

JANINA BODASZEWSKA

O NOWYCH ZASADACH REGULACJI ODKSZTAŁCONYCH ŁUKÓW
NA TRASACH KOMUNIKACJI SZYNOWYCH

Streszczenie. Treścią rozprawy jest próba uogólnienia podstawowych równań, stosowanych przy projektowaniu regulacji odkształconych łuków. Klasyczna teoria ich regulacji opiera się na tzw. metodzie ewolwent Nalenza-Hoefera, która operując pojęciem ewolwenty łuku kołowego, bazuje na jego geometrii różniczkowej i drogą prostych rozważań teoretycznych uzyskała cenny układ wzorów podstawowych, niezbędnych dla poprawnego opracowania projektu regulacji. Zakres zastosowania tych wzorów, wyprowadzonych początkowo tylko dla łuku kołowego, obejmuje dziś w praktyce także krzywe przejściowe o liniowo-zmiennej krzywiznie.

Nowsze typy łuków, coraz częściej w praktyce stosowanych, odznaczają się krzywizną nieliniowo-zmienną, nie mogą więc być objęte teorią klasyczną. Fakt powyższy jest niewątpliwie wielkim brakiem tej teorii, utrudniającym osiągnięcie dalszego postępu technicznego w tej dziedzinie. Brak ten jednak można usunąć drogą rozszerzenia podstawowych założeń teorii klasycznej. Próbę takiego rozszerzenia i uogólnienia metody Nalenza-Hoefera podjęto w niniejszej rozprawie, przy pomocy pewnych aksjomatów, zaczerpniętych z geometrii odkształceń pretów zakrzywionych, opisywanej w teorii sprężystości. Wyniki osiągnięte w rozprawie można streścić następująco:

1) W rozdziale 1-ym wyprowadzono zasadnicze wzory teorii Nalenza-Hoefera, przy pomocy w/w metody, umożliwiającej ich uogólnienie na łuki o dowolnie zmiennej krzywiznie.

2) W rozdziale 2-gim podano krótki opis tego uogólnienia, objaśniony przykładami.

3) W rozprawie uwzględniono też długoletnią tradycję rozwojową starej metody, polegającą na zastąpieniu wzorów całkowych, wzorami sumacyjnymi. Nowe wzory sumacyjne wykazały pełną ekwiwalencję wyników całkowania numerycznego z całkowaniem analitycznym.

4) Ubocznym produktem uogólnionej tu teorii jest wzór 2.6.12 określający całkę podwójną dowolnej funkcji regularnej. Wzór ten może mieć dla podwójnego całkowania takiej funkcji podobne znaczenie, jakie dla jej całkowania pojedynczego mają znane wzory Eulera, Gaussa, Lagrange'a wzgl. też innych badaczy.

1. Zasadnicze wzory klasycznej teorii regulacji

1.1. Uwagi wstępne

Ogólny opis metody Nalenza-Hoefera, zawierający jej podstawowe założenia i obrazujący współczesny stan jej rozwoju, jest podany w obszernej literaturze specjalnej i podręcznikowej z tego zakresu. Por. np. pozycje od [2] do [7], wykazu literatury, na końcu rozprawy. Cenne przykłady zastosowań podaje także specjalna instrukcja [1], zawierająca normatywy dla opracowania projektu regulacji odkształconych łuków. Ponieważ ogólny opis metody ewolwent jest bardzo obszerny, przeto nie będziemy go szczegółowo streszczać. Ograniczymy się jedynie do krótkiego omówienia jej zasadniczych osiągnięć. Zaznaczmy w tym celu, że jest to metoda analityczno-wykreslna, opierająca się na wynikach pomiaru strzałki f , wykonanego na całej długości odkształconego łuku, w regularnym odstępnie $L = \lambda$ równym połowie długości cięciwy pomiarowej 2λ . Pomiarom takim muszą być też objęte styczne wylotowe łuku, które również ulegają deformacji. Wyniki pomiaru zestawia się w specjalnych tablicach liczbowych. Sporządza się z nich dwa zasadnicze wykresy a mianowicie wykres sumacji strzałek ($\Sigma f, S$) zwany też wykresem katowym oraz wykres przesunięć (p, s).

Zasadniczą właściwością omawianej tu metody jest oparcie tych wykresów na bazie istniejącej krzywej J , którą uważamy za oś odciętych s , mierzonych od dowolnie na niej obranego punktu początkowego. Położenie nowej krzywej P , projektowanej dla celów regulacji łuku, zostanie wtedy ustalone,

gdy ustalimy przesunięcia p poszczególnych punktów krzywej P , względem starej krzywej J . Metoda ewolwent dysponuje też obszernym zbiorem wzorów, niezbędnych dla opracowania projektu regulacji. Na szczególną uwagę zasługują wzory sumacyjne. Podamy tu własną interpretację tych wzorów, pozwalającą bardzo łatwo wyjaśnić istotne ich znaczenie. Weźmiemy w tym celu pod uwagę:

1.2. Równania geometrii odkształceń sprężystego łuku kołowego

Równania te opisują całkowitą zmianę krzywizny odkształcającego się łuku kołowego za pośrednictwem wzoru

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{d^2 y}{ds^2} \quad (1.2.1)$$

w którym $\frac{1}{\rho} = \text{const}$ jest krzywizną łuku przed odkształceniem, zmienna s jest tu współrzędną łukową. Przesunięcia p odkształconego łuku są w geometrii jego odkształceń oznaczane symbolem y . Wywód rów. (1,2,1) podaje m.in. poz. [8]. Dla celów uogólnienia metody ewolwent wprowadzimy do rów. (1.2.1) nast. podstawienia.

$$\begin{aligned} y &= y_{\rho} - y_R \\ \frac{dy}{ds} &= \frac{dy_{\rho}}{ds} - \frac{dy_R}{ds} \\ \frac{d^2 y}{ds^2} &= \frac{d^2 y_{\rho}}{ds^2} - \frac{d^2 y_R}{ds^2} \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

$$\frac{d^2 y_R}{ds^2} = \frac{1}{R} = \frac{2f_R}{\lambda^2} = \text{const}; \quad f_R = \frac{\lambda^2}{2R}$$

$$\frac{d^2 y_{\rho}}{ds^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{2f}{\lambda^2}$$

które wyjaśniają też w jakim sensie uważamy w metodzie ewolwent strzałkę f (względnie f_R) za miarę krzywizny łuku odkształconego, (wzgl. za miarę krzywizny łuku kołowego o promieniu R). Zaznaczmy tu dodatkowo, że stosowany niekiedy w metodzie ewolwent wykres strzałek (s, f) przedstawiamy zawsze w układzie współrzędnych prostokątnych, o osi odciętych s i osi rzędnych f . Jest to zatem modyfikacja układu współrzędnych naturalnych (s, φ) .

Całkując dwukrotnie czwarte równanie zestawienia (1.2.2) dostaniemy

$$\frac{dy_R}{ds} = \frac{2}{\lambda^2} \int f_R ds = \int \frac{ds}{R} = \frac{s}{R} + C_1 \quad (1.2.3)$$

oraz

$$y_R = \frac{2}{\lambda^2} \iint f_R ds^2 = \frac{s^2}{2R} + C_1 s + C_2 \quad (1.2.4)$$

Obrazem geometrycznym równanie (1.2.3) względnie (1.2.4) będzie odpowiednio pierwsza, względnie druga krzywa całkowa wykresu strzałek $f_R = \text{const.}$

Pierwsza z nich nosi w metodzie ewolwent nazwę wykresu katowego, wyznacza bowiem na mocy znanej relacji

$$\frac{dy_R}{ds} = \text{tg} \varphi$$

kąt φ , jaki styczna do krzywej (1.2.4) tworzy z dodatnim kierunkiem osi S .

Drugiej krzywej całkowej (1.2.4) możemy nadać nazwę wykresu rzędnych.

Z równań powyższych widzimy, że dla łuku kołowego o promieniu R , wykres katowy jest linią prostą, nachyloną do osi odciętych pod stałym kątem φ . Wykres rzędnych zaś jest po prostu obrazem geometrycznym łuku kołowego w układzie (s, f) i przedstawia się tu w postaci paraboli 2-go rzędu, co jest następstwem wyrażenia krzywizny $\frac{1}{R}$ w postaci przybliżonej.

Uwaga

Musimy tu wyraźnie zaznaczyć, że powyższe przybliżenie nie ma żadnego wpływu na wartość strzałki f_R , gdy przy jej obliczaniu posłużymy się równaniem paraboli (1.2.4), zastępującej tu łuk kołowy. Należy tylko pamiętać, że na wykresie (s, f) strzałki muszą mieć kierunek osi rzędnych, gdyż są tam odmierzone w kierunku pionowym, wszystkie bowiem normalne do łuku s muszą być na tym wykresie prostopadłe do osi odciętych s . Ważny ten szczegół pokazany jest dodatkowo na rys.1 za pomocą którego wykonamy tu pokazowe obliczenie strzałki f_R łuku zastępczego y_R , ujęte w następujący, prosty schemat:

$$f_R = DB = y_D - y_B; \quad y_D = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$$

$$y_B = F(s) = \frac{s^2}{2R} + C_1 s + C_2$$

$$y_A = F(s - \lambda); \quad y_C = F(s + \lambda)$$

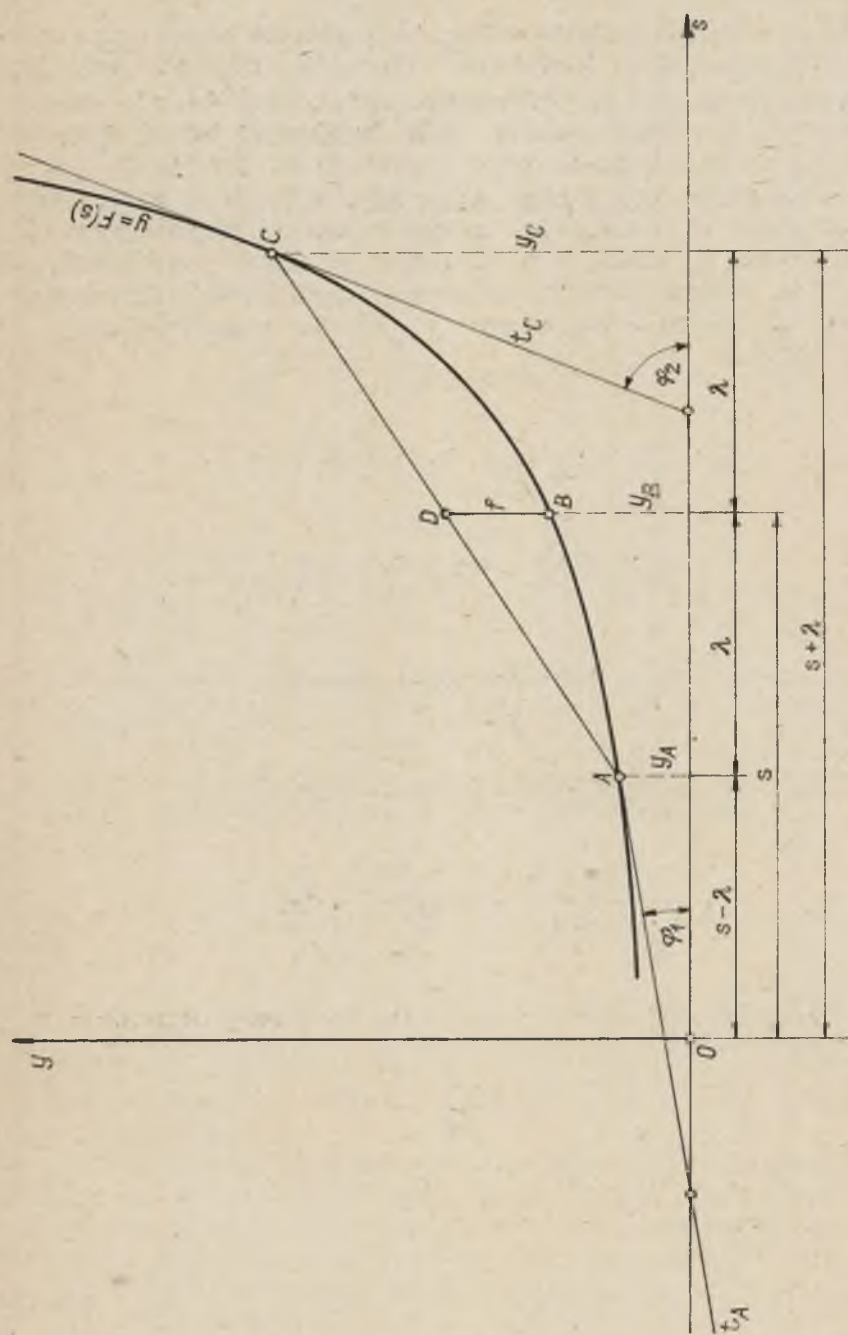
a zatem

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} [F(s - \lambda) + F(s + \lambda)] - F(s) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(s - \lambda)^2}{2R} + \frac{(s + \lambda)^2}{2R} \right] - \frac{s^2}{2R} \end{aligned}$$

Po uproszczeniu powyższego wyrażenia otrzymamy ostatecznie

$$f = \frac{\lambda^2}{2R}$$

co było do okazania.



Rys. 1

Na zakończenie powyższej uwagi zaznaczymy jeszcze, że analogiczny tok obliczania strzałki, w nieco ogólniejszej formie, będzie zastosowany w rozdziale drugim niniejszej rozprawy.

Przystąpimy teraz do dwukrotnego całkowania równania (1.2.2). Traktując tę kwadraturę czysto formalnie moglibyśmy napisać

$$\frac{dy_\rho}{ds} = \frac{2}{\lambda^2} \int f \, ds \quad (1.2.5)$$

oraz

$$y_\rho = \frac{2}{\lambda^2} \iint f \, ds^2 \quad (1.2.6)$$

Ponieważ jednak nie mamy do dyspozycji żadnego równania typu $f = f(s)$, które określałoby w formie analitycznej wyniki pomiaru strzałki odkształconego łuku, przeto obie całki występujące po prawej stronie równań (1.2.5) i (1.2.6) są zastąpione w metodzie ewolwent wzorami sumacyjnymi. Dla wzorów tych zachodzą następujące związki

$$\int f \, ds \approx \sum f_i \lambda = \lambda \sum f_i = F_i \quad (1.2.7)$$

$$\iint f \, ds^2 \approx \sum F_i \lambda = \lambda^2 \sum \sum f_i \quad (1.2.8)$$

Po podstawieniu wartości (1.2.7) wzgl. (1.2.8) w równ. (1.2.5) wzgl. (1.2.6) dostaniemy

$$\frac{dy_\rho}{ds} = \frac{2}{\lambda} \sum f_i \quad (1.2.9)$$

oraz

$$y_\rho = 2 \sum \sum f_i \quad (1.2.10)$$

Otrzymane wyżej równania pozwalają sporządzić wykres katowy i wykres rzędnych odkształconego łuku. W praktyce zastosowań metody ewolwent stosuje się tylko pierwszy z tych wykresów tj. wykres katowy, pozwalający przejść od razu do wykresu przesunięć, bazującym na dwukrotnej sumacji row. (1.2.1) które na mocy podstawień (1.2.2) można wyrazić w postaci

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{2}{\lambda^2} (f - f_R) \quad (1.2.11)$$

Po pierwszej sumacji równania (1.2.11) dostaniemy

$$\frac{dy}{ds} = \sim \frac{2}{\lambda^2} \sum (f - f_R) \lambda = \frac{2}{\lambda} [\sum f - \sum f_R] \quad (1.2.12)$$

a następnie drogą powtórnej sumacji, objaśnionej schematem

$$y = \frac{2}{\lambda} \sum \left[\sum f - \sum f_R \right] \lambda \quad (1.2.13)$$

otrzymujemy dla wykresu poszukiwanych przesunięć y , wzór końcowy

$$y = 2 \sum \sum (f - f_R) = \iint \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) ds^2 \quad (1.2.14)$$

Szczegóły dotyczące samej techniki sumowania, wprowadzonego w powyższych równaniach, są zupełnie takie same jak w metodzie ewolwent, nie ma więc potrzeby ich opisywania.

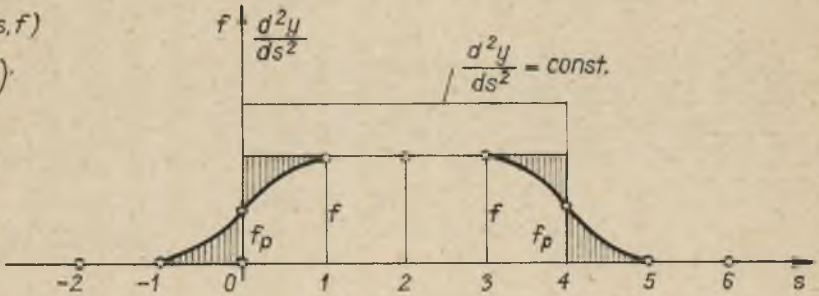
Przebieg stosowanych tam kolejnych sumacji pokazany jest na rys.2, nie wymagającym dodatkowego objaśnienia.

1.3. Aksjomatyka metody ewolwent

Przeniesienie ważności równania (1.2.1) z geometrii odkształceń, sprężystych prętów zakrzywionych na odkształczone łuki kołowe, szynowych tras komunikacyjnych wymaga przy-

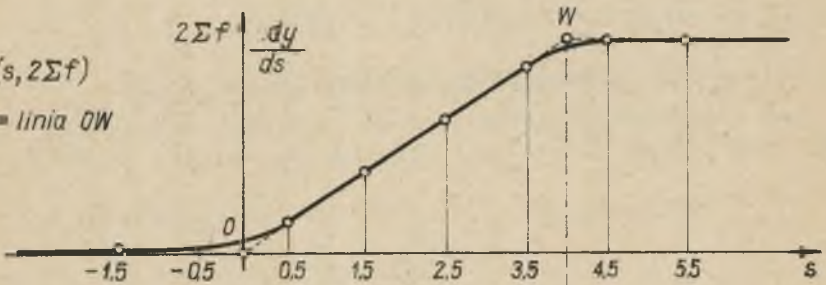
1. Wykres (s, f)

$$i \left(s, \frac{d^2y}{ds^2} \right)$$

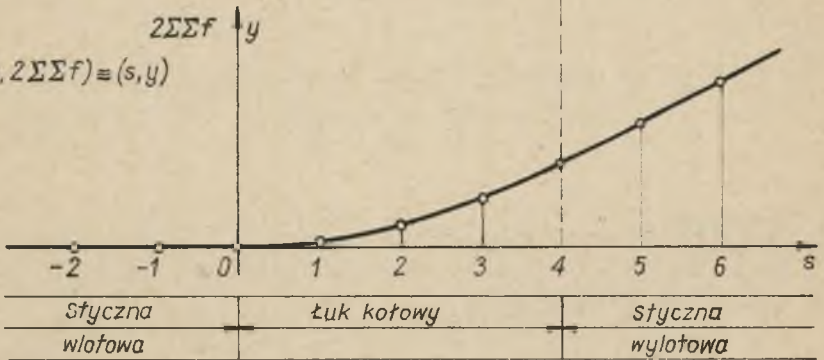


2. Wykres $(s, 2\Sigma f)$

$$i \left(s, \frac{dy}{ds} \right) = \text{linia } OW$$



3. Wykres $(s, 2\Sigma\Sigma f) \equiv (s, y)$



Rys. 2

jęcia dodatkowego aksjomatu. Tak samo - wobec braku dowodu prawdziwości twierdzenia, streszczonego wzorem (1.2.14) - potrzebny jest dodatkowy aksjomat, dopuszczający stosowanie podwójnej sumacji zamiast dwukrotnego całkowania równania (1.2.1).

Zamiast uciążliwego poszukiwania nowych, dodatkowych aksjomatów możemy wprost przyjąć równania (1.2.1) i (1.2.14) za podstawowe aksjomaty teorii regulacji odkształconych łuków kołowych, obejmującej obok naszej własnej metody, opisaney w poz.1.2 również metodę ewolwent. Wykazaliśmy bowiem, że obie te metody prowadzą do tych samych, całkowicie ekwiwalentnych wyników.

2. Zasady uogólnienia metody ewolwent

2.1. Wzory Boussinesqa i Eulera-Bernoulliego

Dla celów uogólnienia metody ewolwent wprowadzimy obecnie obok równania (1.2.1) jeszcze dwa dalsze wzory w postaci

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{M}{EJ} \quad (2.1.1)$$

oraz

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EJ} \quad (2.1.2)$$

Oba te wzory są zaczerpnięte z geometrii odkształceń (por. poz. [8]) przy czym drugi z nich przedstawia uproszczoną postać równania Boussinesqa

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{y}{R^2} = \frac{M}{EJ} \quad (2.1.3)$$

zwaną też niekiedy równaniem Eulera-Bernoulliego. Równanie to jest prawdziwe nie tylko dla łuków kołowych, ale także dla w.in. łuków.

Równania (2.1.1-2) zawierające moment $M = +M(s)$, rozpatrywane w teorii zginania prętów zakrzywionych, pozwolą nam uzyskać statyczną interpretację podanych niżej przekształceń, prowadzących do uogólnienia metody ewolwent. Rozważmy w tym celu sprężysty łuk kołowy, poddany działaniu dwóch zmiennych momentów M_I i M_{II} . Każdy z nich, działając z osobna wywołałby ściśle określoną zmianę krzywizny pręta, którą na mocy równania (2.1.1) i (2.1.2) opiszą wzory

$$\frac{d^2 y_I}{ds^2} = \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{R} = \frac{M_I}{EJ} \quad (2.1.4)$$

$$\frac{d^2 y_{II}}{ds^2} = \frac{1}{\rho_{II}} - \frac{1}{R} = \frac{M_{II}}{EJ} \quad (2.1.5)$$

Gdybyśmy na pręt działali różnicą obu tych momentów

$$M = M_I - M_{II}$$

to wtedy oś łuku pierwotnie kołowego uległaby - zgodnie z zasadą superpozycji - przesunięciu wypadkowemu

$$y = y_I - y_{II}$$

które na mocy (2.1.4) i (2.1.5) wyraziłoby się równaniem różniczkowym

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{\rho_I} - \frac{1}{\rho_{II}} = \frac{M}{EJ} \quad (2.1.6)$$

Zaznaczmy tu wyraźnie, że wszystkie powyższe wzory, w których występują wielkości M_I i M_{II} są najzupełniej niezależne od sposobu przeprowadzenia specjalizacji ich wartości, jeżeli tylko czynią one zadość zasadzie superpozycji przesunięć y . Wobec powyższego możemy układ momentów M_{II} dobrać tak aby krzywizna $\frac{1}{\rho_I}$ odkształconego łuku dała się przedstawić analitycznie w dowolnie obranej postaci regularnej

$$\frac{1}{\rho_{II}} = \frac{1}{r} = \varphi(s) = K_r$$

W takim przypadku krzywizna $\frac{1}{\rho_I}$, którą teraz oznaczymy symbolem

$$\frac{1}{\rho_I} = \varphi$$

może być tutaj uważana za obraz geometryczny tych wszystkich zmian jakim łuk o zmiennej krzywiznie $\frac{1}{r}$ uległ w terenie, wskutek działania sił odkształcających.

W związku z wprowadzeniem zastosowanych powyżej podstawień, możemy otrzymane poprzednio równanie (2.1.6) wyrazić teraz w następującej formie ostatecznej

$$\boxed{\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}} \quad (2.1.7)$$

2.2. Aksjomatyka teorii uogólnionej

a) Aksjomat pierwszy. Przeniesienie ważności równania (2.1.7) z teorii sprężystych prętów zakrzywionych na odkształcone łuki tras komunikacyjnych o zmiennej krzywiznie - wymaga przyjęcia dodatkowego aksjomatu.

W podjętej tu próbie uogólnienia metody ewolwent, pójdziemy tą samą drogą, którą obraliśmy już poprzednio w poz. 1.3. tzn. przyjmujemy od razu wzór (2.1.7) za pierwszy aksjomat poszukiwanego przez nas uogólnienia.

b) Aksjomat drugi. Idąc konsekwentnie opisaną wyżej drogą możemy tu od razu zaznaczyć, że w zupełnej analogii do wzoru (1.2.14) przyjmujemy drugi aksjomat naszej próby uogólnienia metody ewolwent w postaci

$$y = 2 \sum \sum (f - f_r) = \iint \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) ds^2 \quad (2.2.1)$$

Aksjomat ten zawiera następujące twierdzenie: rzędne przesunięcia y przy odkształceniu łuków o nieliniowo zmiennej krzywiznie można obliczyć zupełnie tak samo jak w metodzie ewolwent tj. drogą dwukrotnej sumacji różnic, między pomierzoną strzałką f łuku odkształconego a liczbową wartością strzałki f_r łuku regularnego, obliczoną wzorem analitycznym

$$f_r = f_r(s) \quad (2.2.2)$$

Wyznaczeniem wartości f_r w postaci (2.2.2) zajmiemy się w następnej pozycji zaś omówieniem słuszności aksjomatu (2.2.1) zajmiemy się w pozycji 2.5.

2.3. Strzałka łuku o zmiennej krzywiznie

Weźmy pod uwagę jednorodny łuk regularny A-B-C pokazany na rys.1, którym posłużyliśmy się już w poz.1.2 dla wyznaczenia strzałki łuku kołowego. Obecnie założymy, że rys.1 jest obrazem łuku o nieliniowo zmiennej krzywiznie. Równanie tego łuku napiszemy w postaci $y = F(s)$. Dla określenia strzałki f_r tego łuku w punkcie B, określonym odciętą $s = s_B$ potrzebna nam będzie znajomość czterech rzędnych y_A, y_B, y_C oraz y_D tego łuku, jest bowiem (rys.1):

$$f_r = y_D - y_B \quad (2.3.1)$$

Ponieważ

$$s_A = s - \lambda; \quad s_B = s_D = s; \quad s_C = s + \lambda$$

przeto będzie

$$y_A = F(s-\lambda); \quad y_B = F(s); \quad y_C = F(s+\lambda); \quad y_D = \frac{1}{2}(y_A + y_C)$$

Aby obliczyć rzędne y_A oraz y_C założymy, że funkcja $F(s)$ jest ciągle-pochodna i rozwijalna na szereg Taylora. Stosując wzór Taylora na przyrost funkcji $F(s)$ dostaniemy następujący związek

$$F(s+h) = F(s) + hF'(s) + \frac{h^2}{2!} F''(s) + \dots + \frac{h^n}{n!} F^{(n)}(s) + \dots \quad (2.3.2)$$

skąd dla $h = \lambda$ dostaniemy

$$F(s+\lambda) = F(s) + \lambda F'(s) + \frac{\lambda^2}{2!} F''(s) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} F^{(n)}(s) + \dots \quad (2.3.3)$$

Podobnie, podstawiając w równaniu (2.3.2) $h = -\lambda$ otrzymamy

$$F(s-\lambda) = F(s) - \lambda F'(s) + \frac{\lambda^2}{2!} F''(s) + \dots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} F^{(n)}(s) + \dots \quad (2.3.4)$$

Średnia arytmetyczna $\frac{1}{2}(y_A + y_C)$ określa rzędną y_D . Będzie więc po łatwym obliczeniu

$$y_D = F(s) + \frac{\lambda^2}{2!} F''(s) + \frac{\lambda^4}{4!} F^{IV}(s) + \dots + \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} F^{(2r)}(s) + \dots \quad (2.3.5)$$

Na mocy (2.3.1) dostaniemy w punkcie B tj. dla $y_B = F(s)$ strzałkę

$$f = f_r = \frac{\lambda^2}{2!} F''(s) + \frac{\lambda^4}{4!} F^{IV}(s) + \dots + \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} F^{(2r)}(s) + \dots \quad (2.3.6)$$

Wzór ten służyć będzie w uogólnionej przez nas teorii do sporządzania wykresu strzałek łuku o regularnie zmiennej krzywiznie oraz do wykonania ich podwójnej sumacji, objętej wzorem (2.2.1).

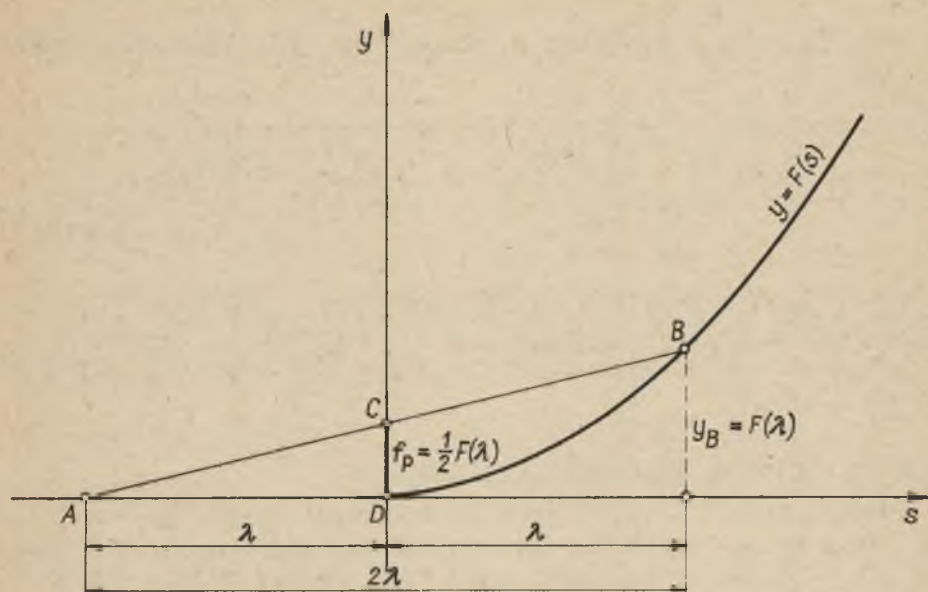
2.4. Strzałka krzywizny pozornej

Ważność wzoru (2.3.6) jest ograniczona warunkiem, wymagającym aby oba końce cięciwy pomiarowej A-B, leżały na łuku $y = F(s)$. Pomiarom strzałki muszą być jednak objęte także obie styczne wylotowe tego łuku, wskutek czego na obu jego końcach gdzie krzywizna łuku $\frac{1}{r} = 0$ pojawi się jakaś strzałka f_p , którą tu nazwiemy strzałką krzywizny pozornej. Strzałkę tę wyznacza się zupełnie tak samo jak w poz.2.2 i dlatego pominiemy tu wywód wzorów, określających jej wartość, ograniczając się jedynie do przedstawienia końcowego wyniku tych obliczeń. Będzie mianowicie w punkcie początkowym D łuku (rys.3)

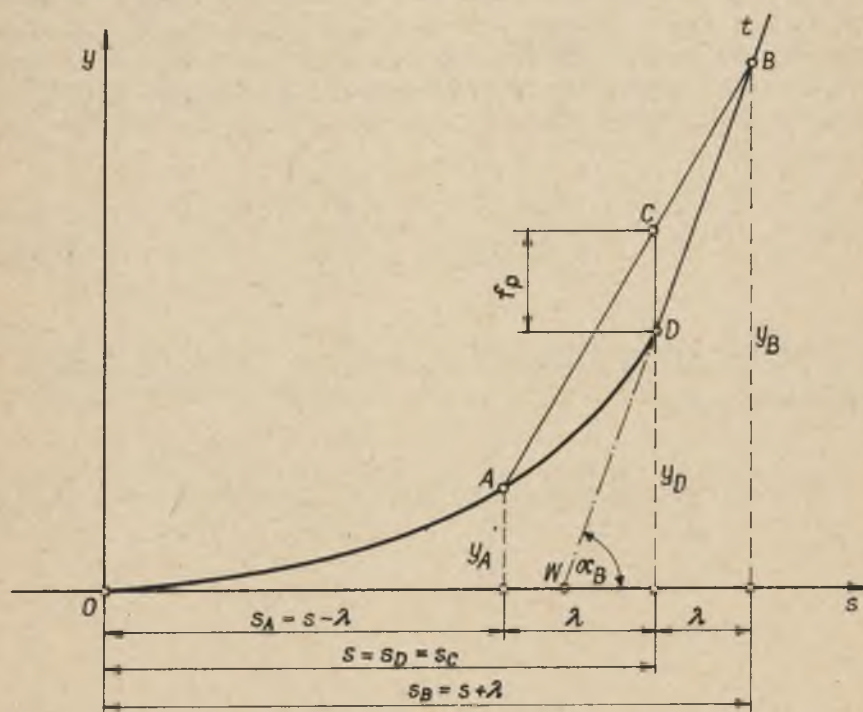
$$f_p = \frac{1}{2} y_B = \frac{1}{2} F(\lambda) \quad (2.4.1)$$

zaś w jego punkcie końcowym strzałkę f_p określi wzór - objaśniony rys.4

$$f_p = \frac{1}{2} \left[F(s_D - \lambda) - F(s_D) + \lambda F'(s_D) \right] \quad (2.4.2)$$



Rys. 3



Rys. 4

2.5. O weryfikacji aksjomatów teorii uogólnionej

Podstawowe wzory metody ewolwent opierają się na dwóch aksjomatach (1.2.1) i (1.2.14), wyczerpująco omówionych w poz. 1.2 niniejszej rozprawy. Długoletnia praktyka regulacji zweryfikowała w szerokim zakresie ich słuszność i przydatność w licznych zastosowaniach. Poza tym nie dysponujemy żadnym matematycznym dowodem ich prawdziwości i dlatego wzorom tym, wyprowadzonym pierwotnie drogą rozważań o własnościach ewolwenty łuku kołowego, nadaliśmy w naszej rozprawie charakter aksjomatów. Taki sam charakter aksjomatów nadaliśmy w naszej teorii uogólnionej wzorom podstawowym (2.1.7) i (2.2.1) które są tak zbudowane, że obejmują też metodę ewolwent, jako szczególny przypadek naszej teorii uogólnionej. Chociaż pełną prawdziwość obu tych aksjomatów oraz ich przydatność dla celów projektowania i regulacji łuków o dowolnie zmiennej krzywiznie będzie można stwierdzić dopiero w praktyce zastosowań naszej teorii, to jednak już teraz możemy tu podać niemal dowolną ilość przykładów liczbowych, które przemawiają za słusznością naszej aksjomatyki tj. za prawdziwością wyników, które można otrzymać przy pomocy wzorów (2.1.7) i (2.2.1). Tok związanych z tym obliczeń objaśnimy na podanych niżej przykładach.

2.6. Przykłady zastosowań

a) Uwagi wstępne. Weźmiemy pod uwagę łuk jednorodny o dowolnie zmiennej krzywiznie, wyrażony równaniem

$$y = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n \quad (2.6.1)$$

przedstawiający parabolę n-go rzędu. Współczynniki a_i tego równania muszą być tak dobrane aby czyniły zadość pewnym warunkom brzegowym, wymagającym np. aby łuk przechodził przez kilka z góry danych punktów $A_i(s_i, y_i)$ i żeby miał w tych punktach ściśle określony kierunek stycznej względnie także jakąś liczbowo ustaloną wartość krzywizny. Równanie łuku można też obrócić w postaci jakiejś funkcji ciągłopocho-
dnej

$$y = F(s) \quad (2.6.2)$$

rozwijalnej na szereg potęgowy typu

$$y = \sum_0^{\infty} a_r s_r^r \quad (2.6.3)$$

W obu powyższych przypadkach występują więc wyrażenia typu $a s^m$ w których wykładnik m będzie jakąś liczbą naturalną. W metodzie ewolwent wykazano, że dla $m = 0, 1, 2$ i 3 zachodzi całkowita zgodność wyników obliczeń z założeniami tej metody, które w poz.1 wyraziliśmy w postaci aksjomatów (1.2.1) i (1.2.14). Pozostaje więc wykazać, że również poza zakresem ważności metody ewolwent tj. na gruncie naszej teorii uogólnionej, otrzymamy całkowitą zgodność jej aksjomatów (2.1.7) i (2.2.1) z wynikami obliczeń, obejmujących wartości $m > 3$. Dowód tej zgodności przeprowadzimy metodą indukcji częściowej, obejmującej kolejny układ wartości $y = \sum y_m$ gdzie

$$y_m = a_m s^m \quad (2.6.4)$$

zaś $m = 4, 5, 6$ itd.

b) Przykład liczbowy. Rozważmy łuk jednorodny o zmiennej krzywiznie, wyrażony równaniem

$$y = F(s) = as^5 \quad (2.6.5)$$

Wykażemy, że wyniki podwójnej sumacji jego strzałek f_r będą całkowicie zgodne z wynikami analitycznego całkowania jego krzywizny

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \sim \frac{1}{r} = 20 as^3 \quad (2.6.6)$$

Aby tę strzałkę obliczyć weźmiemy pod uwagę równanie (2.3.6) oraz (2.4.1), wyznaczwszy w pierw wszystkie pochodne rzędu parzystego funkcji (2.6.5).

Otrzymamy następujący układ wartości

$$F''(s) = 20 as^3; \quad F^{IV}(s) = 120 as; \quad F^{VI}(s) = 0$$

z których na mocy (2.3.6) dostaniemy

$$f_r = \left[a \frac{\lambda^2}{2} \cdot 20 as^3 + \frac{\lambda^4}{24} 120 as \right] = a\lambda^5 \left[10 \left(\frac{s}{\lambda} \right)^3 + 5 \left(\frac{s}{\lambda} \right) \right] \quad (2.6.7)$$

Długość całkowita łuku nie jest w temacie naszego przykładu poddana żadnym ograniczeniom, wobec czego strzałkę f_r obliczymy tylko dla kilku wartości odciętej s , pokazanych w kolumnie drugiej, tablicy 1. Tablica ta obejmuje zestawienie wszystkich obliczeń, związanych z podwójną sumacją strzałek f_r i jest zbudowana zupełnie tak samo jak w metodzie ewolwent. Nadmienimy jeszcze, że współczynnik a , występujący w równaniu (2.6.5) musi mieć (z uwagi na jednorodność obu jego stron) wymiar (s^{-4}) a poza tym może być np. równy jedności.

Także dowolnie przez nas obraną długość parametru λ równą np. 10 m, można tu przyjąć za jednostkę długości. Wtedy wzór (2.6.7) przyjmie postać

$$f_r = 10 s^3 + 5 s \quad (2.6.8)$$

przy czym odcięta s przyjmować tu będzie kolejne wartości $s = 1, 2, 3, 4, 5$.

Strzałka krzywizny pozornej f_p , obliczona wzorem (2.4.1) wystąpi dla odciętej $s = 0$ i przyjmie tam wartość

$$f_p = \frac{1}{2} F(\lambda) = \frac{1}{2} a\lambda^5 = 0.5$$

Sumację strzałek zaczynamy na stycznej wlotowej od punktu w którym $s = -1$, gdzie $f_p = 0$.

Przebieg dwukrotnej sumacji, uwidoczniony szczegółowo w tablicy 1 wykazuje w jej 7-mej kolumnie całkowitą zgodność wyników numerycznego całkowania strzałki f_r z rezultatem analitycznego całkowania wzoru na krzywiznę r

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{ds^2} = 20 s^3$$

łuku (2.6.5) tzn. że w przykładzie naszym zachodzi ekwiwalencja

$$y = \iint \frac{d^2 y}{ds^2} ds^2 = 2 \sum \sum f_r \quad (2.6.9)$$

c) Dalsze przykłady, obejmujące różne specjalizacje wykładnika m (których tu z braku miejsca nie podajemy) potwierdzają również ekwiwalencję, wyrażoną wzorem (2.6.9).

Aproksymując w związku z powyższym wyniki pomiarów strzałki łuku odkształconego, za pomocą wielomianów algebraicznych wyższego rzędu otrzymamy całkowitą zgodność wyników numerycznego całkowania różnicy strzałek ($f_0 - f_r$) z dwukrotną całką

$$y = \iint \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) ds^2 = 2 \sum \sum (f_0 - f_r) \quad (2.6.10)$$

Na tej więc drodze można zatem uzyskać dowód słuszności obu aksjomatów naszej teorii uogólnionej.

d) Wzór na całkę podwójną. Pisząc równanie (2.6.9) w postaci ogólniejszej

$$F(s) = \iint F''(s) ds^2 = C_0 + C_1 s + 2 \sum \sum f_r \quad (2.6.11)$$

uwzględniającej stałe dwukrotnego całkowania - które w rozpatrzonym wyżej przykładzie miały wartość zerową - możemy

Tablica 1

Ip.	Odcięta wykresów		Strzałka f	$\sum f$	$\sum \sum f$	$y = 2 \sum \sum f$ czyli $y = 85$
	$(s.f)i(s,y)$	$(s.\sum f)$				
	s/ λ	s/ λ				
1	2	3	4	5	6	7
1	-1,0	-	0	-	-	-
2	-	-0,5	-	0	-	-
3	0,0	-	0,5	-	0	0
4	-	0,5	-	0,5	-	-
5	1,0	-	1,5	-	0,5	1
6	-	1,5	-	1,5,5	-	-
7	2,0	-	90	-	16,0	32
8	-	2,5	-	105,5	-	-
9	3,0	-	285	-	121,5	243
10	-	3,5	-	390,5	-	-
11	4,0	-	660	-	512,0	1024
12	-	4,5	-	1050,5	-	-
13	5,0	-	1275	-	1562,5	3125
14	-	5,5	-	2325,5	-	-
15	6,0	-	2190	-	3888,0	7776
itd.						

na mocy podstawienia $F''(s) = \Phi(s)$, wyrazić równaniem (2.6.11) w postaci

$$\iint \Phi(s) ds^2 = \sum \sum \left[\frac{\lambda^2}{2!} \Phi(s) + \frac{\lambda^4}{4!} \Phi''(s) + \dots + \frac{\lambda^{2r}}{(2r)!} \Phi^{2r-2}(s) + \dots \right] + C_0 + C_1 s \quad (2.6.12)$$

Wzór powyższy może mieć dla podwójnego całkowania jakiejś funkcji $\Phi(s)$ podobne znaczenie, jakie dla jej pojedynczego całkowania mają znane wzory Eulera, Lagrange'a i Gaussa.

2.7. Uwaga końcowa

Przykłady zastosowania naszej teorii uogólnionej dla celów regulacji odkształconych łuków będą podane w jednej z następných naszych prac.

LITERATURA

- [1] Przepisy o regulacji osi torów kolejowych - Warszawa 1951 (Instrukcja PKP Nr 23 - Nakł. Państw. Wyd. Komunik.).
- [2] M. Hoefler - Die Absteckung v. Gleisbogen aus Evolventen-Untersch. Berlin 1927, Nakł. Springer-Verlag.
- [3] J. Ponikowski - Geodezja kolejowa, tom 3-ci, Warszawa 1954 Państw. Wyd. Kartograf.
- [4] G. Schramm - Abstecken u. Vermarken von Bogen nach dem V.B. Verf. Lipsk 1941.
- [5] K. Weigel - Geodezja (Miernictwo) - Warszawa 1938, Książnica-Atlas.
- [6] T. Mazurek - Komunikacje Miejskie - Cz. I i II. Łódź i Warszawa, 1955 i 1959, PWN.
- [7] T. Mazurek - Budowa Kolei - Cz. I-V - Łódź i Kraków 1952-1956, PWN.
- [8] M. T. Huber - Stereomechanika techniczna, tom 3-ci, Warszawa 1951, PZWS.

О НОВЫХ ОСНОВАХ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДЕФОРМИРОВАННЫХ ЛУКОВ НА ТРАССАХ РЕЛЬСОВЫХ СООБЩЕНИЙ

Краткое изложение

Содержанием статьи является попытка обобщения метода Наленза и Гефера, употребляемого до настоящего времени только для круговых луков с наиболее простой переходной кривой — на луки с произвольно изменяемой кривизной. Обобщение этого метода получено при помощи рассуждений основывающихся на этой части теории упругости, которая описывает геометрию деформации искривленных стержней. Попытка представленная здесь, ограничивается чисто теоретическими рассуждениями, обрадующими замкнутую целость, которая позволит предпринять дальнейшие исследовательские работы, направленные к практическому применению приведенных в ней результатов.

NEW PRINCIPLES OF DEFORMED CURVES RECTIFICATION IN THE RAIL TRANSPORT ROUTES

Summary

The present paper is dealing with a trial of generalization of Nalenz and Hoefer methods, applied up till now only to the circular curves with the simplest adjustment curve, to the curves with a freely variable curvature. The generalization of this method was achieved by means of considerations, based on this part of elasticity theory, which describes geometry of curved bar strains. The presented trial is limited to the purely theoretical considerations, that form a closed within itself whole, which will allow carrying on of further research work, aiming at the practical adaptation of the presented results.