ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 60 Budownictwo z.8 1962

JÓZEF ŚLIWA

Z DYNAMIKI PODŁOŻA QUASI - SPRĘŻYSTEGO

1. Wstęp

Każde podłoże, a podłoże gruntowe w szczególności nie jest ciałem doskonale sprężystym, lecz stanowi ośrodek o różnych własnościach i stąd też zachodzące w nim procesy fizyczno-mechaniczne mogą być przez podstawowe równanie teorii sprężystości opisane tylko w przybliżeniu.
Przyjmując pewien uproszczony, jednakże w miarę zbliżający się do rzeczywistego ośrodka, model fizykalny ciała, wyodrębniamy zawsze jego najważniejsze i decydujące o zachowaniu się ośrodka cechy, nie uwzględniamy zaś cech mających mniejszy wpływ.
Te ograniczające przyjęcia robimy po to, by skomplikowany proces w złożonym ośrodku móc analizować matematycznie możliwie przy pomocy niezłożonego aparatu, a sam wynik by był przedstawiony w formie zamkniętej i prostej, jako najbardziej użytecznej dla celów praktycznych. Otrzymane wyniki powinny nam dać dane o zjawiskach zachodzących w interesującym nas ośrodku.

2. Charakterystyka dynamiczna podłoża

2.1. Model fizykalny podłoża

Jedną ze swoistych własności gruntów, mającą istotne znaczenie dla mechaniki podłoża gruntowego, jest ich rozdrobnienie tj., że nie należą one do kategorii ściśle ośrodków ciągłych, lecz do ciał utworzonych z poszczególnych stałych cząstek, nie powiązanych pomiędzy sobą lub powiązanych tak, że siły wiążące są wielokrotnie mniejsze aniżeli wytrzymałość materiału składowego samych cząstek.
W czasie drgań poszczególne cząstki podłoża doznają nie tylko przemieszczeń sprężystych, lecz również zostają przesunięte względem siebie. To przesunięcie cząstek względem siebie jest szczególną cechą charakterystyczną gruntów jako ciał rozdrobnionych i niedoskonale sprężystych.

Podczas gdy przemieszczenie sprężyste zachodzi bez straty energii, to już przesunięcie względem siebie cząstek, czyli przesunięcie niesprężyste powoduje nieodwracalne zużycie energii.
Właściwość pochłaniania energii w trakcie odkształcania ciała stałego związana z jego niedoskonałością sprężystą jest w literaturze technicznej opisywana przy pomocy analizy różnych cech niesprężystych występujących w danym ośrodku. Mamy tu przede wszystkim takie pojęcie jak: tarcie wewnętrzne, opór lepkości, lepkość dynamiczna, histereza sprężysta, tłumienie i inne[x].
Wymienione cechy występują w różnych ośrodkach w różnym stopniu, lecz można je wszystkie ująć wspólnym terminem jako niesprężyste.

Ponieważ zjawiska zachodzące w przyrodzie nie występują w sposób odizolowany, lecz są ściśle ze sobą połączone i nawzajem na siebie oddziaływują, dlatego też dla określenia właściwości pochłaniania energii sprężystej przez podłoże, należy przyjąć interpretację możliwie niezawężającą istoty procesu.
Zgodnie z tym przyjęto w tej pracy model podłoża posiadający cechy sprężyste i niesprężyste.
Niesprężystą charakterystykę podłoża opisano przez niesprężysty opór wewnętrzny będący siłą hamującą proces drgań i proporcjonalną do naprężeń w ich bezwzględnej wartości.
W procesie falowym siły niesprężystego oporu wewnętrznego zmieniają skierowanie wraz z osiągnięciem maksymalnego wychylenia, to jest co pół długości fali. Zatem postać występujących w czasie drgań ośrodka sił niesprężystych będzie w analogii do tarcia Coulomba:

$$N = \pm f \, |P|$$

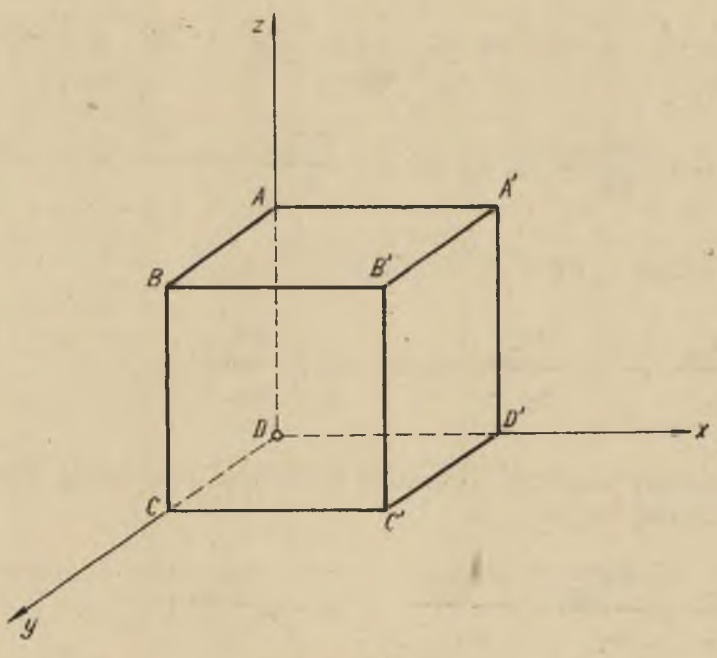
gdzie:
- f - współczynnik niesprężystego oporu wewnętrznego,
- P - siła oddziaływań ośrodka.

---

x) Przegląd analizy teoretycznej najbardziej popularnych modeli ciała stałego zawierają np. prace: Kolsky ego [1] Kaliskiego [2], Ewinga i in. [3].

2.2. Równania równowagi dynamicznej podłoża

W mechanice ośrodków ciągłych jednym z podstawowych obiektów analizy jest elementarny równoległościan. Ponieważ interesujące nas zagadnienie dotyczy ośrodka sprężystego o dodatkowej charakterystyce niesprężystej, dlatego też posłużymy się i tu nim. Wyodrębnijmy zatem wewnątrz obciążonego ośrodka element objętości w postaci prostopadłościanu (rys.2-1), którego krawędzie przebiegają równolegle do prostokątnego układu osi współrzędnych x, y, z.



Rys.2.1.

Wartości naprężeń występujących na ścianach tego prostopadłościanu są funkcją zmiennych x, y, z określających jego położenie.

Na ścianę ABCD oraz A′ B′ C′ D′ przypadają siły

$$(-\sigma_x \pm f\,\sigma_x)\,dy\;dz \tag{2.2}$$

i $$\left(\sigma_x \pm f\,\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx \pm f\,\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz \tag{2.3}$$

Wypadkowa sumy rzutów na oś x sił pochodzących od naprężeń normalnych będzie

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \pm f\,\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz = \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}\,dV \tag{2.4}$$

Rzuty na oś x sił ze ścian AA′ DD′ i BB′ CC′ dają wypadkową

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \pm f\,\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz = \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y}\,dV \tag{2.5}$$

zaś ze ścian AB A′B′ i CD C′D′ będzie

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \pm f\,\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z}\,dV \tag{2.6}$$

Teraz możemy napisać pierwsze z równań równowagi dynamicznej elementarnej bryły

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X\varrho = \varrho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.7a}$$

Dwa pozostałe równania równowagi dynamicznej będą:

$$\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + Y\varrho = \varrho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{2.7b}$$

$$\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + Z\varrho = \varrho\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.7c}$$

W równaniach tych oznaczono:

u, v, w - składowe przemieszczenia elementu w kierunku odpowiednio osi x,y,z;
ϱ - gęstość ośrodka,
X, Y, Z - rzut siły masowej odpowiednio na oś x,y,z;
t - czas.

Wprowadzimy teraz do analizy zagadnienia stałe Lamego związane z modułem sprężystości podłużnej - E, z modułem sprężystości poprzecznej G i współczynnikiem Poissona materiału ośrodka ν związkami:

$$L = \frac{\nu}{(1+\nu)\ (1-2\nu)} \cdot E = \frac{2\nu}{1-2\nu} \cdot G \tag{2.8}$$

$$M = \frac{1}{2\ (1+\nu)} \cdot E \tag{2.9}$$

Dalej pisząc równania Cauchy'ego dla odkształceń:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \ \ldots\ , \ \ldots, \tag{2.10}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.11}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Odpowiednie naprężenia można zapisać w postaci:

$$\sigma_x = L\,\Theta + 2\,M\,\varepsilon_x \tag{2.12}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

oraz

$$\tau_{xy} = M\ \gamma_{xy}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{2.13}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

gdzie okształcenie objętościowe

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.14}$$

Wprowadzając następnie operator harmoniczny Laplaceła

$$\nabla^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \tag{2.15}$$

dla $\alpha = u, v, w$

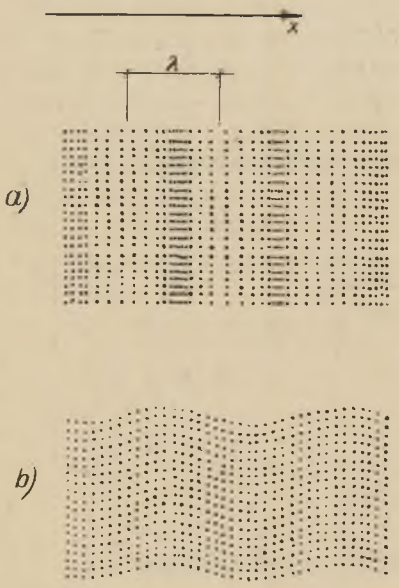
można równanie (2.7) przekształcić i doprowadzić do układu podstawowych równań wyrażających równowagę dynamiczną ośrodka tj. do postaci równań Lamego, a mianowicie nie uwzględniając tu sił masowych otrzymamy:

$$\begin{aligned}
&(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial x} + M\nabla^2 u \pm f\left[(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial x} + M\nabla^2 u\right] = \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
&(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial y} + M\nabla^2 v \pm f\left[(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial y} + M\nabla^2 v\right] = \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
&(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial z} + M\nabla^2 w \pm f\left[(L+M)\frac{\partial \theta}{\partial z} + M\nabla^2 w\right] = \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

3. Fale sprężyste w podłożu

Rozważmy teraz zagadnienie fal rozprzestrzeniających się w ośrodku o opisanej charakterystyce.
Zgodnie z dynamiczną teorią sprężystości w ośrodku nieograniczonym rozchodzą się od źródła zaburzenia dwa rodzaje fal: fale podłużne i fale poprzeczne.
Fale te rozchodzą się z różnymi prędkościami. Gdy drgania cząstek ośrodka i rozchodzenie się fal zachodzi wzdłuż tej samej prostej to falę taką nazywamy falą podłużną. Fale te charakteryzują się tym, że przy ich przejściu występują w ośrodku fazy ściskania i rozciągania (rys.3-1a).
W czasie tego procesu cząsteczki ośrodka nie doznają jednak obrotu.

Jeśli zaś wychylenia cząstek ośrodka są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się drgań, to falę taką nazywa się falą poprzeczną.



Rys.3.1.

Fale poprzeczne wywołują kąty odkształcenia postaciowego i obroty, nie powodując ściskania i rozciągania (rys.3-1b). Gdy zaś ośrodek będzie ograniczony, a w szczególności będzie półprzestrzenią, to wtedy wystąpią również fale specjalnego rodzaju związane z powierzchnią tzw. fale powierzchniowe.

Największe znaczenie dla praktyki inżynierskiej przedstawiają dwa rodzaje fal powierzchniowych.
Pierwsze - to fale Rayleigha, których składowe wychylenia leżą w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni granicznej półprzestrzeni.
Drugi typ fal powierzchniowych - to fale Love'a. Fale Love'a występują przy uwarstwieniu półprzestrzeni.

3.1. Fale podłużne

Korzystając z równań (2.16) i oznaczając względne odkształcenia objętościowe przez θ oraz

$$\nabla^2\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{3.1}$$

równanie falowe przyjmie postać

$$(L+M)\,\nabla^2\theta + M\nabla^2\theta \pm f\left[(L+M)\nabla^2\theta + M\,\nabla^2\theta\right] = \varrho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \tag{3.2}$$

Jeżeli składowe obrotu tj.

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.3}$$

.....

.....

znikają, czyli $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$, otrzymamy równanie fali podłużnej w postaci:

$$c_1^2 \nabla^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \tag{3.4}$$

dla $\alpha = u, v, w$

gdzie $$c_1 = \left[\frac{L + 2M}{\varrho}(1 + f)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

oznacza prędkość fali podłużnej w opisywanym ośrodku.

3.2. Fale poprzeczne

W przypadku fal poprzecznych odkształcenie objętościowe jest równe zeru, czyli $\Theta = 0$.
Stąd równanie (2.16) przyjmie postać

$$M \nabla^2 u \pm f M \nabla^2 u = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{3.6}$$

.....

.....

Składowe elementarnego obrotu są tu różne od zera, czyli $\omega_i \neq 0$.
Stąd też równanie falowe można zapisać:

$$c_t^2 \nabla^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} \tag{3.7}$$

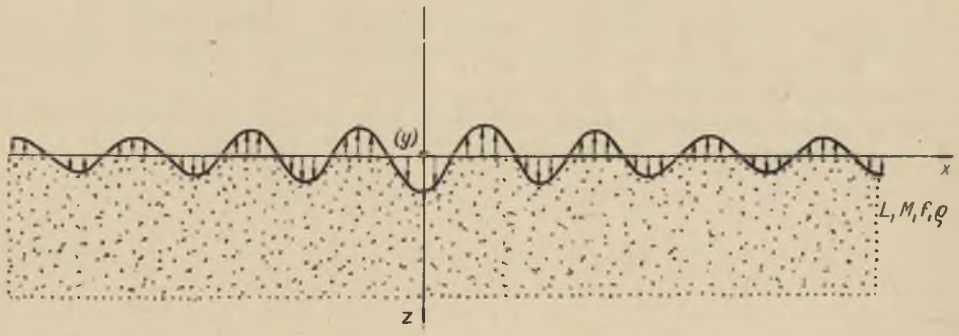
dla $\alpha = u, v, w$.

gdzie
$$c_t = \left[\frac{M}{\varrho}(1 \pm f)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.8}$$

oznacza prędkość fali poprzecznej.
W ogólności zaburzenia dynamiczne w ośrodku mają charakter złożony składający się z okształcenia objętościowego i postaciowego. Dlatego powstają jednocześnie obie fale tj. fale podłużne i poprzeczne.
Z porównania wzorów (3.5) i (3.8) wynika, że prędkość fal podłużnych jest większa niż fal poprzecznych, stąd też fale te rozchodząc się od źródła zaburzenia wkrótce ulegają rozłączeniu i przenoszą się niezależnie od siebie.

3.3. Fale Rayleigha

Fale Rayleigha są falami powierzchniowymi - pionowymi (rys.3.2).



Rys.3.2

Wychodząc z równań równowagi dynamicznej i obierając drogę postępowania stosowaną w analizie fal sprężystych, dojdziemy do równań falowych rozdzielających wpływ odkształceń objętościowych i obrotowych tj.

$$(1 \pm f) \cdot (L + 2M)\, \nabla^2 \varphi = \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \tag{3.9}$$

$$(1 \pm f) \cdot M\, \nabla^2 \psi = \varrho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{3.10}$$

φ i ψ są to potencjały sprężyste wiążące przemieszczenia w postaci:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (3.11)$$

Stąd też

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta \\ \nabla^2 \psi &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\,\omega_y \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

Przyjmując dalej funkcje przemieszczeń podane przez Rayleigha |4| można już łatwo obliczyć prędkość fali powierzchniowej - pionowej w podłożu.
Przy nieobciążonej powierzchni i gdy stałe Lamego są sobie równe, czyli $L = M$ prędkość fali będzie wynosić:

$$c_R = 0{,}9194 \cdot \left[\frac{M}{\varrho}(1 + f)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3.13)$$

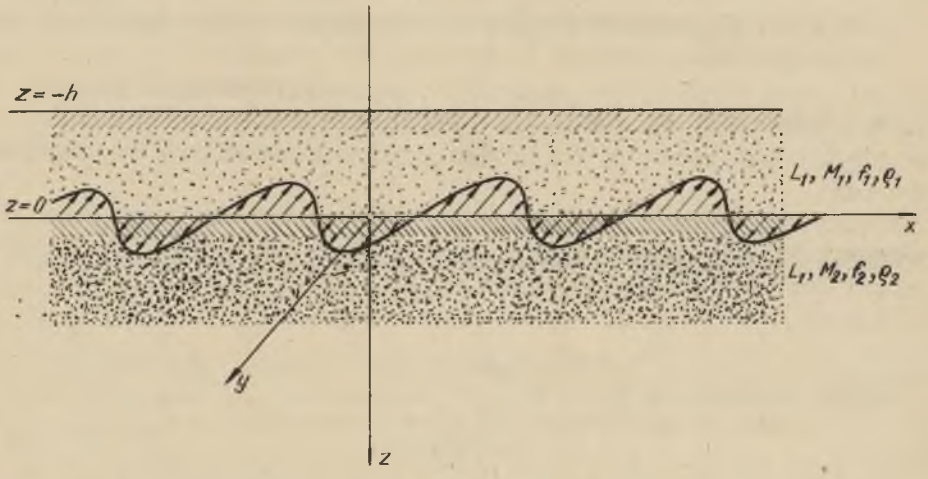
Prędkość tej fali jest zatem mniejsza aniżeli prędkość fali poprzecznej.

3.4. Fale Love'a

Przyjmijmy, że na półprzestrzeni zalega warstwa sprężysta o stałej grubości h. Odpowiednie charakterystyki ośrodków będą: dla warstwy L_1, M_1, ϱ_1, f_1; dla półprzestrzeni L_2, M_2, ϱ_2, f_2 (rys.3.3).

Równanie falowe dla warstwy półprzestrzeni będzie mieć postać:

$$\left.\begin{aligned}(1 \pm f_1)\left[(L_1+M_1)\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + M_1 \nabla^2 v_1\right] &= \varrho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\\ (1 \pm f_2)\left[(L_2+M_2)\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + M_2 \nabla^2 v_2\right] &= \varrho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$



Rys.3.3

Warunki brzegowe zagadnienia są następujące:
powierzchnię górną warstwy spoczywającej na półprzestrzeni przyjmujemy jako nieobciążoną, czyli

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \qquad \text{dla} \quad z = -h \qquad (3.15)$$

oraz, że naprężenia i przemieszczenia na granicy warstwy i półprzestrzeni czyli dla $z = 0$ są sobie równe:

$$v_1 = v_2 \qquad (3.16)$$

Wykorzystując warunki brzegowe otrzymamy, że prędkość fali Love'a jest większa aniżeli prędkość fali poprzecznej przy charakterystykach warstwy, czyli

$$c_L > c_{t_1} \tag{3.17}$$

i mniejsza od prędkości fali poprzecznej o charakterystykach półprzestrzeni tj.

$$c_L < c_{t_2} \tag{3.18}$$

Dalej stąd wynika, że prędkość rozprzestrzeniania się fal Love'a jest zawarta pomiędzy prędkością fal poprzecznych w górnej warstwie, a prędkością fal poprzecznych w półprzestrzeni.
Związki te dowodzą, że aby fale Love'a mogły się rozprzestrzeniać, sprężystość warstwy powinna być mniejsza aniżeli niżej leżącej półprzestrzeni.

LITERATURA

1. H.Kolsky - Stress Waves in Solids Oxford, 1953.

2. S.Kaliski - Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych WAT - Warszawa, 1957.

3. W.M.Ewing, W.S. Jardetzky, F.Press - Elastic Waves in Layered,Media, McGraw - Hill Book Company, Inc. New York, Toronto, London, 1957.

4. J.W.S. Rayleigh - On Waves Progagated Along the Plane Surface of an Elastic Solid, Proceeding of the Mathematical Society, vol.17, London 1885.

ИЗ ДИНАМИКИ КВАЗИ-УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ

Краткое содержание

В статье представлено модель основания учитывая её упругие свойства, обусловливающие распространение волн, а также свойства неупругие, вызывающие в среде поглощение энергии упругой волны.

Неупругую характеристику основания, так называемое неупругое внутреннее сопротивление среды описано аналогично внутренному трению Coulomba. Для принятой модели основания выведено уравнение движения. Выводя уравнения волн проведено анализ объёмных и поверхностных волн.

ON THE DYNAMICS OF QUASI-ELASTIC FOUNDATION

Summary

In the paper a model of foundation has been represented with taking into consideration its elastic features as the base of wave propagation and its inelastic features causing the absorption of elastic wave energy in the medium.

Inelastic characteristic of foundation has been described in analogy to the internal Coulomb's friction, so called unelastic internal resistance of the medium.

For the assumed foundation model the dynamic equation and waves equations have been derived, and the analysis of longitudinal, transverse and surface waves has been carried out.