ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI SLĄSKIEJ 1979
Seria: GORNICTWO z. 97 Nr kol.597

Artur PALUCH

DYNAMICZNY MODEL PRODUKCJI GÓRNICZEJ

Streszczenie: W pracy w przedstawionym modelu znaleziono funkcje przyrostu produkcji w czasie. Występujące stałe w równaniu /7/ można wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów. Metoda może posłużyć do prognozowania rozwoju produkcji w przemyśle górniczym.

1. Wprowadzenie

Dla zbudowania dynamicznego modelu produkcji posłużono się [1] znaną w fizyce zasadą, zgodnie z którą ruch cząsteczek materialnych odbywa się w ten sposób, że całka

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(x_i,\, \dot{x}_i,\, t\right)\, dt \longrightarrow \min$$

zwana działaniem, przyjmuje najmniejszą wartość,
gdzie:

L - jest funkcją Lagrange'a systemu,
x_i - uogólnione współrzędne,
$\dot{x}_i$ - uogólnione prędkości systemu
t_1, t_2 - początkowy i końcowy moment ruchu systemu.

W naszych rozważaniach funkcja Lagrange'a systemu nie będzie występować w sposób jasny. Wykorzystamy natomiast fakt, że warunek $S \longrightarrow \min$ równoważny jest układowi równań Newtona

$$m_i \cdot \frac{d^2 x_i}{dt^2} = F_i \qquad /1/$$

za pomocą którego zbudowano dynamiczny model produkcji będący / co wynika z postaci równań /1// układem równań różniczkowych drugiego rzędu.

Model ten mógłby odwzorowywać, w miarę dokładnie, rozwój produkcji przemysłu górniczego, którego działalność uzależniona jest w istotny sposób od wzrostu dochodu narodowego.

Zbudowany takim sposobem model może być wykorzystany do uzyskania prognozy rozwoju wielkości produkcji w przemyśle górniczym, opierając się na danych statystycznych dotyczących wielkości produkcji w pewnym okresie, nazwanym dalej okresem bazowym.

2. Budowa modelu

Jak stwierdzone zostało we wstępie, dynamiczny model produkcji opisano układem równań różniczkowych w postaci /1/. Należy zatem podać realną w przyjętych rozważaniach interpretację występujących w tych równaniach wielkości x_i, m_i, F_i, które w fizyce mają określony sens, nie mający jednak w bodowanym modelu takiego samego znaczenia. Wielkościom tym można nadać następujący sens:

$x_i/t/$ - oznacza stan produkcji i-tej gałęzi przemysłu w momencie t, np. przemysłu górniczego,

m_i - bezwładność i-tej gałęzi przemysłu, która w zbudowanym modelu występuje w sposób niejasny w postaci współczynników w równaniach opisujących model, na jej wielkość mają wpływ istniejące środki produkcji, siła robocza,

F_i - jest siłą wyzwalającą rozwój produkcji w i-tej gałęzi przemysłu.

Funkcja $x_i/t/$ posiada oczywistą interpretację w opisywanej przez model rzeczywistości. W budowanym modelu wskaźnik i przyjmuje talko jedną wartość. W związku z tym możemy napisać, że $x_1/t/ = X/t/$, gdzie $X/t/$, jest wielkością produkcji pewnej gałęzi przemysłu w okresie ", t. Zgodnie z wprowadzonym oznaczeniem wielkość produkcji w k-tym roku wynosi $W/k/ = X/k + 1/ - X/k/$

Siła F wyzwalająca rozwój produkcji jest różnicą

$$F = N - D \qquad /3/$$

gdzie:

N - jest siłą i sprzyja rozwojowi produkcji, a D siłą hamującą jej rozwój.

W przyjętych rozważaniach można założyć, że siła N jest proporcjonalna do dochodu narodowego P/t/ w momencie t, tzn. $N \sim P$.

Zatem przy bardzo małym dochodzie narodowym $[0, t]$ współczynnik proporcjonalności jest bliski zera. Takie założenie wydaje się uzasadnione w sytuacji rosnącego rozwoju produkcji, chociaż upraszcza to omawiane zagadnienie.

W rzeczywistości siła powodująca rozwój produkcji zamiast od dochodu narodowego P/t/ mogłaby zależeć od średniej wielkości produkcji w okresie bazowym lub też od innej wielkości, które użycie w opisie rozwoju danej gałęzi przemysłu można uzasadnić.

Występująca we wzorze /3/ siła D - hamująca rozwój produkcji jest proporcjonalna do $\frac{dx}{dt}$, tzn. $D \sim \frac{dx}{dt}$ oznacza to, że siła D jest proporcjonalna do szybkości wzrostu produkcji.

Dynamczny model produkcji gałęzi przemysłu o zbliżonych do wspomnianej już zależności jego rozwoju od dochodu narodowego można opisać również równaniem różniczkowym.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = K_1 \cdot P - K_2 \frac{dx}{dt} \qquad /4/$$

gdzie:

współczynnik proporcjonalności k_1, k_2 określone są w ten sposób, by wartości rozwiązania X/t/ równania /4/ pokrywały się dla t=1,2....n z faktyczną wielkością produkcji w okresach [0,1], [0,2],.... [0,n] znaną z wcześniejszych opracowań statystycznych. Wielkość W/k/ produkcji w k-tym roku obliczona z równania /2/ powinna być zatem równa różnicy X/k+1/ - X/k/, gdzie X/k/ jest wartością rozwiązania równania /4/ dla t = k k = 1,2,...,n.

3. Równanie wielkości produkcji

Równanie różniczkowe (4) jest równaniem niejednorodnym, a zatem w celu otrzymania jego rozwiązania należy najpierw rozwiązać równanie jednorodne

$$\frac{dY}{dt} = -k_2 Y \quad \text{gdzie} \quad Y(t) = \frac{dX}{dt} \qquad (5)$$

Rozwiązując równanie (5) metodą rozdzielenia zmiennych, uzmienniając stałą C, otrzymamy po zróżniczkowaniu

$$\frac{dY}{dt} = C'/t/\, e^{-k_2 t} - k_2 C/t/ \cdot e^{-k_2 t} \qquad /6/$$

Podstawiając Y/t/ i $\frac{dY}{dt}$ do równania /4/ otrzymujemy równość

$$C'/t/e^{-k_2 t} - K_2 C/t/e^{-k_2 t} = - K_2 C/t/e^{-k_2 t} + K_1 P/t/$$

stąd

$$\frac{dC}{dt} = K_1\, e^{k_2 t}\, P/t/$$

oraz

$$C/t/ = \int K_1\, e^{k_2 t}\, P/t/\, dt$$

Aby można było scałkować funkcję $K_1\, e^{k_2 t}\, P/t/$, musimy znać postać funkcji P/t/, tj. dochodu narodowego w okresie [0,t]. Jeśli dochód narodowy w roku i-tym oznaczymy przez P/i/, oraz założymy, że w okresie bazowym wielkość produkcyjnego majątku trwałego i zatrudnienia nie ulega zmianie, to dochód narodowy wyrazi się [2]:

$$\bar{P}/i/ = H \cdot e^{\gamma i}, \; i \in B$$

gdzie:

γ - jest stałym parametrem charakteryzującym postęp techniczny i organizacyjny;

Oznacza to, że całka

$$\overline{\overline{P}}/t/ = \int_0^t \overline{P}/t/\ dt = \frac{H}{\gamma} e^{\gamma t} - \frac{H}{\gamma}$$

charakteryzuje dochód narodowy w okresie $[0, t]$.

W związku z tym w dalszej części pracy przyjmujemy, że $P/t/:=\overline{\overline{P}}/t/$ wtedy

$$C/t/ = \int K_1 \frac{H}{\gamma}\left(e^{\gamma t} - 1\right) e^{k_2 t}\ dt =$$

$$= \frac{K_1 H}{\gamma(\gamma+K_2)} e^{(\gamma+k_2)t} - \frac{k_1 H}{\gamma . K_2} e^{k_2 t} + E$$

Rozwiązaniem równania /6/ jest zatem funkcja

$$Y/t/ = \left[\frac{K_1 H}{\gamma(\gamma+K_2)} e^{(\gamma+k_2)t} - \frac{K_1 H}{k_2 \gamma} e^{k_2 t} + E\right] . e^{-k_2 t}$$

Stąd z podstawienia /5/ mamy

$$X/t/ = \int Y/t/\ dt$$

a więc

$$X/t/ = \frac{k_1 H}{\gamma^2/\gamma+k_2/} e^{\gamma . t} - \frac{k_1 H}{k_2 \gamma} . t - \frac{E}{k_2} e^{-k_2 t} + G$$

Korzystając z równości $\overline{P}/t/ = H e^{\gamma t}$, otrzymujemy

$$X/t/ = \frac{k_1}{\gamma^2/\gamma + k_2/} \overline{P}/t/ - \frac{k_1 H}{k_2 \gamma} t - \frac{E}{k_2} e^{-k_2 t} + G \qquad /7/$$

Równanie /7/ jest równaniem produkcji gałęzi przemysłu będącej funkcją dochodu narodowego $\overline{P}/t/$. W równaniu tym występuje pięć parametrów k_1, k_2, γ, E, G, które należy wyznaczyć, korzystając z danych statystycznych okresu bazowego, stosując np. metodę najmniejszych kwadratów. Znajomość tych współczynników pozwoli uzyskać prognozę dotyczącą wielkości produkcji modelowej gałęzi przemysłu w momentach późniejszych niż lata okresu bazowego.

Na zakończenie należy stwierdzić, że słuszność zbudowanego tu modelu produkcji górniczej należy przetestować na przykładzie rozwoju przemysłu górniczego. Uzyskane wyniki, co będzie tematem dalszych badań oraz przyszłych publikacji, pozwolą na skorygowanie i ulepszenie zaprezentowanego tu modelu.

LITERATURA

[1] Bondarenko W.E.: Obodnoj dinamiczeskoj modeli proiswodstwa. Isledowanie operacji. ASU, 5/1975, str. 49-53.

[2] Kryński H.E.: Zastosowanie matematyki.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛ ГОРНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Резюме

В статье производится модель на основе которой найдено функцию увеличения продукции во времени. Выступающие в уравнении / 7 / можно определить методом самых малых кубов. Метод этот можно применить для прогнозирования развития производства в угольной промышленности.

DYNAMIC MODEL OF COAL-MINING PRODUCTION.

S u m m a r y

The paper presents the model in which the time functions of production increase were found. The constants from equation /7/ can be determined using the least squares methods. These methods can be utilized to forecast the mining industry production development.