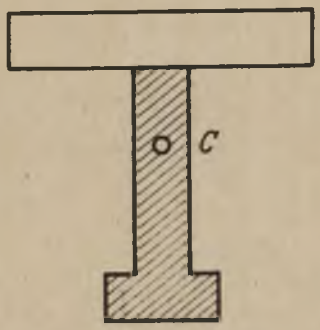
Z u s a m m e n f a s s u n g

Der vorstehender Aufsatz betrifft der Entwurf, in der Elastizitätphase, der Verbundtäger mit hoher Fugenlage.

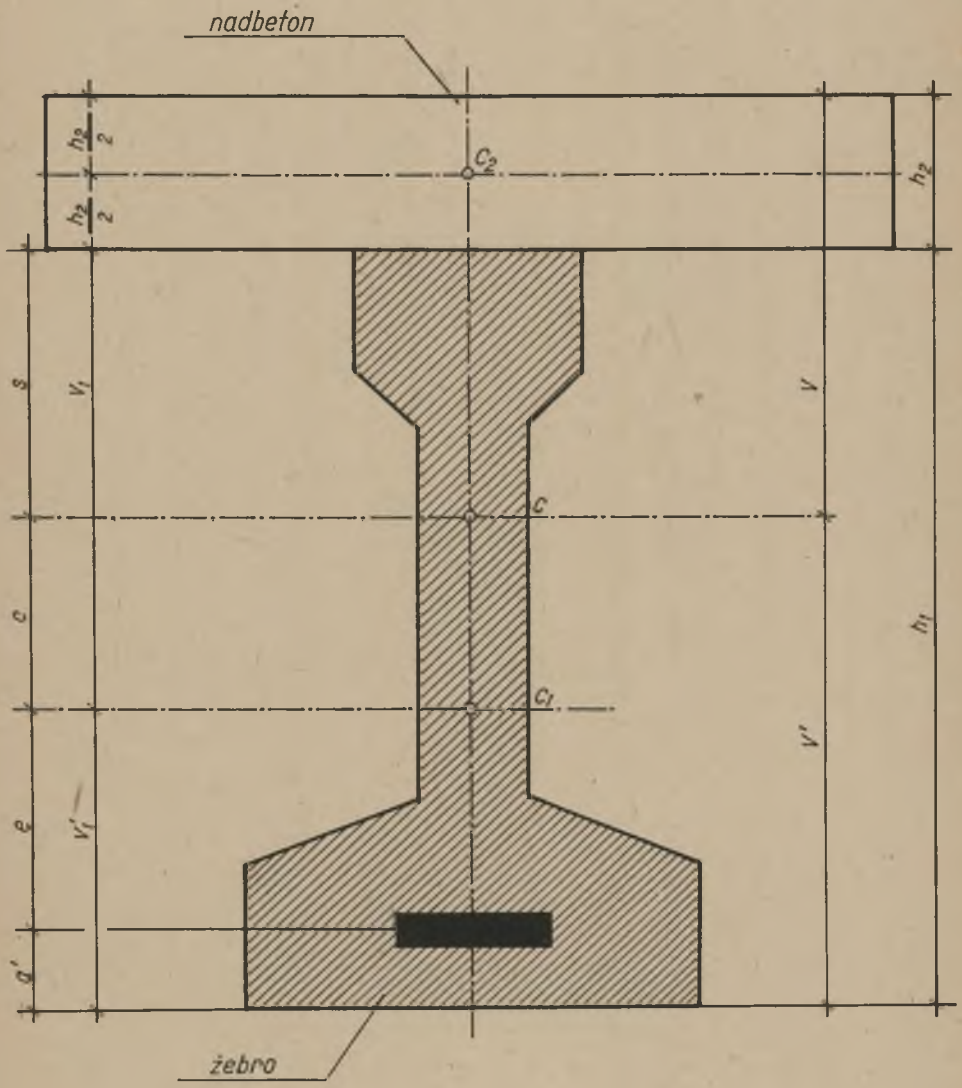
Man führte drei Lastfälle ein: Zustand nach dem Aufbringen der Vorspannung, Zustand mit Arbeitslast und Zustand mit Verkehrslast. Für diese Lastfälle sind die statische Berechnungen angepasst.

Man hat bewiesen, daß es möglich ist nur fünf von sechs zulässigen Spannungen auszunutzen. Das ist nur in zwei Alternativen möglich.



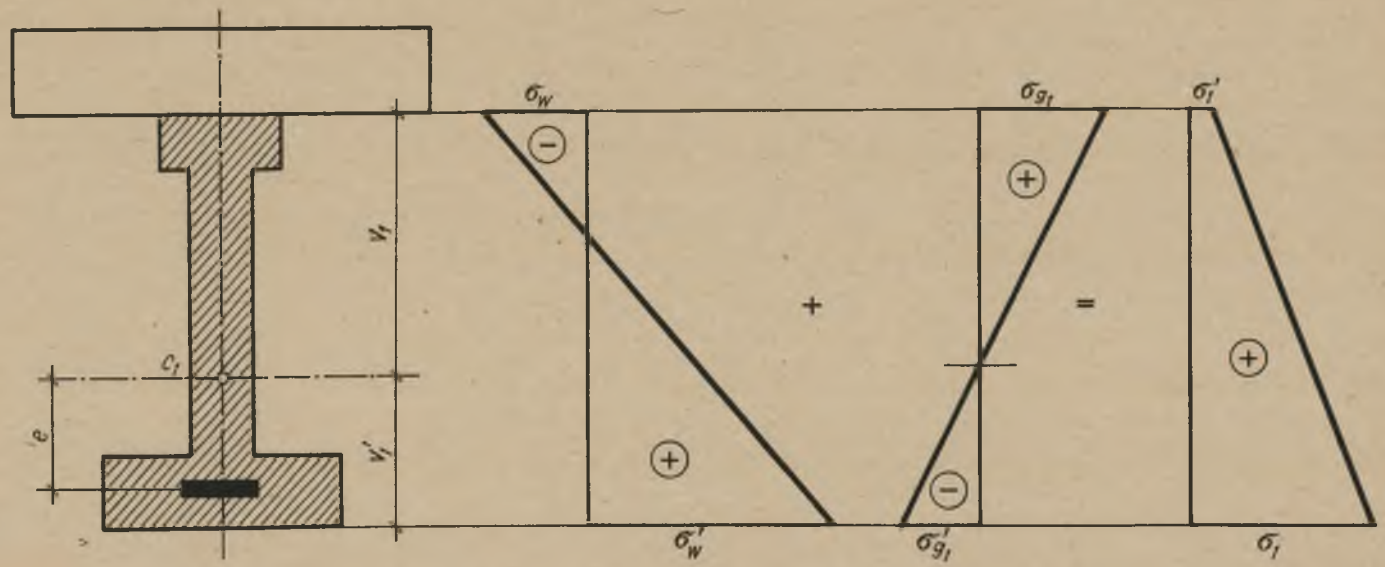


Szkic do odsyłacza 2) i 3) na str.55



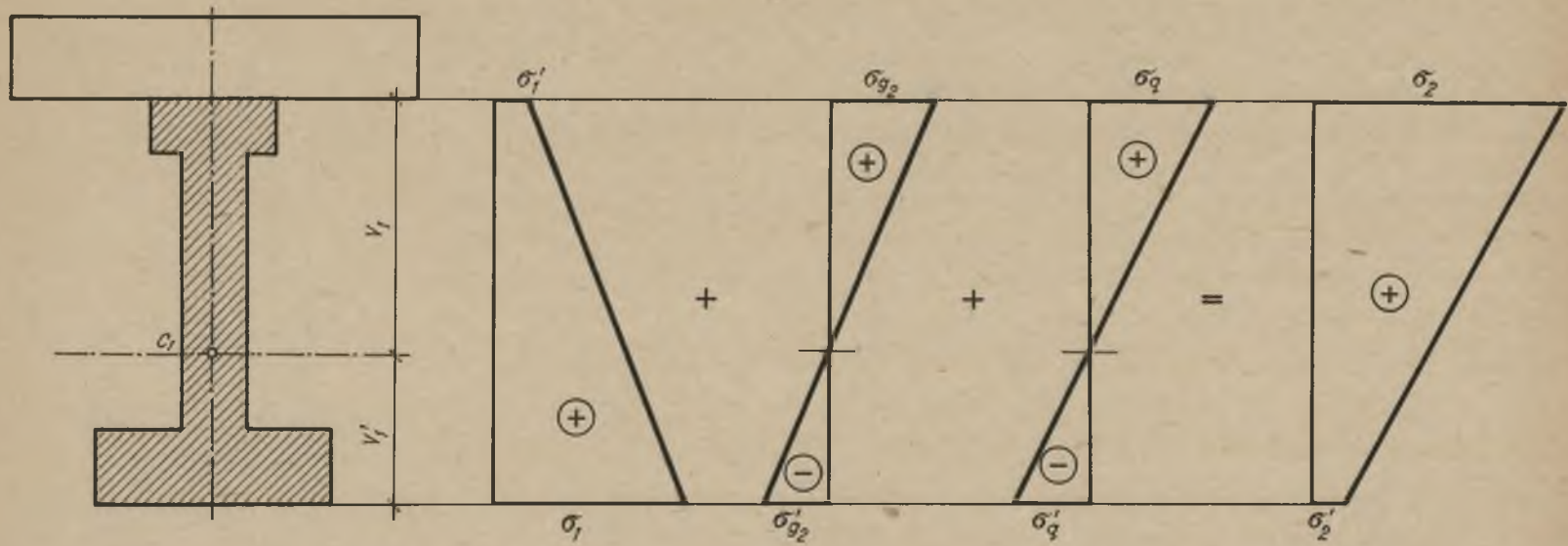
Rys. 1

Naprężenia : od S_1 od M_{g_1}; w stanie 1.



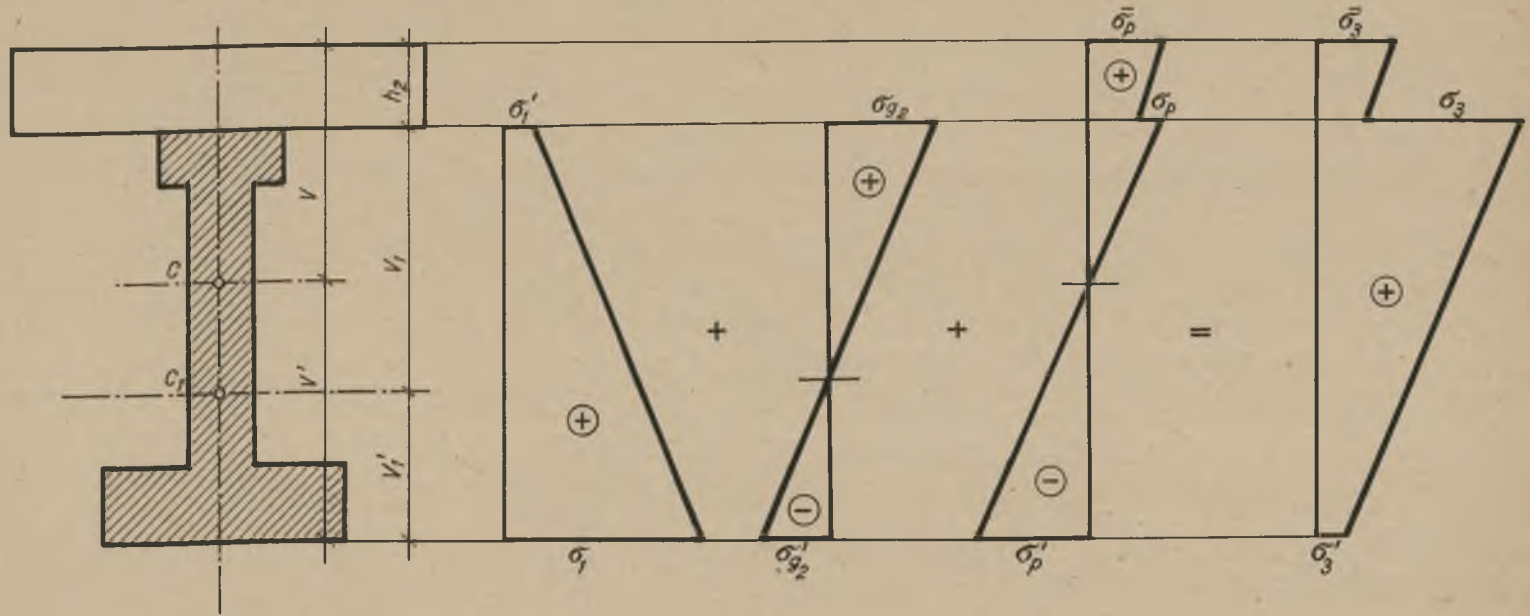
Rys.2

Naprężenia: od stanu 1; od M_{g_2}; od M_q; w stanie 2.

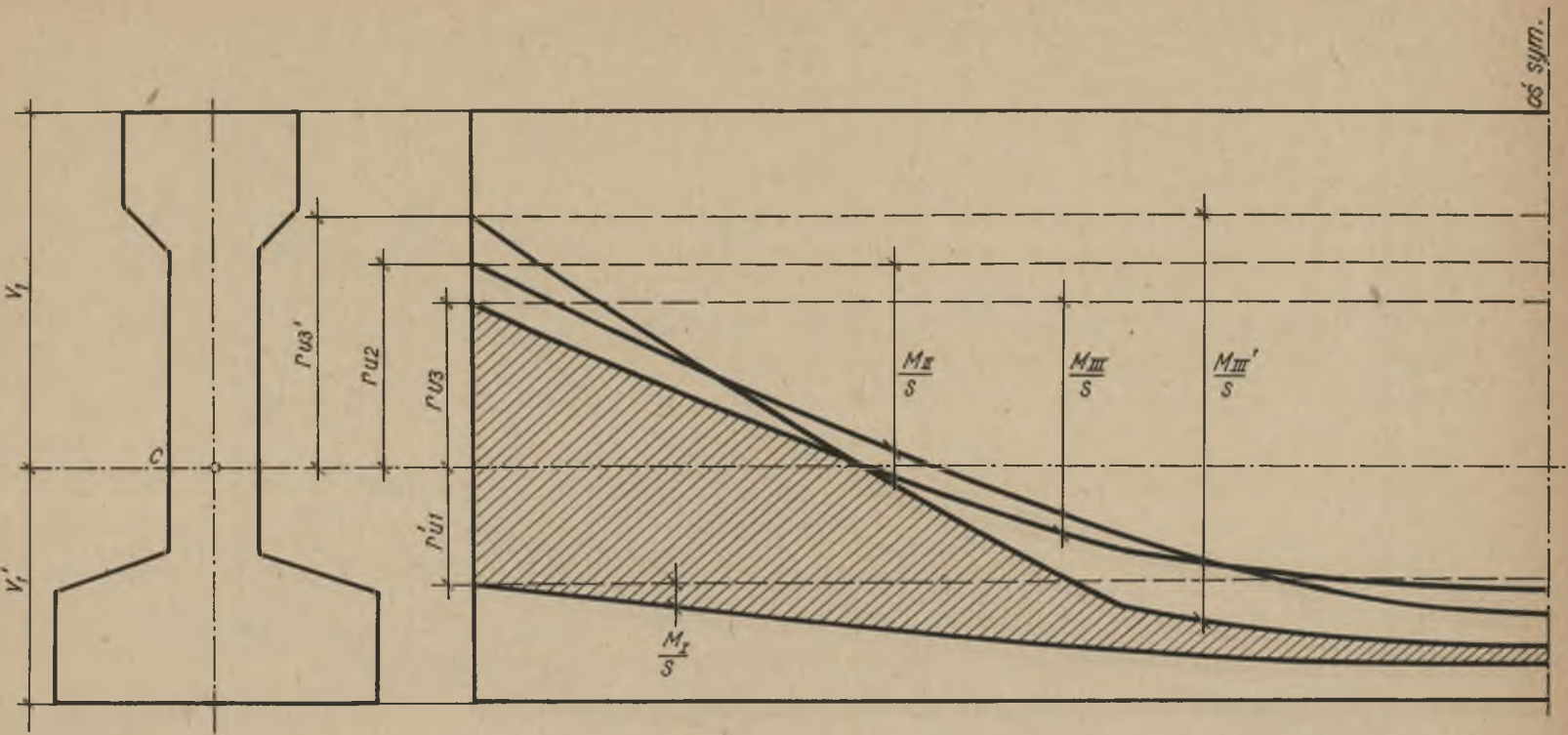


Rys.3

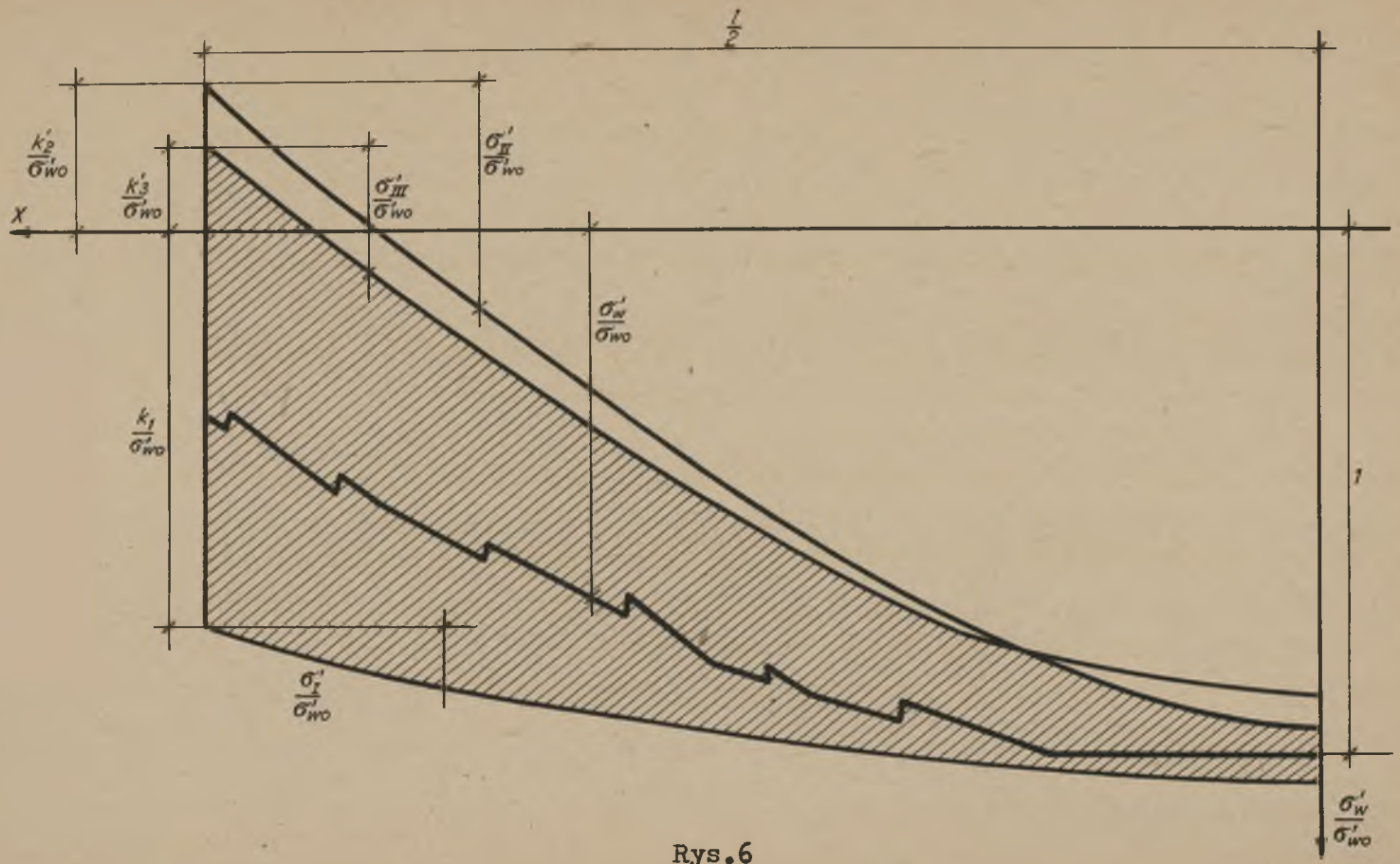
Naprężenia: od stanu 1, od M_{g_2}; od M_p; w stanie 3.



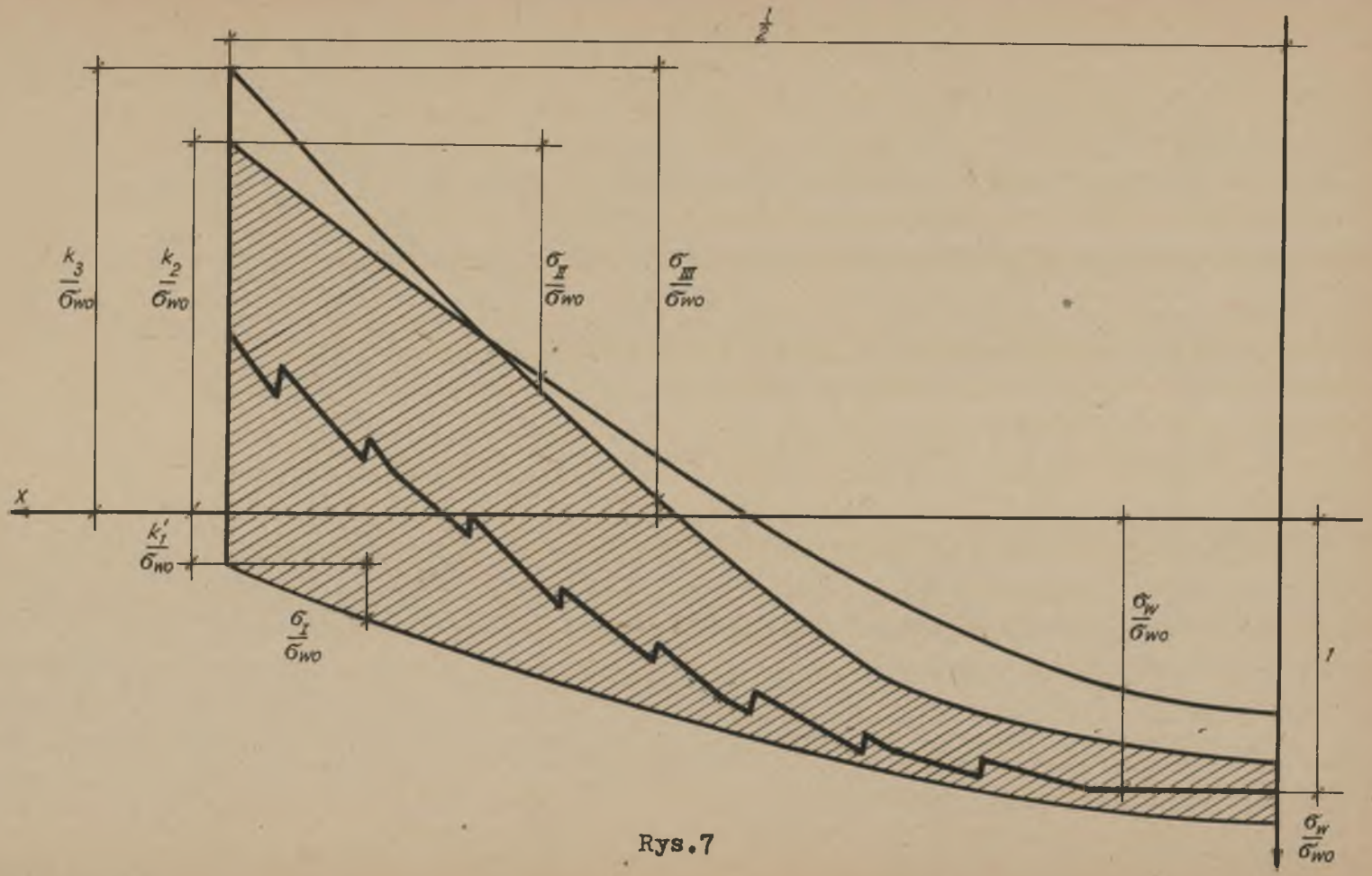
Rys. 4


oś sym.
V_1
V_1'
C
r_{u3}'
r_{u2}
r_{u3}
r_{u1}'
$\frac{M_{II}}{S}$
$\frac{M_{III}}{S}$
$\frac{M_{III}'}{S}$
$\frac{M_I}{S}$

Rys.5

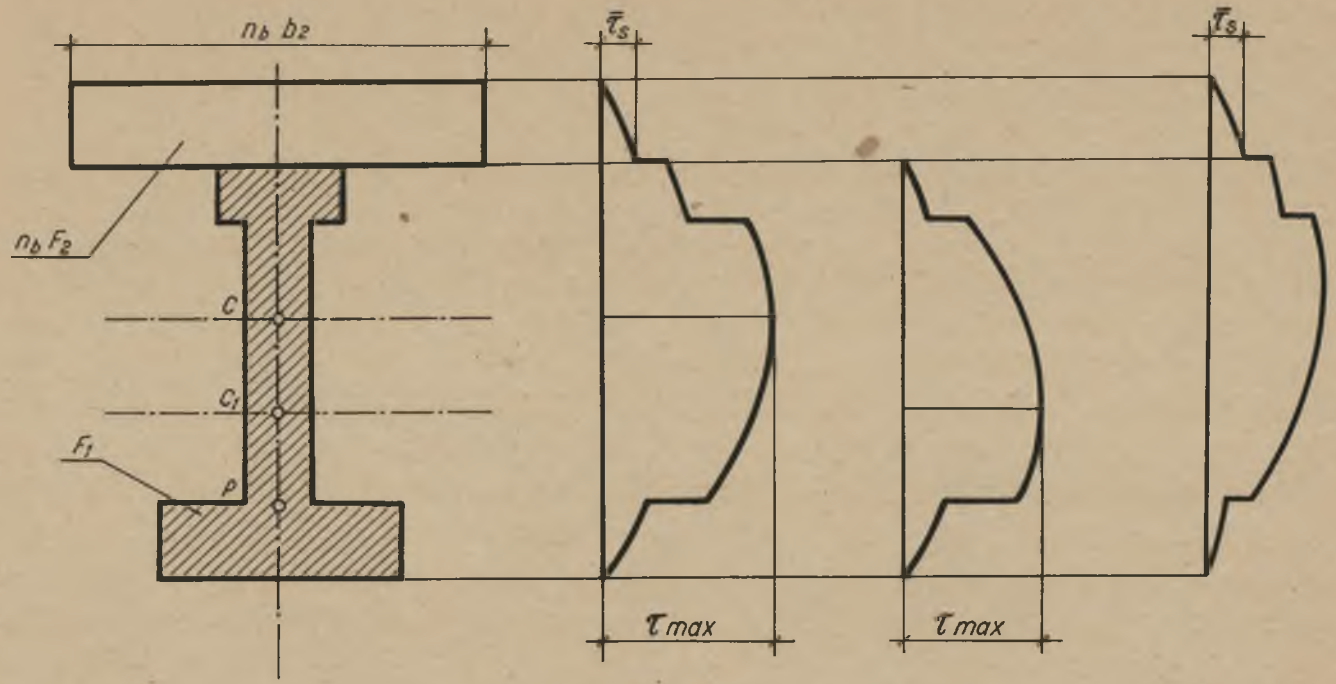

$\frac{l}{2}$
$\frac{k_2'}{\sigma_{wo}'}$
$\frac{k_3'}{\sigma_{wo}'}$
$\frac{\sigma_{III}'}{\sigma_{wo}'}$
$\frac{\sigma_{II}'}{\sigma_{wo}'}$
X
$\frac{\sigma_{IV}'}{\sigma_{wo}'}$
$\frac{k_1}{\sigma_{wo}'}$
1
$\frac{\sigma_I'}{\sigma_{wo}'}$
$\frac{\sigma_w'}{\sigma_{wo}'}$

Rys.6

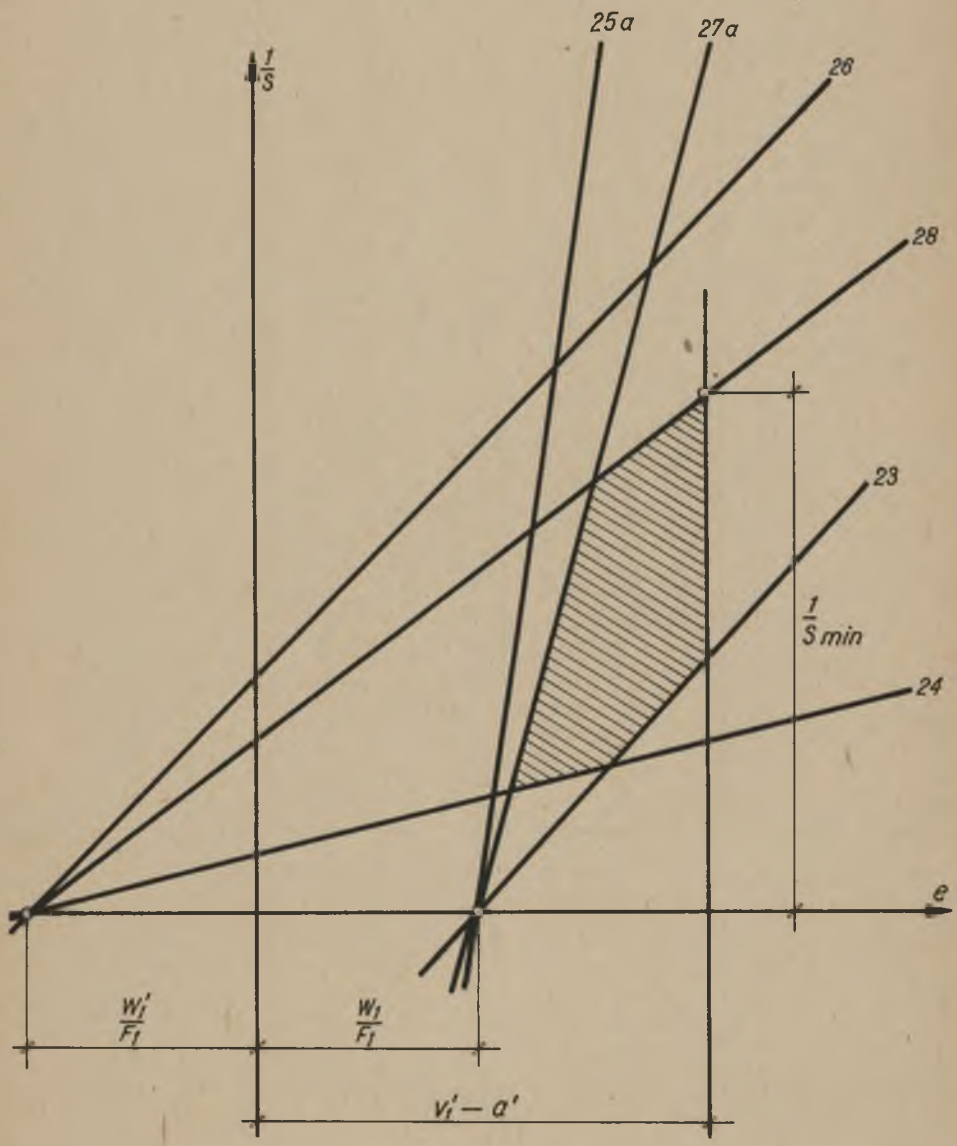

$\frac{l}{2}$
$\frac{k_3}{\sigma_{wo}}$
$\frac{k_2}{\sigma_{wo}}$
$\frac{\sigma_{II}}{\sigma_{wo}}$
$\frac{\sigma_{III}}{\sigma_{wo}}$
x
$\frac{k_1'}{\sigma_{wo}}$
$\frac{\sigma_I}{\sigma_{wo}}$
$\frac{\sigma_{IV}}{\sigma_{wo}}$
1
$\frac{\sigma_V}{\sigma_{wo}}$

Rys.7

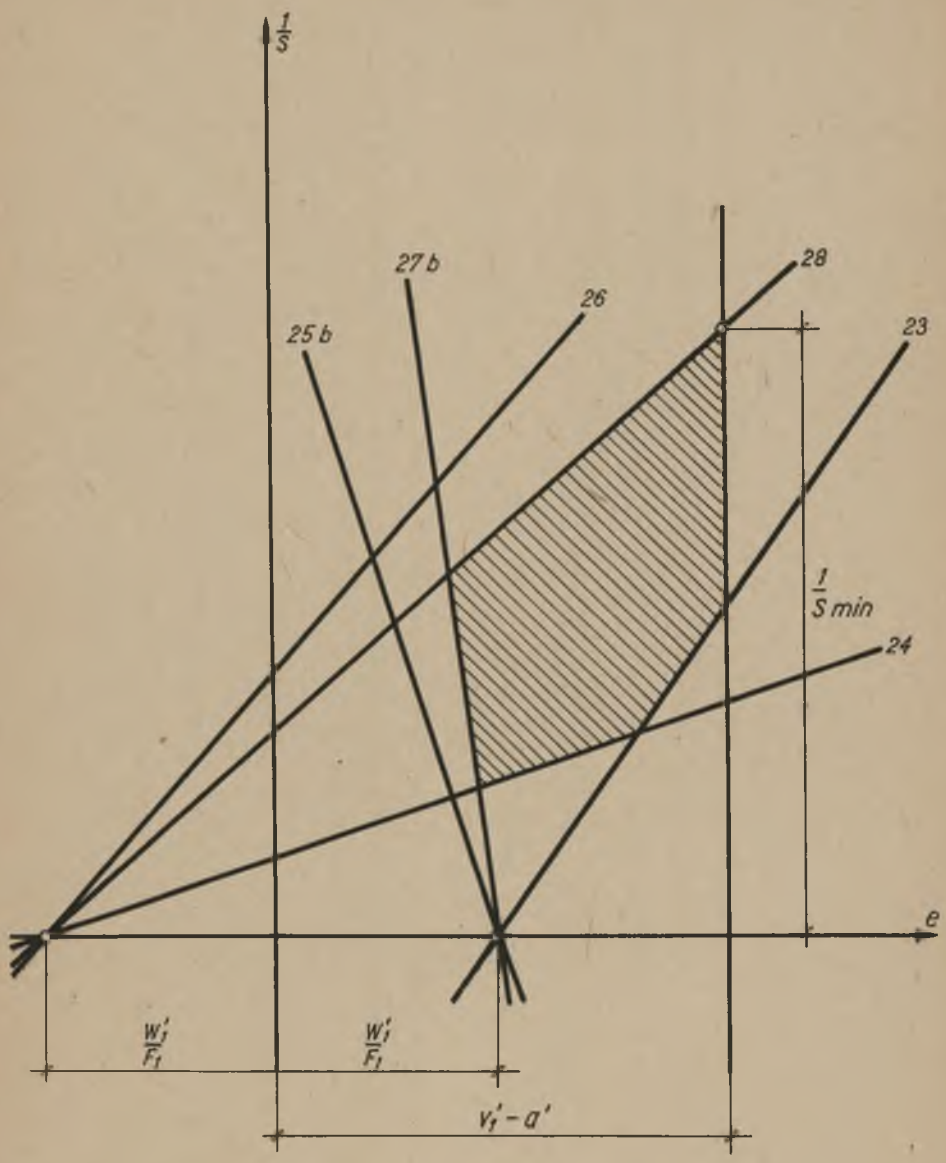
Naprężenia styczne: od Q_p; od Q_g; Q_q, $-V$; w stanie 3.



Rys.8



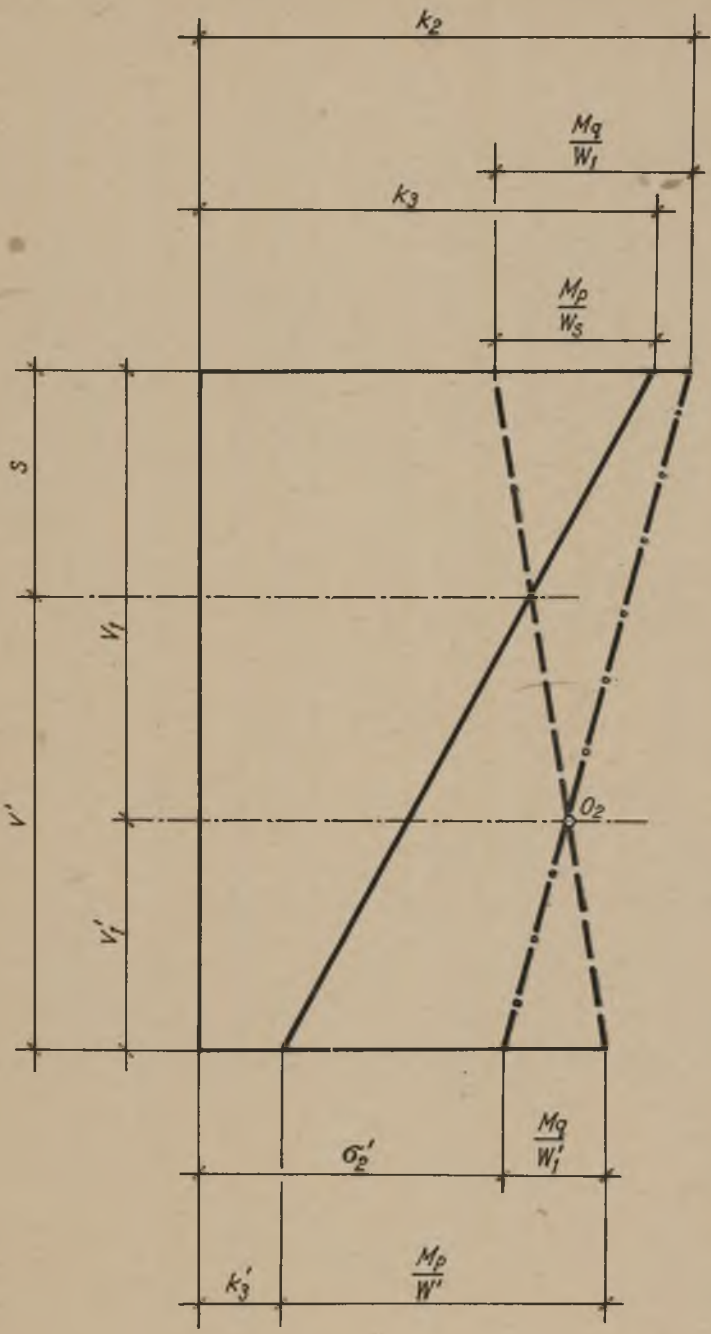
Rys.9



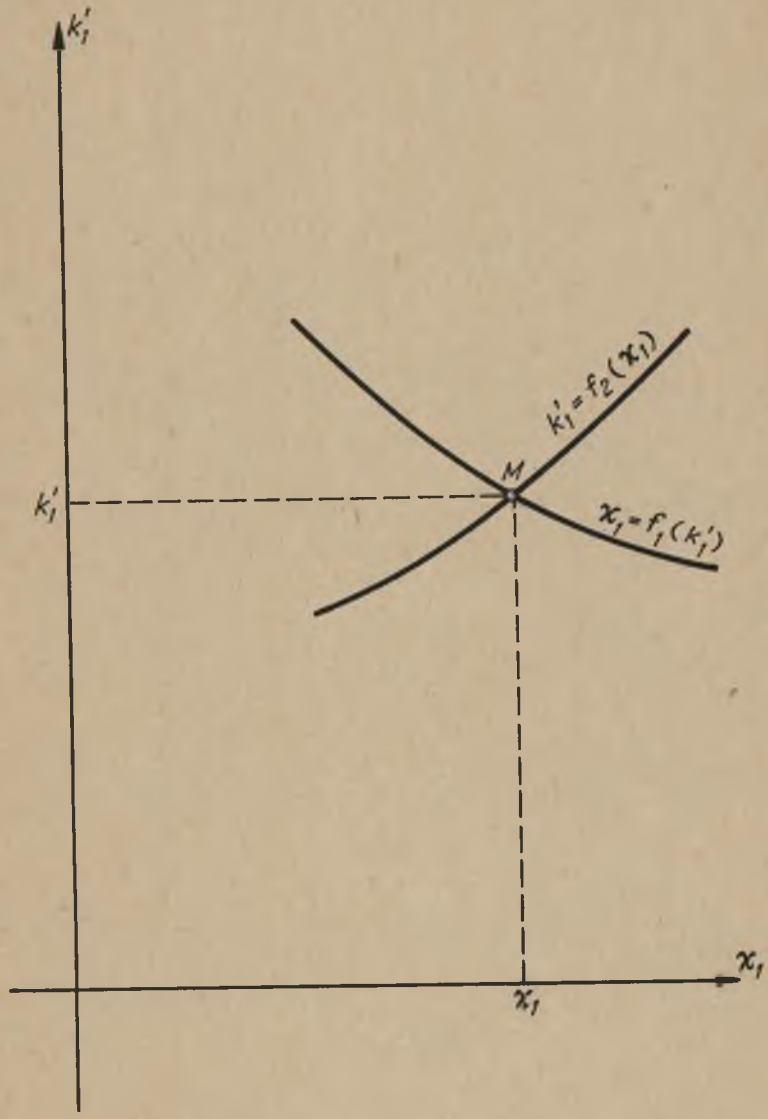
Rys. 10

k_2
σ_3
$\frac{W_q}{W_1}$
$\frac{M_p}{W_s}$
s
O_1
v_1
v'
v_1'
k_3'
$\frac{M_p}{W'}$
k_2'
$\frac{M_q}{W_1'}$

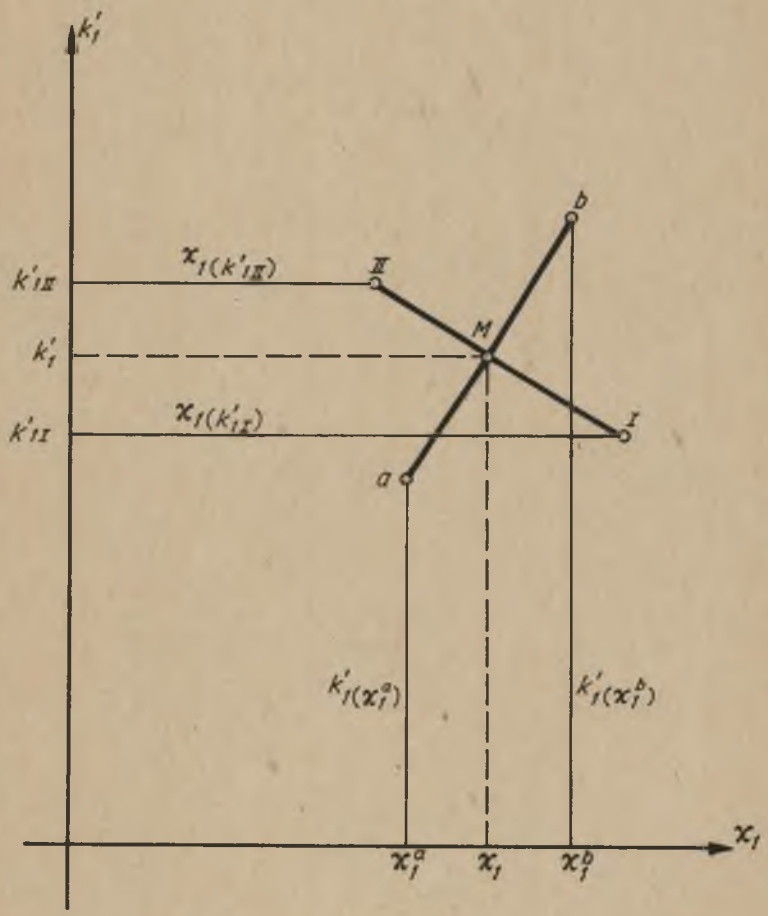
Rys. 11


k_2
$\frac{M_q}{W_1}$
k_3
$\frac{M_p}{W_s}$
s
v_1
v'
O_2
v_1'
$\frac{M_q}{W_1'}$
σ_2'
k_3'
$\frac{M_p}{W'}$

Rys.12



Rys.13



Rys. 14