ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 60 Budownictwo z.8 1962

ZDZISŁAW SULIMOWSKI

WYZNACZENIE OPTYMALNEJ WYSOKOŚCI BELKI KABLOBETONOWEJ

1. Wprowadzenie

W dotychczasowej praktyce projektowej wysokość belek sprężonych kablami przyjmuje się empirycznie za Guyonem

$$h = 0,10 + \frac{1}{25}\,l \quad \text{dla belek o rozpiętości od 20 do 40 m,}$$

$$h = \frac{1}{20}\,l \quad \text{dla belek o rozpiętości powyżej 40 m.}$$

Trudno jednak nie zauważyć, że na wysokość belki sprężonej, oczywiście oprócz jej rozpiętości, ma jeszcze wpływ szereg innych parametrów jak: wielkość obciążeń w poszczególnych stanach, naprężenia dopuszczalne dla betonu i ukształtowanie przekroju poprzecznego belki.
W przypadku zakresu 0-2 dochodzi tu jeszcze współczynnik strat.

Wielkości obciążeń i parametry materiałowe są najczęściej od projektanta niezależne, za to dzięki poprawnemu, najbardziej ekonomicznemu ukształtowaniu przekroju poprzecznego uzyskać można rozwiązanie optymalne.
Kształt przekroju poprzecznego belki (najczęściej dwuteowy) charakteryzują dwa parametry, przy spełnieniu których wiemy, że przekrój jest jeszcze konstrukcyjny i najbardziej ekonomiczny.
Pierwszy z tych parametrów, to wskaźnik wydajności ϱ, obrazujący rozłożenie masy przekroju w kierunku pionowym. Możemy wyrazić go w relacji:

$$\varrho = \frac{i^2}{vv'} \tag{1.1}$$

lub $$\varrho = \frac{W'}{Fv} = \frac{W}{Fv} \qquad (1.2.1)\ (1.2.2)$$

gdzie:

v i v′ są kolejno odległościami górnego i dolnego włókna od środka ciężkości przekroju,

i^2 - jest kwadratem promienia bezwładności,

F - jest polem przekroju,

W i W′ są wskaźnikami wytrzymałości kolejno dla górnego i dolnego włókna.

Dla prostokąta wskaźnik ten wynosi 0,33; wycinając coraz bardziej część środkową przekroju - dochodzimy do granicznej ustalonej praktyką wartości dla przekroju dwuteowego $\varrho = 0{,}55$. Praktycznie podać można, że dla przekroju dwuteowego powinno być $0{,}45 \leq \varrho \leq 0{,}55$, do projektowania przyjmujemy najczęściej wartości $\varrho = 0{,}5$.
Drugim parametrem, jest wskaźnik tęgości przekroju ϑ, który przedstawia nam rozłożenie masy przekroju w kierunku poziomym. Zapisać go możemy w relacji

$$\vartheta = \frac{F}{h^2} \qquad (1.3)$$

Z doświadczenia projektowego wiadomo, że wielkość tego wskaźnika dla przekrojów dwuteowych nie powinna być w zasadzie mniejsza od 0,2 (inaczej wypada zbyt cienki środnik).
Trudno ustalić tu górną granicę zależeć ona może od typu przekroju i charakteru konstrukcji, w każdym razie dla normalnych belek dwuteowych wskaźnik tęgości powinien wahać się od 0,20 do 0,25. Do projektowania zaleca się przyjmować $\vartheta = 0{,}22$. Wyprowadzimy teraz zależności, pozwalające określić wysokość belki jako funkcję znanych parametrów statycznych i materiałowych oraz przyjętych wskaźników ϱ i ϑ.
Przedtem jeszcze wyróżnimy, zgodnie z normą PN-57/B-03320 stany pracy belki:

0. Stan początkowy - działa tu moment od ciężaru własnego (M_g) i początkowa wartość siły sprężającej (S_o).
Naprężenia dopuszczalne oznaczamy k_o i k_o'.

1. Stan bezużytkowy - w którym działa moment od ciężaru własnego belki i wszystkich obciążeń stałych (M_g + ΔM_g), a siła sprężająca (S) jest już ustabilizowana po stratach wg relacji $S = \eta . S_o$, gdzie η jest współczynnikiem strat. Naprężenia dopuszczalne oznaczymy k_1 i k_1'.
2. Stan użytkowy (maksymalny) - kiedy działa na belkę największy moment od obciążeń stałych i użytkowych ($M_g + \Delta M_g + M_p$). Wartość siły sprężającej jest jak w stanie bezużytkowym. Naprężenia dopuszczalne oznaczymy k_2 i k_2'.

Stanu użytkowego minimalnego (2') nie wyróżnimy, ponieważ w wolnopodpartej belce kablobetonowej zdarza się on nader rzadko.

Poszczególne stany łączymy w zakresy projektowania, a ponieważ zawsze żądamy wykorzystania naprężeń ze stanu użytkowego, mamy kolejno dwa zakresy 0-2 i 1-2.

2. Zakres projektowania 0-2

2.1. Przypadek poniżej i na rozpiętość granicznej

Ponieważ dla tego przypadku możemy wykorzystać wszystkie cztery naprężenia, określimy wprost obydwa wskaźniki sztywności.

$$W_o = \frac{(1-\eta)\, M_g + \Delta M_g + M_p}{k_2 - \eta k_o'} \tag{2.1.1}$$

$$W_o' = \frac{(1-\eta)\, M_g + \Delta M_g + M_p}{\eta k_o - k_2'} \tag{2.1.2}$$

Wychodząc z (2.1.2) po uwzględnieniu, że

$$M_g = 0{,}125 \cdot \gamma \cdot F\, l^2$$

gdzie γ jest ciężarem objętościowym betonu, przyjmowanym najczęściej $\gamma = 2{,}5\ T/m^3$, oraz

$$\omega_o = \frac{v'}{v} = \frac{W_o}{W'_o} = \frac{\eta k_o - k'_2}{k_2 - \eta k'_o} \tag{2.1.3}$$

i uwzględniając wskaźniki ϱ i ϑ wg wzorów (1.2.1) i (1.3) po wyredukowaniu F otrzymamy równanie trzeciego stopnia z uwagi na h:

$$h^3\varrho\vartheta(\eta k_o - k'_2) - h^2\vartheta \cdot 0{,}125(1-\eta)(1+\omega_o)\gamma l^2 - (1+\omega_o)(\Delta M_g + M_p) = 0 \tag{2.1.4}$$

Dokładne rozwiązanie tego równania nie jest potrzebne, ponieważ zazwyczaj projektujemy belki o wysokości w interwale 5 cm lub 10 cm; wystarczy zatem znaleźć dwa przybliżenia różniące się właśnie o 5 cm lub 10 cm i dające kolejno nierówność ujemną i dodatnią zamiast równania (2.1.4).
Do projektowania przyjmujemy jedną z tych wartości i w zależności od tego z którego parametru obliczymy F, - uzyskamy nieznaczą, łatwą do przyjęcia w praktyce, odchyłkę drugiego parametru.
Pole przekroju obliczane przy pomocy ϱ wyrazi się wzorem:

$$F = \frac{\Delta M_g + M_p}{\varrho v(\eta k_o - k'_2) - 0{,}125\gamma(1-\eta) l^2} \tag{2.1.5}$$

zaś przy pomocy ϑ wprost

$$F = \vartheta h^2$$

2.2. Przypadek powyżej rozpiętości granicznej

W tym przypadku wykorzystać możemy tylko 3 naprężenia i maksymalny, konstrukcyjnie możliwy mimośród. Będą to obydwa naprężenia ze stanu użytkowego i większe naprężenie ze stanu korespondującego. Wynika stąd, że wprost możemy obliczyć tylko W' (wzór 2.1.2), zaś drugi wskaźnik znajdziemy dopiero znając położenie środka ciężkości przekroju.

Wyznaczymy go przy pomocy znanego równania na $\varkappa = \frac{v'}{h}$

$$\varkappa^2(1-\varrho)(k_2-k_2')+\varkappa\left[k_2'+\varrho(\eta k_o+k_2-2k_2')-\alpha(k_2-k_2')\right]-\frac{\eta l^2}{8h}-\varrho(\eta k_o-k_2')-$$

$$-\alpha k_2' = 0 \qquad (2.2.1)$$

które najczęściej rozwiązujemy przy założeniu $\gamma = 2,5$ T/mb i $\varrho = 0,5$,
a wtedy dostaniemy

$$\varkappa^2 + \varkappa\left(\frac{\eta k_o + k_2}{k_2 - k_2'} - 2\alpha\right) - \frac{2,5\eta l^2}{4h(k_2-k_2')} - \frac{\eta k_o - k_2' + 2\alpha k_2'}{k_2 - k_2'} = 0 \qquad (2.2.2)$$

Stąd oczywiście $v = (1 - \varkappa)h$.
Wychodząc znów z (2.1.2) i uwzględniając (1.2.1), (1.3) oraz powyższe, otrzymamy równanie trzeciego stopnia na h:

$$h^3\varrho\vartheta(1-\varkappa)(\eta k_o-k_2')-h^2\vartheta.0,125(1-\eta)\gamma l^2 - (\Delta M_g+M_p)=0 \quad (2.2.3)$$

a kładąc $\gamma = 2,5$ T/m^3 i $\varrho = 0,5$ będziemy mieli

$$h^3\vartheta(1-\varkappa)(\eta k_o-k_2')-h^2\vartheta.0,625(1-\eta)l^2-2(\Delta M_g+M_p)=0 \quad (2.2.4)$$

Jak widać otrzymujemy układ równań nieliniowych na $\varkappa$ i h.
W praktyce nie ma jednak potrzeby rozwiązywania tego układu, postępujemy wtedy w ten sposób że szacunkowo określamy wielkość $\varkappa$ w zależności od rozpiętości belki,

l (m)	$\varkappa$
10-20	0,50
20-30	0,51
30-40	0,52
40-50	0,53
50-60	0,55

(2.2.5)

zakładamy pożądane ϱ i ϑ, a z równania (2.2.3) lub (2.2.4) obliczamy h z dokładnością do 5 lub 10 cm. Dopiero po przyjęciu h rozwiązujemy równanie na $\varkappa$ i obliczamy pole przekroju wzorem (2.1.5) przy wykorzystaniu wskaźnika ϱ, a następnie sprawdzamy czy rzeczywista wartość współczynnika ϑ nie odbiega zbyt daleko od przyjętej. Zazwyczaj zadowala nas pierwsze przybliżenie, w najgorszym przypadku będzie to przybliżenie drugie wyliczone dla pożądanych ϱ i ϑ i wyznaczonego z pierwszego przybliżenia $\varkappa$.

3. Zakres projektowania 1-2

3.1. Przypadek poniżej i na rozpiętości granicznej

Wskaźniki sztywności dla tego zakresu mają postać:

$$W_1 = \frac{M_p}{k_2 - k_1'} \qquad (3.1.1)$$

$$W_1' = \frac{M_p}{k_1 - k_2'} \qquad (3.1.2)$$

a uwzględniając, że

$$\omega_1 = \frac{v'}{v} = \frac{k_1 - k_2'}{k_2 - k_1'} \qquad (3.1.3)$$

i wprowadzając wskaźniki ϱ i ϑ otrzymamy tu wprost

$$h = \sqrt[3]{\frac{(1 + \omega_1)\, M_p}{\varrho\, \vartheta (k_1 - k_2')}} \qquad (3.1.4)$$

Znaleziona w ten sposób wysokość pozwala dobrać przekrój, dla którego dokładnie spełniają się założone wartości wskaźników ϱ i ϑ. Również i tu możemy zaokrąglić wysokość do 5 lub 10 cm - a wtedy przyjmując do wykorzystania jeden ze wskaźników ϱ lub ϑ poprzez obliczenie przy jego pomocy F), skontrolować możemy, z pewnością nieznaczną, odchyłkę drugiego.

3.2. Przypadek powyżej rozpiętości granicznej

W tym przypadku wykorzystujemy trójkę naprężeń $k_1\ k_2\ k_2'$, a zatem ważny jest wzór na wskaźnik sztywności W_1' - (3.1.2). Równanie na położenie środka ciężkości $\varkappa$ przyjmuje tu postać

$$\varkappa^2(1-\varrho)(k_2-k_2')+\varkappa\left\{k_2'+\varrho\left[k_2-k_2'+\left(1+\frac{\Delta M_g}{M_p}\right)(k_1-k_2')\right]-\alpha(k_2-k_2')\right\}-$$

$$-\frac{\gamma l^2}{8h}-\left(1+\frac{\Delta M_g}{M_p}\right)\varrho(k_1-k_2')-\alpha k_2'=0 \qquad (3.2.1)$$

ewentualnie przy założeniu $\gamma = 2,5\ T/m^3$ i $\varrho = 0,5$.

$$\varkappa^2+\varkappa\left[\frac{k_2+k_2'+\left(1+\frac{\Delta M_g}{M_p}\right)(k_1-k_2')}{k_2-k_2'}-2\alpha\right]-\frac{2,5\ l^2}{4h(k_2-k_2')}-\frac{\left(1+\frac{\Delta M_g}{M_p}\right)(k_1-k_2')+2\alpha k_2'}{k_2-k_2'}=0$$

(3.2.2)

Wysokość h przy założeniach wyjściowych analogicznych jak w pkcie 2.2. znajdziemy ze wzoru

$$h=\sqrt[3]{\frac{M_p}{\varrho\vartheta(1-\varkappa)(k_1-k_2')}} \qquad (3.2.2)$$

a dla $\varrho = 0,5$

$$h=\sqrt[3]{\frac{2\ M_p}{\vartheta(1-\varkappa)(k_1-k_2')}} \qquad (3.2.3)$$

Jak widać do określenia h potrzebna nam tu jest również znajomość $\varkappa$ - w tym przypadku postępujemy identycznie jak w pkcie 2.2; przyjmujemy $\varkappa$ wg (2.2.5), określamy h ze wzoru (3.2.2) i po wyliczeniu rzeczywistej wartości $\varkappa$ wyznaczamy pole przekroju z zależności

$$F=\frac{M_p}{\varrho\ v\ (k_1-k_2')} \qquad (3.2.4)$$

sprawdzając następnie wielkość odchyłki założonej wartości ϑ.

Przedstawione powyżej wzory wyczerpują właściwie najczęstsze przypadki projektowania wolnopodpartej belki kablobetonowej i pozwalają uzyskać optymalne rozwiązania bez potrzeby dokonywania pracochłonnych prób znajdywania najwłaściwszej wysokości przekroju belki.

LITERATURA

1. Y.Guyon - Béton précontraint, wyd.2, Paryż 1953.

2. S.Kaufman - Mosty sprężone. Wydawnictwa Komunikacyjne, Warszawa, 1956.

3. S.Kaufman - Projektowanie przekrojów sprężonych na zasadzie pełnego wykorzystania mimośrodu. Inżynieria i Budownictwo Nr 1, 1957.

4. S.Kaufman i T.Hop - Studium nad racjonalnym kształtowaniem belki sprężonej. Archiwum Inżynierii Lądowej Nr 1, 1959.

5. S.Kaufman i J.Mames - Uogólniony rdzeń przekroju w belce wstępnie sprężonej. Archiwum Inżynierii Lądowej Nr 3-4, 1955.

6. J.Mames - Sprężona belka ciągła. Analiza i projektowanie. Archiwum Inżynierii Lądowej Nr 4, 1957.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

Краткое содержание

В существующих решениях высоту поперечного сечения предварительно напряженной балки принимали единственно в зависимости от пролета балки. На высоту эту однако влияют еще такие факторы как: нагрузки, характеристика материалов, коэффициент потерь и образование поперечного сечения балки.

В работе подано формулы, позволяющие найти высоту балки, как функцию этих факторов и получить таким образом оптимальное решение. Вопрос решен для пределов проектирования 0—2 и 1—2, учитывая случай ниже и выше предельного пролета балки.

DETERMINATION OF ECONOMICAL DEPTH OF POST-TENSIONED PRESTRESSED BEAM

Summary

In up to the present time solutions the depth of prestressed beam cross-section was assumed merely in dependance upon the beam span. But on this magnitude have an influence still other factors like loads, material characteristics, loss coefficient and shape, of beam cross-section.

In this paper formulae have been given, which permit to find the beam depth as a function of these factors andto achieve in this way an optimal solution. The problem was solved for the design ranges 0—2 and 1—2 taking into consideration a case above and below the critical span.