ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1980

Seria: GÓRNICTWO z. 104 Nr kol. 640

Kazimierz PODGÓRSKI
Henryk KLETA

STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W GÓROTWORZE TRAKTOWANYM JAKO CIAŁO TRANSWERSALNIE IZOTROPOWE W SĄSIEDZTWIE SZYBU

Streszczenie. W pracy podano teoretyczne podstawy obliczania ciśnienia górotworu na obudowę szybu w przypadku wystąpienia strefy sprężystej i plastycznej. Górotwór potraktowano jako ciało transwersalnie izotropowe.

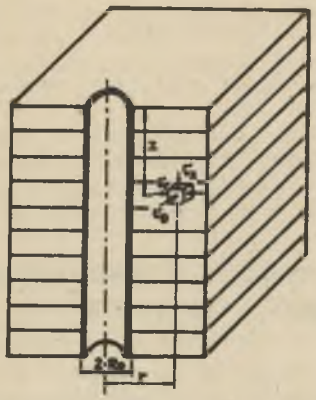
1. WSTĘP

Szyby górnicze głębione są przeważnie w uwarstwionym górotworze. Ciśnienie górotworu na obudowę szybu obliczane jest zgodnie z obowiązującą normą BN-71/0434-02, która w małym zakresie opisuje współpracę obudowy z górotworem. Istnieje zatem potrzeba rozpatrzenia tego zagadnienia przy uwzględnieniu stanu naprężenia i odkształcenia górotworu jak i obudowy szybu [1, 2, 3].

2. STAN NAPRĘŻENIA WOKÓŁ OBUDOWY SZYBU W GÓROTWORZE TRAKTOWANYM JAKO CIAŁO TRANSWERSALNIE IZOTROPOWE

Do rozważań przyjęto, że szyb przecina prostopadle warstwy górotworu (rys. 1). Przy takim założeniu z równań różniczkowych równowagi łącznie z warunkiem ciągłości odkształceń wynikają wzory na naprężenia [3] o postaci:

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\\
\sigma_\theta &= \frac{\partial}{\partial z}\left(b\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{c}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)\\
\tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$



Rys. 1. Przekrój przez szyb w górotworze uwarstwionym

gdzie:

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}; \qquad b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12}\,a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}$$

$$d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}; \qquad \beta = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}}; \qquad c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}\,a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}$$

$$a_{11} = \frac{1}{E}; \quad a_{12} = -\frac{\nu}{E}; \quad a_{33} = \frac{1}{E'}; \quad a_{13} = -\frac{\nu'}{E'}; \quad a_{44} = \frac{1}{G'}; \quad a_{11} - a_{12} = \frac{1}{G}$$

$$E = E_{\parallel}; \quad E' = E_{\perp}; \quad \nu = \nu_{\parallel}; \quad \nu' = \nu_{\perp}; \quad G = G_{\parallel}; \quad G' = G_{\perp}$$

$E_{\parallel}$, $E_{\perp}$ - moduł sprężystości, równoległe i prostopadle do uławicenia,
$\nu_{\parallel}$, $\nu_{\perp}$ - współczynnik Poissona, równoległe i prostopadle do uławicenia,
φ - funkcja naprężeń.

Z przeprowadzonej analizy wynika, że funkcja naprężeń posiada postać:

$$\varphi = z^4 + Az^2 \ln(r) + Br^2 \ln(r) + Czr^2 \tag{2}$$

Występujące stałe całkowania w równaniu (2) wyznaczono dla następujących warunków brzegowych:

$$r = \infty \qquad \sigma_r = \sigma_\Theta = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}}\,\gamma z g = \beta \gamma z g \tag{3}$$

$$r = R_o \qquad \sigma_r = p_1; \qquad \tau_{rz} = \tau_o$$

Wyznaczone stałe w równaniu (2) wynoszą:

$$A = \frac{p_1 R_o^2}{2z(1-b)} - \frac{\beta \gamma R_o^2 z}{2(1-b)}$$

$$B = \frac{\tau_o R_o}{4} - \frac{p_1 R_o a}{z(1-b)} + \frac{\beta \gamma R_o^2 a}{4(1-b)}; \quad C = -\frac{12az}{(1+b)} - \frac{\beta \gamma z}{2(1+b)} \tag{4}$$

Po podstawieniu stałych (4) do równań (1) otrzymano wzory na naprężenie radialne

$$\sigma_r = p_1 \frac{R_o^2}{r^2} + \beta \gamma z \left(1 - \frac{R_o^2}{r^2}\right) \tag{5}$$

naprężenie obwodowe

$$\sigma_\Theta = - p_1 \frac{R_o^2}{r^2} + \beta \gamma z \left(1 + \frac{R_o^2}{r^2}\right) \tag{6}$$

naprężenie pionowe

$$\sigma_z = - \gamma \tag{7}$$

naprężenie styczne

$$\tau_{rz} = \frac{R_o}{r} \frac{\tau_o}{4} \tag{8}$$

Występującą w równaniach (5), (6), (7), (8) wielkość ciśnienia p_1 górotworu na obudowę i naprężenie styczne τ_o wyznacza się z warunku współpracy obudowa-górotwór.

Wielkość składowych stanu odkształcenia oblicza się ze wzorów [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11} \sigma_r + a_{12} \sigma_\Theta + a_{13} \sigma_z \\ \varepsilon_\Theta &= a_{12} \sigma_r + a_{11} \sigma_\Theta + a_{13} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= a_{13} (\sigma_r + \sigma_\Theta) + a_{33} \sigma_z \\ \gamma_{rz} &= a_{44} \tau_{rz} \end{aligned} \tag{9}$$

Do równań (9) podstawiono zależności (5), (6), (7), (8) i otrzymano:

$$\varepsilon_r = a_{11}\left[p_1 \frac{R_o^2}{r^2} + \beta \gamma z \left(1 - \frac{R_o^2}{r^2}\right)\right] + a_{12}\left[\beta \gamma z \left(1 + \frac{R_o^2}{r^2}\right) - p_1 \frac{R_o^2}{r^2}\right] - a_{13} \gamma z g \tag{10}$$

$$\varepsilon_\Theta = a_{12}\left[p_1 \frac{R_o^2}{r^2} + \beta\gamma zg\left(1-\frac{R_o^2}{r^2}\right)\right] + a_{11}\left[\beta\gamma zg\left(1+\frac{R_o^2}{r^2}\right) - p_1 \frac{R_o^2}{r^2}\right] - a_{13}\gamma zg \tag{11}$$

$$\varepsilon_z = 2a_{13}\beta\gamma zg - a_{33}\gamma zg \tag{12}$$

$$\gamma_{rz} = a_{44}\frac{\tau_o}{4}\frac{R_o}{r} \tag{13}$$

Zależności między odkształceniami a przemieszczeniami ujmują równania [3]:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \varepsilon_\Theta = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{dw}{dz}; \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{14}$$

Wykorzystując podane zależności, po ich rozwiązaniu otrzymano wzory pozwalające obliczyć:

- przemieszczenie górotworu w kierunku promieniowym

$$u_r = \varepsilon_\Theta r = ra_{12}\left[p_1 \frac{R_o^2}{r^2} + \beta g\gamma z\left(1-\frac{R_o^2}{r^2}\right)\right] + ra_{11}\left[g\beta\gamma z\left(1+\frac{R_o^2}{r^2}\right) - p_1 \frac{R_o^2}{r^2}\right] - a_{13}\gamma zr\cdot g \tag{15}$$

- przemieszczenie górotworu w kierunku pionowym

$$w = 4\, a_{13}\, \beta g\gamma z^2 - \frac{a_{33}g\gamma z^2}{2} \tag{16}$$

- kąt odkształcenia postaciowego

$$\gamma_{rz} = ra_{12}\beta g\gamma\left(1 - \frac{R_o^2}{r^2}\right) + a_{11}rg\beta\gamma\left(1+\frac{R_o^2}{r^2}\right) - a_{13}\gamma rg. \tag{17}$$

Na kontakcie górotwór-obudowa wielkość przemieszczenia wynosi:

$$U_{r=R_o} = R_o\left[p_1(a_{12}-a_{11}) + \beta g\gamma z(a_{12}+2a_{11}) - a_{13}g\gamma z\right] \tag{18}$$

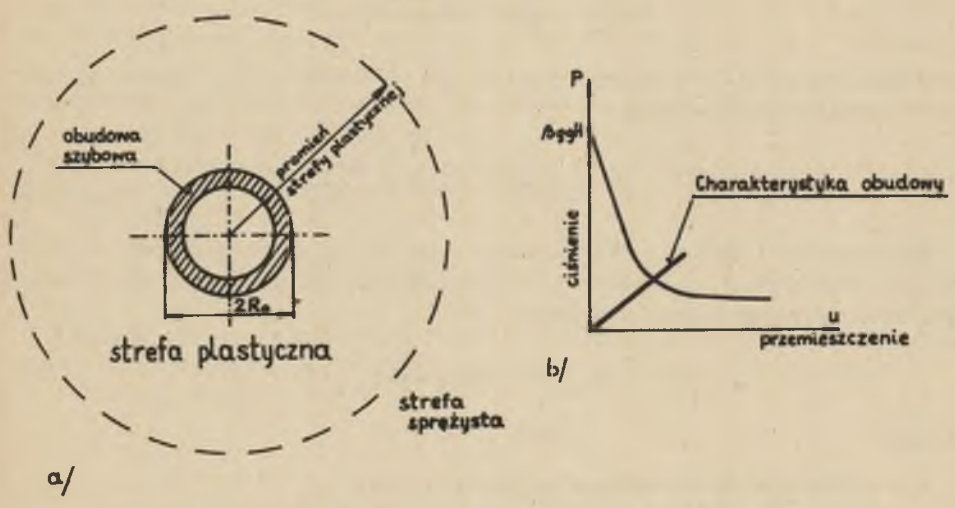
Założono, że reakcja obudowy p_1 jest wprost proporcjonalne do przemieszczenia radialnego konturu obudowy szybowej i do współczynnika sztywności obudowy [2]

$$\sigma_{r_{r=R_o}} = \vartheta u_{r=R_o} = p_1 \tag{19}$$

Ciśnienie górotworu na obudowę określono po przekształceniu równań (18) i (19)

$$p_1 = \frac{\vartheta R_o g\beta\gamma z(2a_{11}+a_{12}) - \vartheta R_o a_{13}g\gamma z}{1 - \vartheta R_o(a_{12} - a_{11})} \tag{20}$$

Podane wzory pozwalają określić ciśnienie górotworu na obudowę szybu na małych i średnich głębokościach. Wraz ze wzrostem głębokości ulegają zmianie nie tylko naprężenia, ale również własności skał, co powoduje wytworzenie się wokół szybu strefy plastycznej (rys. 2).



Rys. 2. Położenie stref odkształceń wokół szybu
a - przebieg deformacji skał wokół szybu, b - wykres współpracy obudowa-górotwór w strefie sprężysto-plastycznej

3. STAN NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W STREFIE PLASTYCZNEJ WOKÓŁ SZYBU

Celem określenia ciśnienia górotworu na obudowę szybu oraz położenia strefy plastycznej wokół szybu skorzystano z hipotezy Culomba-Mohra. Przyjęto, że w strefie plastycznej można traktować górotwór jako ciało izotropowe. W strefie plastycznej powstałej w ciałach transwersalnie izotropowych w trójosiowym stanie naprężeń, gdzie współczynnik Poissona ν dąży do 0,5, można zagadnienie stanu granicznego dość dobrze opisać równaniem [4]:

$$\frac{\sigma_\Theta^* - \sigma_r^*}{2} = \frac{\sigma_\Theta^* + \sigma_r^*}{2} \sin\varrho + k_{(r)} \cos\varrho \tag{21}$$

gdzie:

σ_r^* - naprężenie radialne w strefie plastycznej,

σ_Θ - naprężenie obwodowe w strefie plastycznej,

ϱ - kąt tarcia wewnętrznego skał,

$k_{(r)}$ - kohezja skał w strefie plastycznej.

Z analizy przebiegu naprężeń w strefie plastycznej wynika, że $|\sigma_z^*| < |\sigma_\theta^*|$ oraz $|\sigma_z^*| > |\sigma_r^*|$. Z warunku równowagi rzutu sił elementarnego wycinka górotworu wynika zależność [2]:

$$\frac{\partial \tau_{rz}^*}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r^*}{\partial r} + \frac{\sigma_\theta^* - \sigma_r^*}{r} = 0 \tag{22}$$

Po podstawieniu σ_θ^* z równania (21) do (22) i (7) do (22), przekształceniu i rozwiązaniu otrzymano:

$$\frac{d\sigma_r^*}{dr} - \frac{\sigma_r^*}{r}\left(\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}\right) - \frac{2\,k_{(r)}\cos\varrho}{r(1-\sin\varrho)} = 0 \tag{23}$$

Występująca w równaniu (23) kohezja $k_{(r)}$ zależy od odkształceń skał w strefie plastycznej. Zależność tę z dostateczną dokładnością dla celów praktycznych można opisać hiperbolą [3]:

$$k_{(r)} = k - C_1 \left(\frac{R_o}{r}\right)^n \tag{24}$$

gdzie:

- k - kohezja w nienaruszonym górotworze,
- n - parametr określony doświadczalnie, przyjmowany $n=2$,
- C_1 - parametr przedstawiający wielkość spadku kohezji w stosunku do górotworu nienaruszonego,

$$C_1 = k - k_{(R_o)} \tag{25}$$

Przy powyższych założeniach równanie opisujące zmianę kohezji posiada postać

$$k_{(r)} = k - \left[k - k_{(R_o)}\right]\left(\frac{R_o}{r}\right)^2 \tag{26}$$

Wielkość naprężeń radialnych w strefie plastycznej przy danym oddziaływaniu obudowy p_o obliczono po rozwiązaniu równania (23) dla $\sigma_r = p_o$, $r = R_o$, do którego podstawiono zależności (21) i (26)

$$\sigma_r = k\left[1-\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}}\right]\operatorname{ctg}\varrho - 2k\left[\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} - \frac{R_o^2}{r^2}\right]\cos\varrho + p_o\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} \tag{27}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r\,\frac{1+\sin\varrho}{1-\sin\varrho} + \frac{2\,k_{(1)}\cos\varrho}{1-\sin\varrho} \tag{28}$$

$$\sigma_z = -\gamma z g \tag{29}$$

W strefie plastycznej przyjęto, że występują głównie odkształcenia postawiowe i wówczas:

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \tag{30}$$

Odkształcenia pionowe ulegają w praktyce niedużej zmianie i dla uproszczenia przyjęto, że dla pewnego odcinka szybu o wysokości Δh występują średnie naprężenia pionowe oraz nie występuje ruch skał w kierunku pionowym. Wówczas zagadnienie to można sprawdzić do zagadnienia płaskiego stanu odkształcenia, dla którego $\varepsilon_z = 0$.

Podstawiając do równania (30) zależności (14) przy założeniu, że $\varepsilon_z=0$, uzyskano:

$$\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} = 0 \tag{31}$$

Równanie opisujące zależność między naprężeniami, a odkształceniami w stanie sprężysto-plastycznym ze wzmocnieniem posiada postać [6]

$$\sigma_i = E_3\, \varepsilon_i + \lambda \sigma_r \tag{32}$$

gdzie:

σ_i - intensywność naprężeń,

ε_i - intensywność odkształceń,

E_3 - moduł zmocnienia,

λ - parametr zmocnienia,

σ_T - naprężenie na granicy plastyczności.

Intensywność naprężeń σ_i oraz odkształceń ε_i opisana jest warunkiem plastyczności [5]:

$$\sigma_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_r^*-\sigma_\theta^*)^2 + (\sigma_\theta-\sigma_z^*)^2 + (\sigma_z^*-\sigma_r)^2} \tag{33}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_r-\varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta-\varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z-\varepsilon_r)^2} \tag{34}$$

Podstawiając do równania (34) $\varepsilon_z =$ [illegible] i $\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta$ [illegible]mano:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta) \tag{35}$$

oraz

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon_\theta \tag{36}$$

Wartości σ_i oraz ε_i z równań (35), (36) podstawiono do równania (32) i otrzymano po rozwiązaniu:

$$\varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} = \frac{3}{4}\frac{1}{E_3}\left\{-\frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}\left[1-\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}}\right]k + \frac{\sin 2\varrho}{1-\sin\varrho}\left[\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} - \frac{R_o^2}{r^2}\right]2k - \frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}\,p_o\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} - \frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}\left[k-(k-k_{(R_o)})\left(\frac{R_o}{r}\right)^2\right]\right\} - \frac{\sqrt{3}}{2E_3}\lambda\sigma_r \tag{37}$$

Przy założeniu, że $\varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r}$ otrzymuje się:

$$U_r = \frac{3}{3}\frac{1}{E_3}\,r\left\{-\frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}\left[1-\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}}\right]k + \frac{\sin 2\varrho}{1-\sin\varrho}\left[\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} - \frac{R_o^2}{r^2}\right].\,2k - \frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}\,p_o\left(\frac{r}{R_o}\right)^{\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} - \frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}\left[k-(k-k_{(R_o)})\left(\frac{R_o}{r}\right)^2\right]\right\} - \frac{\sqrt{3}}{2E_3}\,r\lambda\sigma_T \tag{38}$$

Wielkość przemieszczeń radialnych konturu wyrobiska szybowego posiada postać:

$$U_{r=R_o} = -\frac{3}{4}\frac{1}{E_3}R_o\left(\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}p_o + \frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}k_{(R_o)}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2E_3}R_o\lambda\sigma_T \tag{39}$$

Wielkość ciśnienia górotworu na obudowę szybu w stanie sprężysto-plastycznym określono podobnie jak w przypadku górotworu sprężystego. Równanie opisujące wielkość ciśnienia górotworu na obudowę szybu posiada postać:

$$p_o = \frac{\frac{3}{4}\frac{1}{E_3}\vartheta R_o\frac{2\cos\varrho}{1-\sin\varrho}k_{(R_o)} + \frac{\sqrt{3}}{2E_3}\vartheta R_o\lambda\sigma_T}{1+\frac{3}{4}\vartheta\frac{1}{E_3}R_o\frac{2\sin\varrho}{1-\sin\varrho}} \tag{40}$$

Wykorzystując powyższe równanie (40) można określić ciśnienie górotworu na obudowę szybu w warunkach wpływu dużych głębokości.

PODSUMOWANIE

Wyprowadzone wzory pozwalają określić ciśnienie górotworu na obudowę szybu tak w strefie sprężystej, jak i plastycznej. Jednak zachodzi potrzeba uprzedniego wyznaczenia własności skał i obudowy szybu.

Prowadzone dalsze prace w tym zakresie pozwolą na uwzględnienie czynnika czasu, jak i wpływów eksploatacji górniczej.

LITERATURA

[1] CHUDEK M.: Mechanika górotworu. Skrypty Centralne Studiów Technicznych dla Pracujących. Politechnika Śląska, Gliwice 1976.

[2] FILCEK H.: Wpływ na stan naprężenia i odkształcenia górotworu w sąsiedztwie wyrobiska chodnikowego. Zeszyty Problemowe Górnictwa, T. 1, z. 1. Warszawa 1963.

[3] LIECHNICKI S.: Tieoria uprugnosti anizotropnogo tieła. Izd.Nauka,Moskwa 1977.

[4] PROTOSJENIA A.G.: Priłożjenie modeli pełzoczie-plast. tieła dla issled. napr.-deform. sostojania masiwa porod wyrabotok. Fizyka techn. probl. rozrabotki poleznych iskop. Nr 3, 1975.

[5] SZCZEPIŃSKI W.: Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich. PAN, Warszawa 1974.

[6] WALCZAK J.: Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II, Warszawa 1973.

СОСТАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ГОРНОМ МАССИВЕ В ТРАКТОВКЕ КАК ТРАНВЕРСАЛЬНО ИЗОТОПНОЕ ТЕЛО ПО СОСЕДСТВУ СТВОЛА

Р е з ю м е

В статье даются теоретические основы вычисления давления горного массива на крепь ствола в случае выступления упругой и пластичной зоны.

Горной массив понимаемый как трансверсально изотопное тело.

THE STATE OF STRESS AND DEFLECTIONS IN ROCKS CONSIDERED AS TRANSVERSAL ISOTROPIC BODY IN AREAS ADJACENT TO THE SHAFT

S u m m a r y

The paper contains theoretical principles for calculating rock pressure affecting the lining in the case of elastic and plastic zone occurance. The rock was considered to be a transversal isotropic body.