

Norbert MUSIOŁ
Zygmunt LECYBIL

MODEL ROZKŁADU WIELKOŚCI WYDOBYCIA WĘGLA KAMIENNEGO WEDŁUG GŁĘBOKOŚCI EKSPLOATACJI

Streszczenie. W oparciu o analizę wydobycia węgla w latach 1960-1975 według głębokości eksploatacji dokonano aproksymacji gęstości udziału wydobycia z poszczególnych głębokości krzywą normalną. Wyznaczono także modele tendencji rozwojowych parametrów strukturalnych rozkładu wydobycia.

1. OPIS ROZKŁADU WYDOBYCIA W LATACH 1960-75

Analiza rozkładu wydobycia węgla kamiennego według głębokości zalegania pokładów ujawnia podobieństwo rozkładów w poszczególnych latach do rozkładu normalnego. Dało to asumpt do aproksymowania gęstości udziału wydobycia z poszczególnych głębokości krzywą normalną daną równaniem:

$$u(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-h)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (1)$$

gdzie:

- $u(z)$ - gęstość udziału wydobycia,
- z - współrzędna głębokości eksploatacji,
- σ, h - parametry równania.

Estymacja parametrów równania regresji danego wzorem (1) metodą najmniejszych kwadratów wymaga przeprowadzenia bardzo skomplikowanych rachunków. Dlatego też w celu uproszczenia procedury dokonano ich oszacowania za pomocą ogólnie znanych wzorów, np. [1], na średnią ważoną i odchylenie standardowe:

$$h = \frac{\sum_{i=1}^n u_i \cdot z_i}{\sum_{i=1}^n u_i} \quad (2)$$

$$G = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i (z_i - h)^2}, \quad (3)$$

gdzie:

- h - średnio ważona głębokość eksploatacji,
- G - parametr charakteryzujący rozrzut wydobywania wokół średniej głębokości,
- i - numer przedziału głębokości,
- u_i - udział wydobywania z i-tego przedziału,
- z_i - średnia głębokość i-tego przedziału,
- n - liczba przedziałów głębokości.

W celu oceny stopnia zgodności danych empirycznych z krzywą (1) obliczono dla każdego roku [3]:

- standardowy błąd oceny

$$S_u = \left[\frac{\sum_{i=1}^n [u_i - \hat{u}_i]^2}{n - 3} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

- współczynnik determinacji

$$R_{uz}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n [u_i - \hat{u}_i]^2}{\sum_{i=1}^n [u_i - \bar{u}]^2}, \quad (5)$$

gdzie:

$$\hat{u}_i = \Delta z \cdot u(z_i) = 100 \cdot u(z_i)$$

$u(z_i)$ = wartość obliczona równaniem (1) dla $z = z_i$

$$\bar{u} = \frac{\sum u_i}{n} = 0,111 \text{ średnia wartość } u_i.$$

Sposób dokonywania obliczeń przedstawiono na przykładzie roku 1975 w tabl. 1, a na rys. 1 i 2 wykreślono linie łamane obrazujące gęstość i dystrybuantę empirycznego i obliczonego rozkładu wydobywania dla tego roku.

Uzyskane dla poszczególnych lat parametry strukturalne i zbieżności stochastycznej zestawiono w tabl. 2.

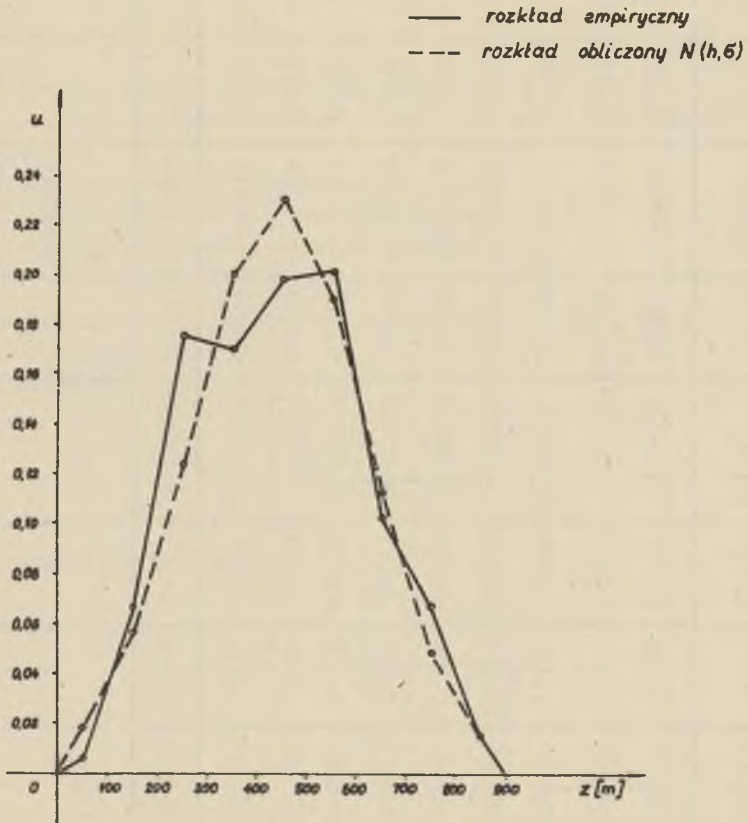
Otrzymane wartości R_{uz}^2 (lub R_{uz}) świadczą o wysokiej zależności korelacyjnej danych empirycznych z krzywą (1) w poszczególnych latach. Test istotności dla współczynnika korelacji przy postawieniu hipotezy [3]

$H_0 : [R = 0]$ ma postać:

Tablica 1

Obliczanie parametrów równania regresji $u = f(z)$ dla roku 1975 ($t=16$)

i	z_i	u_i	$z_i \cdot z_i$	$z_i \cdot b$	$u_i \cdot (z_i - b)^2$	\hat{u}_i	$u_i - \hat{u}_i$	$(u_i - \hat{u}_i)^2$	$u_i - \bar{u}$	$(u_i - \bar{u})^2$	$\sum_{i=1}^n u_i$	$\sum_{i=1}^n \hat{u}_i$
1	50	0,006	0,30	-392,4	923,9	0,018	-0,012	0,000144	-0,105	0,011025	0,006	0,018
2	150	0,066	9,90	-292,4	5642,9	0,010	0,010	0,000100	-0,045	0,002025	0,072	0,074
3	250	0,175	43,75	-192,4	6478,1	0,124	0,051	0,02601	0,064	0,004096	0,247	0,198
4	350	0,170	59,50	-92,4	1451,4	0,200	-0,030	0,000900	0,059	0,003481	0,417	0,398
5	450	0,190	89,10	7,6	11,4	0,230	-0,032	0,001024	0,087	0,007569	0,615	0,628
6	550	0,201	110,55	107,6	2327,1	0,190	0,011	0,000121	0,090	0,008100	0,816	0,818
7	650	0,102	66,30	207,6	4396,0	0,112	-0,010	0,000100	-0,009	0,000081	0,918	0,930
8	750	0,067	50,25	307,6	6339,4	0,048	0,019	0,000361	-0,044	0,001936	0,985	0,978
9	850	0,015	12,75	407,6	2492,1	0,015	0,000	0,000000	-0,096	0,009216	1,000	0,993
	$\sum =$	1,000	442,40		300062,2	0,993		0,005351		0,047529		
		$u=0,111$	$b=442,4$		$6=173,4$			$S_u=0,030$		$R_{uz}^2=0,887416$		
												$R_{uz}=0,942$



Rys. 1. Rozkład wydobywania wg głębokości - 1975 r.

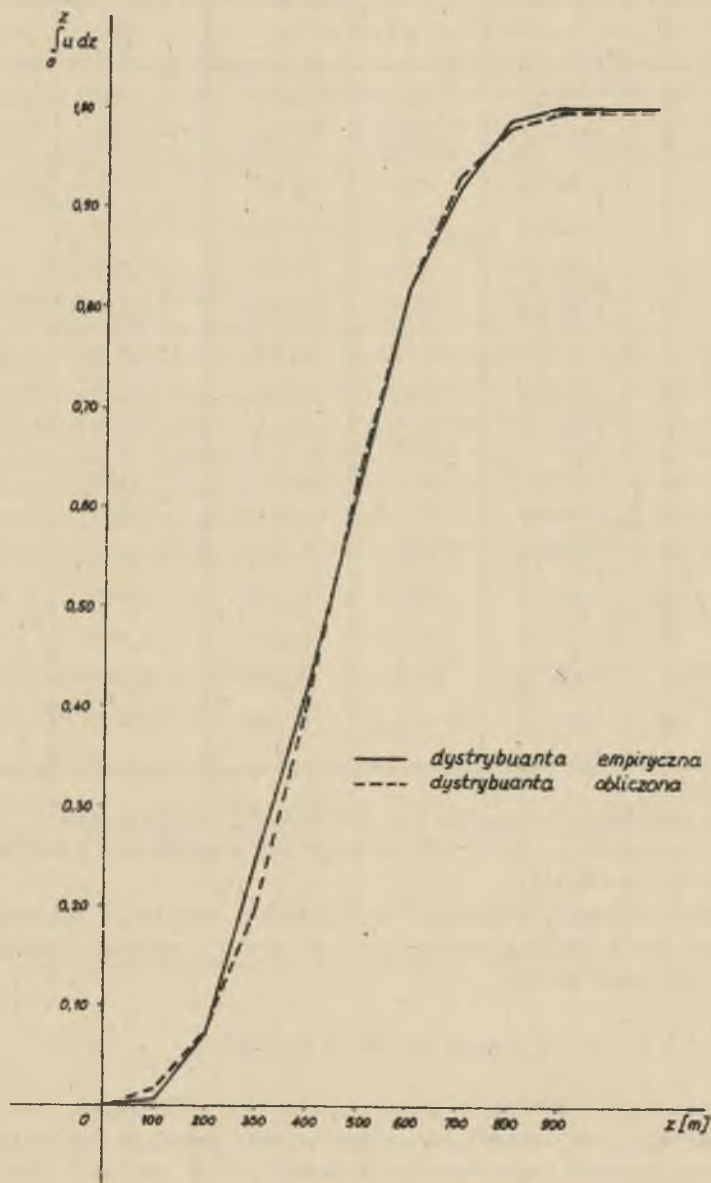
$$t = \frac{R \sqrt{n-3}}{\sqrt{1-R^2}}, \quad (6)$$

gdzie:

- R - współczynnik korelacji,
- n-3 - ilość stopni swobody krzywej (1),
- t - ma rozkład Studenta.

Dla 6 stopni swobody i poziomu istotności $\alpha = 0,005$ i $\alpha = 0,001$ krytyczna wartość współczynnika korelacji wynosi:

$$R_{0,005;6} = 0,870; \quad R_{0,001;6} = 0,925$$



Rys. 2. Dystrybuanta wydobycia wg głębokości 1975 r.

Tablica 2

Parametry strukturalne i zbieżności stochastycznej rozkładu wydobywania
w latach 1960-75

Rok	t	h	g	S_u	R_{uz}^2	R_{uz}
1960	1	332,0	162,4	0,032	0,898	0,947
1	2	339,9	161,9	0,035	0,882	0,939
2	3	343,6	163,0	0,028	0,921	0,959
3	4	345,9	172,2	0,033	0,870	0,933
4	5	349,9	167,5	0,045	0,796	0,892
5	6	353,4	167,2	0,040	0,836	0,914
6	7	358,8	167,6	0,038	0,845	0,919
7	8	368,5	168,1	0,030	0,897	0,947
8	9	371,0	168,0	0,035	0,873	0,934
9	10	379,6	169,1	0,025	0,929	0,964
1970	11	380,4	171,9	0,022	0,940	0,969
1	12	395,0	169,7	0,035	0,865	0,930
2	13	405,7	168,2	0,034	0,867	0,931
3	14	421,5	166,5	0,031	0,891	0,944
4	15	429,2	168,1	0,030	0,895	0,946
5	16	442,4	173,4	0,030	0,888	0,942

Tak więc wszystkie obliczone dla lat 1960-75 współczynniki korelacji są istotne na poziomie $\alpha = 0,005$ ($R > 0,870$), a większość nawet na poziomie $\alpha = 0,001$ ($R > 0,925$).

Aby zbadać tendencję rozwojową współczynnika korelacji założono liniową zależność współczynnika determinacji od czasu i metodą najmniejszych kwadratów otrzymano model:

$$R_{uz}^2(t) = 0,86983 + 0,00131 t \quad (7)$$

Ponieważ z testu istotności parametrów modelu (7) wynika, że współczynnik regresji jest nieistotnie różny od zera nawet na poziomie $\alpha = 0,5$, można założyć stałość współczynnika determinacji w czasie z dokładnością do składnika losowego:

$$R_{uz}^2(t) = \frac{\sum_{i=1}^n R_{uz,i}^2}{n} = 0,88081 \quad (0,009) \quad (8)$$

Odchylenie standardowe składnika losowego $S_{R^2} = 0,036$

Odchylenie względne $W_{R^2} = 100 \frac{S_{R^2}}{R_{uz}^2} = 4,1\%$

Stalność i wysoki poziom współczynnika determinacji w latach 1960-75 pozwala wnioskować, że również w latach następnych rozkład wydobywania z głębokością eksploatacji będzie można z dużą dokładnością aproksymować równaniem krzywej normalnej. Wartości standardowego błędu oceny udziału wydobywania z poszczególnych podziałów głębokości wahają się dla poszczególnych lat w granicach:

$$S_u = 0,002 - 0,045$$

i w porównaniu ze średnim udziałem z przedziału głębokości $\bar{u} = 0,111$ są dość duże. Nakazuje to zachować sporą ostrożność przy ocenie wydobywania z konkretnego 100 metrowego przedziału głębokości, lecz nie dyskwalifikuje podobieństwa empirycznego rozkładu wydobywania w całości do rozkładu normalnego. Z przedstawionego na rys. 2 porównania dystrybucji rozkładu w roku 1975 wynika, że w im większych przedziałach głębokości rozpatruje się wielkość wydobywania, tym mniejsze zachodzą różnice pomiędzy wartością empiryczną i obliczoną, a względny błąd oceny dla dystrybucji przyjmuje mniejsze wartości niż dla krzywej gęstości (w roku 1975 4,7% wobec 27% dla gęstości).

2. MODELE TENDENCJI ROZWOJOWYCH PARAMETRÓW STRUKTURALNYCH ROZKŁADU WYDOBYWANIA. PROGNOZY

Obliczone dla poszczególnych lat i zestawione w tabl. 2 średnio ważone głębokości eksploatacji dla poszczególnych lat wykazują wyraźną zależność paraboliczną od czasu. Przyjmując poniższy model tendencji rozwojowej

$$h(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad (9)$$

metodą najmniejszych kwadratów [3] uzyskano następujące oszacowanie jego parametrów:

$$h(t) = 335,87602 + 0,64535t + 0,37100t^2 \quad (10)$$

(2,7082) (0,73323) (0,04192),

a parametry zmienności stochastycznej wynoszą:

$$S_h = 3,169 \quad W_h = \frac{S_h}{h} \cdot 100 = 0,845\%$$

$$R_h^2 = 0,992475 \quad R_h = 0,996.$$

Błędy standardowe estymatorów parametrów strukturalnych wynoszą odpowiednio:

$$S(a_0) = 2,7082 \quad S(a_1) = 0,7332 \quad S(a_2) = 0,0419$$

Istotność parametrów zbadano testem Studenta [3]:
dla hipotezy H_0 :

$$[a_i = 0], \quad t = \frac{a_i}{S} \cdot (a_i) \quad (11)$$

$$t_0 = 124,02 \quad t_1 = 0,88 \quad t_2 = 8,85$$

$$t_{0,05; 13} = 2,160$$

Tak więc w wypadku a_1 nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej $[a_1 = 0]$ i zachodzi konieczność zrezygnowania z modelu (10). Przebadano model:

$$h(t) = a_0 + a_2 t^2 \quad (12)$$

otrzymując metodę najmniejszych kwadratów postać:

$$h(t) = 338,00698 + 0,40687 t^2 \quad (13)$$

Parametry zmienności stochastycznej modelu (13) wynoszą:

$$S_h = 3,232 \quad W_h = 100 \cdot \frac{S_h}{h} = 0,959\%$$

$$R_h^2 = 0,992174$$

$$R_h = 0,996$$

Macierz wariancji i kowariancji parametrów strukturalnych modelu (14) ma postać:

$$D^2(a_i) = S_h^2 \cdot \begin{vmatrix} 0,14658 & -0,00089928 \\ -0,00089928 & 0,0000096179 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Błędy standardowe estymatorów parametrów strukturalnych wynoszą:

$$S(a_0) = 1,23740 \quad S(a_2) = 0,01002$$

Równanie (13) można zapisać w postaci:

$$h(t) = 338,00698 + 0,40687 t^2 \quad (15)$$

$$(1,23740) \quad (0,01002)$$

Parametry modelu (15) wykazują wysoką istotność.

Analiza reszt modelu (15) wykazuje: losowość, symetrię, stacjonarność, brak autokorelacji, nieobciążoność i normalność składnika losowego. Wyników przeprowadzonych badań ze względu na ramy artykułu nie zamieszczono.

Tak zweryfikowany model może służyć dla celów predykcji. Podstawowym miernikiem efektywności prognozy jest wariancja predykcji [2]:

$$v_n^2 = \sum_{i=1}^k X_{iT}^2 \cdot D^2(a_i)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>i} X_{iT} X_{jT} \text{cov}(a_i, a_j) + S_h^2 \quad (16)$$

Po wstawieniu do wzoru (16) odpowiednich wartości z macierzy (14) i uproszczeniu otrzymuje się:

$$v_h^2 = S_h^2 (0,0000096179 t^4 - 0,00179856 t^2 + 1,14658) \quad (17)$$

dla $t > 16$

Wartość błędu predykcji i błędu względnego w wybranych latach przedstawia tabl. 3.

Tablica 3

Wartość prognozy i błędu predykcji średniej głębokości eksploatacji

Rok	1976	1977	1978	1980	1985	1990
t	17	18	19	21	26	31
h(t)	455,6	469,8	484,9	517,4	613,1	729,0
$v_h(t)$	3,865	4,054	4,276	4,320	6,722	9,312
$\frac{v_h(t)}{h(t)}$	0,0085	0,0086	0,0088	0,0093	0,0110	0,0128

Obliczone wartości względnych błędów predykcji świadczą o wysokiej efektywności prognozy dokonanej modelem (15). Aby otrzymać pełną prognozę rozkładu wydobycia danego równaniem (1) oprócz modelu tendencji rozwojowej średnio ważonej głębokości eksploatacji konieczne jest znalezienie zależności od czasu odchylenia standardowego średniej głębokości. Analiza wartości zawartych w tabl. 2 wskazuje na zależność liniową. Przyjęto następujący model tendencji rozwojowej:

$$g(t) = b_0 + b_1 t \quad (18)$$

i metodą najmniejszych kwadratów uzyskano poniższe oszacowanie jego parametrów:

$$\hat{G}(t) = 164,1575 + 0,4285 t \quad (19)$$

(1,407) (0,1455)

Parametry zmienności stochastycznej wynoszą:

$$S_G = 2,683 \quad W_G = 1,599\%$$

$$R_G^2 = 0,37935 \quad R_G = 0,616$$

Niska wartość S_G i W_G świadczy o dobrym dopasowaniu modelu do danych empirycznych mimo małej - wynikającej ze stosunkowo niewielkiej wartości współczynnika regresji - korelacji odchylenia standardowego rozkładu z czasem.

Błędy standardowe estymatorów parametrów strukturalnych wynoszą:

$$S(b_0) = 1,4070 \quad S(b_1) = 0,1455.$$

Parametry modelu (19) wykazują wysoką istotność, a przeprowadzona analiza reszt modelu wykazała, że nie ma podstaw do jego odrzucenia.

Tak więc modelem (19) można posłużyć się w celu obliczenia wartości \hat{G} w okresach przyszłych.

Miernikiem efektywności predykcji jest wariancja predykcji obliczana wzorem (16). Dla modelu (19) wzór na wariancję przyjmuje postać

$$V^2 = S_G^2 (0,00294 t^2 - 0,05 t + 1,275) \quad (20)$$

dla $t > 16$

Wartość błędu predykcji i błędu względnego w wybranych latach przedstawia poniższa tabela.

Tablica 4

Wartość prognozy i błędu predykcji odchylenia standardowego rozkładu

Rok	1976	1977	1978	1980	1985	1990
t	17	18	19	21	26	31
$\hat{G}(t)$	171,4	171,9	172,3	173,2	175,3	177,4
$V_G(t)$	3,029	3,091	3,159	3,309	3,759 ¹	4,285
$\frac{V_G(t)}{\hat{G}(t)}$	0,0177	0,0180	0,0183	0,0191	0,0214	0,0242

Aproksymację gęstości udziału wydobycia z poszczególnych głębokości eksploatacji krzywą normalną, a także wyznaczone modele tendencji rozwojowych parametrów strukturalnych rozkładu wydobycia wykorzystać można do celów predykcji.

LITERATURA

- [1] HELLWIG Z.: Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa 1972.
- [2] PAWŁOWSKI Zb.: Teoria prognozy ekonometrycznej w gospodarce socjalistycznej, PWN, Warszawa 1968.
- [3] VOLK W.: Statystyka stosowana dla inżynierów. WNT, Warszawa 1973.

МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДОБЫЧИ КАМЕННОГО УГЛЯ ПО ГЛУБИНЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Р е з ю м е

Опираясь на анализ добычи угля в 1960-1975 гг. по глубине эксплуатации, проведено аппроксимацию плотности добычи из отдельных глубин кривой нормальной. Определено также модели развивающихся тенденции структурных параметров распределения добычи.

THE MODEL FOR COAL OUTPUT DISTRIBUTION BY THE MINING DEPTH

S u m m a r y:

On the basis of coal output analysis of 1960-1975 according to the mining depth, an approximation of mining quota density in each particular depth has been made by a normal curve.