ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 60 Budownictwo z.8 1962

CZESŁAW WOŹNIAK

NAPRĘŻENIA DRUGORZĘDNE W PRĘTACH PŁASKO ZAKRZYWIONYCH

Wstęp

W technicznej teorii prętów składowe stanu naprężenia i odkształcenia można podzielić na p o d s t a w o w e (normalne do przekroju poprzecznego) oraz d r u g o r z ę d n e. Założenia teorii technicznej (omówione np. w [1], s.139-148) umożliwiają określenie rozkładu naprężeń podstawowych niezależnie od odkształceń i naprężeń drugorzędnych. Te ostatnie można z kolei wyznaczyć z warunków równowagi. W tej pracy przedstawiono rozkład naprężeń drugorzędnych jako wynik działania pewnych operatorów różniczkowo-całkowych na funkcje określające naprężenia podstawowe (par.1). Przyjmując znaną postać tych funkcji, rozpatrzono niektóre zagadnienia związane z prętami słabo - (par. 2) i silnie zakrzywionymi (par.3). Uwzględniono wpływ zmienności przekroju i wpływ obciążenia bezpośredniego na stan napięcia. Założono, że pręt posiada płaszczyznę symetrii, która jest zarazem płaszczyzną jego obciążenia. Spotykane w literaturze przedmiotu wzory dla naprężeń drugorzędnych (np. dla prętów o zmiennym przekroju por. [2] s.62-64, [3], s.172-176, [4] s.20-29) są przypadkami szczególnymi relacji wyprowadzonych w artykule.

W pracy wykorzystano niektóre tezy rozprawy doktorskiej autora [5]. Literami M, Q, N oznaczono kolejno: moment zginający, siłę poprzeczną i siłę osiową. Symbol A oznacza pole przekroju poprzecznego pręta, symbol J moment bezwładności tego przekroju względem osi centralnej, prostopadłej do płaszczyzny symetrii pręta.

1. Naprężenia drugorzędne jako funkcje naprężeń podstawowych

Obszar pręta parametryzowano trójortogonalnym układem współrzędnych s, y, z. Niech s = const, stanowi rodzinę płaszczyzn przechodzących przez przekroje poprzeczne pręta,

$y = \text{const}$ - rodzinę płaszczyzn równoległych do płaszczyzny symetrii pręta $(y = 0)$, $z = \text{const}$ - rodzinę powierzchni walcowych. Przyjmijmy, że krzywa $y = z = 0$ jest osią podłużną pręta, r - promieniem jej krzywizny.

Parametry Lamego dla przyjętego układu współrzędnych niech wynoszą: $K_s = K = 1 + \frac{z}{r}$, $K_y = K_z = 1$. Przekrój poprzeczny pręta jest parametryzowany układem kartezjańskim y, z, $\left(-\frac{b}{2} \leqslant y \leqslant +\frac{b}{2},\ z_1 \leqslant z \leqslant z_2\right)$.

Oznaczmy przez σ_{ss}, $\tau_{zs} = \tau_{sz}$, σ_{zz} składowe fizykalne stanu napięcia w dowolnym punkcie (pozostałych składowych w pracy tej nie wykorzystujemy). Wyodrębnijmy płaszczyznami $s = \text{const}$ $s + ds = \text{const}$ oraz powierzchniami $z = \text{const}$, $z+dz = \text{const}$ element pręta. Warunki równowagi tego elementu, po pominięciu sił masowych, posiadają postać

$$\frac{1}{r}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{zs}\, dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{zs} dy\right) + \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{ss}\, dy = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{zz} dy\right) + \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{zs}\, dy - \frac{1}{r}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{ss}\, dy = 0 \tag{1.1}$$

Pozostałe równania równowagi są tożsamościami z uwagi na istnienie płaszczyzny symetrii naprężeń (płaszczyzna $y = 0$). W dalszym ciągu posługiwać się będziemy tylko średnimi wartościami naprężeń na szerokości przekroju poprzecznego pręta:

$$\sigma_s = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{ss}\, dy,\quad \tau = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \tau_{zs}\, dy,\quad \sigma_z = \frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \sigma_{zz}\, dy. \tag{1.2}$$

Wykorzystując oznaczenia (1.2), nadajmy warunkom (1.1) postać całkową:

$$Kb\tau - \frac{1}{r}\int_{z}^{z_2} \tau\, b\, d\zeta = \int_{z}^{z_2} \frac{\partial(\sigma_s b)}{\partial s}\, d\zeta + \left[Kb\tau\right]_{z=z_2} \qquad (1.3)$$

$$Kb\sigma_z - \int_{z}^{z_2} \frac{\partial(\tau b)}{\partial s}\, d\zeta = -\frac{1}{r}\int_{z}^{z_2} \sigma_s\, b\, d\zeta + \left[Kb\sigma_z\right]_{z=z_2} \qquad (1.4)$$

Równanie (1.3), jest równoważne równaniu całkowemu Volterry dla funkcji $Kb\tau$. Rdzeniem tego równania jest $(r+\zeta)^{-1}$, rezolwenta wynosi $(r+z)^{-1}$ [5] s.14-16), a wzajemne równanie całkowe można doprowadzić do postaci

$$K^2 b\tau = \int_{z}^{z_2} K(\zeta)\, \frac{\partial(\sigma_s b)}{\partial s}\, d\zeta + \left[K^2 b\tau\right]_{z=z_2} . \qquad (1.5)$$

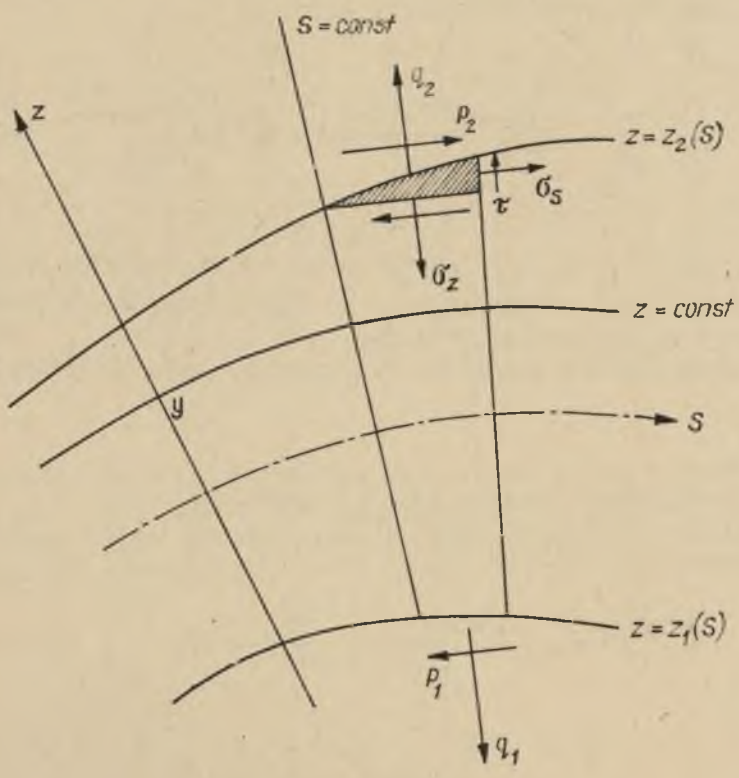
Oznaczmy przez p_2 i q_2 znane składowe obciążenia brzegu $z = z_2$ (działające w kierunkach s i z), wyrażone w jednostkach siły na jednostkę długości o s i pręta.
Z warunków równowagi elementu brzegowego (rys.1) wynikają związki

$$\left.\begin{aligned} \left[Kb\tau\right]_{z=z_2} &= \left[\sigma_s\, b\right]_{z=z_2} \frac{dz_2}{dS} + p_2 \\ \left[Kb\sigma_z\right]_{z=z_2} &= \left[\tau b\right]_{z=z_2} \frac{dz_2}{dS} + q_2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

Podstawiając prawe strony (1.6) do (1.5) i (1.4), po prostych przekształceniach, otrzymamy ostatecznie

$$\tau = (K^2 b)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial s} \int_z^{z_2} K\sigma_s \, b \, d\zeta + K(z_2) \cdot p_2\right) \tag{1.7}$$

$$\sigma_z = (K\, b)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial s} \int_z^{z_2} \tau \, b \, d\zeta - \frac{1}{r} \int_z^{z_2} \sigma_s b \, d\zeta + q_2\right). \tag{1.8}$$



Rys.1

Wzór (1.7) pozwala wyznaczyć średnie wartości naprężeń stycznych τ, gdy znany jest rozkład średnich naprężeń podstawowych $\sigma_s = \sigma_s(s, z)$.

Ze wzoru (1.8) można następnie obliczyć drugorzędne naprężenia normalne. Relacje (1.7) i (1.8) są ścisłe w tym sensie, że przy ich wyprowadzeniu nie korzystano z żadnych założeń upraszczających.

2. Pręt słabo zakrzywiony

Prętem słabo zakrzywionym nazwiemy pręt, w którym wartość $\frac{z_{max}}{r}$ jest niewielka w porównaniu z jednością; we wzorach (1.7) i (1.8) można więc przyjąć $K = 1$. Rozkład naprężeń podstawowych jest taki sam jak dla pręta prostego:

$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{M}{J} z$. Podstawiając wyrażenie na σ_s do (1.7) i korzystając z poniższych relacji (por. np. [5] s.217; q_1 i p_1 są składowymi obciążenia brzegu $z=z_1$, wyrażonymi w jednostkach siły na jednostkę długości osi pręta).

$$\left.\begin{aligned} \frac{dM}{dS} &= Q + z_1 p_1 - z_2 p_2 \\ \frac{dQ}{dS} &= \frac{N}{r} + q_1 - q_2 \\ \frac{dN}{dS} &= -\frac{Q}{r} + p_1 - p_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

otrzymamy

$$\tau = \frac{1}{b}\left[\frac{-Q+rp_1-rp_2}{r}\int_z^{z_2} b\,d\zeta + \frac{Q+z_1p_1-z_2p_2}{J}\int_z^{z_2}\zeta b\,d\zeta + \right.$$
$$\left. + N\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{A}\int_z^{z_2} b\,d\zeta\right) + M\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{J}\int_z^{z_2}\zeta b\,d\zeta\right) + p_2\right] \tag{2.2}$$

Wprowadzając następujące oznaczenia (poniższe funkcje dla prętów o przekroju zmiennym zależą również od s):

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \int_{z_1}^{z} b\,d\zeta, & A_2 &= \int_{z}^{z_2} b\,d\zeta, & A_z &= A_2 - A_1 \\ S_1 &= \int_{z_1}^{z} \zeta\, b\,d\zeta, & S_2 &= \int_{z}^{z_2} \zeta\, b\,d\zeta, & S_z &= S_2 - S_1 \\ I_1 &= \int_{z_1}^{z} \zeta^2\, b\,d\zeta, & I_2 &= \int_{z}^{z_2} \zeta^2 b\,d\zeta, & I_z &= I_2 - I_1 \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

wzorowi na naprężenia styczne nadamy postać

$$\tau = \frac{Q\,S_z}{2b\,I} + \frac{p_1}{b}\left(\frac{A_2}{A} + \frac{z_1\,S_2}{I}\right) + \frac{p_2}{b}\left(\frac{A_1}{A} + \frac{z_2\,S_1}{I}\right) + \frac{N}{2b}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{A_z}{A}\right) + \frac{M}{2b}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{S_z}{I}\right). \quad (2.4)$$

Postać ta dla pręta o stałym przekroju, nie poddanego działaniu obciążenia bezpośredniego, sprowadza się do dobrze znanej relacji (gdyż $S_2 = \frac{1}{2} S_z$).

Korzystając z wyrażenia (2.4) oraz wzoru (1.8), można określić rozkład drugorzędnych naprężeń normalnych σ_z. Ograniczymy się w tym artykule do przypadku pręta o stałym przekroju poprzecznym. Otrzymamy wtedy

$$\sigma_z = \frac{1}{b}\left[\frac{N+rq_1-rq_2}{r}\int_{z}^{z_2} S_2(\zeta)\,d\zeta - \frac{1}{r}\left(\frac{NA_2}{A} + \frac{MS_2}{I}\right) + q_2 + \right.$$

$$+\frac{dp_1}{dS}\left(\frac{1}{A}\int_z^{z_2} A_2(\xi)d\xi+\frac{z_1}{J}\int_z^{z_2} S_2(\xi)d\xi+\frac{dp_2}{dS}\left(\frac{1}{A}\int_z^{z_2} A_1(\xi)d\xi+\right.\right. \tag{2.5}$$

$$\left.\left.+\frac{z_2}{J}\int_z^{z_2} S_1(\xi)\,d\xi\right)\right]$$

Łatwo wykazać, że zachodzą związki

$$\left.\begin{aligned}\int_z^{z_2} A_2(\xi)d\xi &= S_2 - z\,A_2\\ \int_z^{z_2} S_2(\xi)d\xi &= J_2 - z\,S_2\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Wyrażenie (2.5), z uwagi na (2.6), po przekształceniach przyjmuje postać

$$\sigma_z = \frac{M\,S_z}{2rb\,J}+\frac{N}{2rb}\left(\frac{z\,S_z-J_z}{J}+\frac{A_z}{A}\right)+\frac{q_1}{b}\cdot\frac{J_2-zS_2}{J}+\frac{q_2}{b}\cdot\frac{J_1-zS_1}{J}+ \tag{2.7}$$

$$+\frac{1}{b}\,\frac{dp_1}{dS}\left[\frac{S_2-zA_2}{A}+\frac{z_1(J_2-zS_2)}{J}\right]+\frac{1}{b}\,\frac{dp_2}{dS}\left[\frac{S_1-z\,A_1}{A}+\frac{z_2(J_1-z\,S_1)}{J}\right]$$

Dwa pierwsze składniki powyższego wzoru określają naprężenia radialne wywołane zakrzywieniem pręta; pozostałe składniki wzoru zachowują swą postać również dla pręta prostego. Rozkład drugorzędnych naprężeń normalnych zginania równomiernego ($\sigma_z = \frac{M\,S_z}{2r\,bJ}$) jest analogiczny do rozkładu naprężeń stycznych wywołanych działaniem siły Q.

3. Pręt silnie zakrzywiony

Ogólne wzory na naprężenia drugorzędne w pręcie silnie zakrzywionym posiadają dosyć złożoną budowę (por. [5]), dlatego w artykule ograniczymy rozważania tylko do prętów o stałym przekroju i stałym promieniu krzywizny. Naprężenia podstawowe określa znana relacja $\sigma_s = \frac{N}{A} + M\left(\frac{1}{Ar} + \frac{r}{J}\,\frac{z}{r+z}\right)$,

w której $\tilde{J} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{r}{r+\zeta}\,\zeta^2 b\, d\zeta.$

Podstawiając jej prawą stronę na miejsce σ_s w (1.7) i posługując się związkami (2.1) otrzymamy

$$\tau = (K^2 b)^{-1}\left[\frac{-Q+rp_1-rp_2}{rA}\int_z^{z_2} K(\zeta)b\, d\zeta + (Q + z_1p_1 - z_2p_2)\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{1}{Ar}\int_z^{z_2} K(\zeta)b\, d\zeta + \frac{S_2}{\tilde{J}}\right) + K(z_2)\, p_2\right] \tag{3.1}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$A_1' = \int_{z_1}^{z} K(\zeta)b\, d\zeta, \qquad A_2' = \int_z^{z_2} K(\zeta)\, b\, d\zeta \tag{3.2}$$

otrzymujemy poniższy wzór na rozkład naprężeń stycznych

$$\tau = \left[\frac{Q\,S_z}{2b\,\tilde{J}} + \frac{p_1}{b}\left(\frac{A_2'}{A}K(z_1) + \frac{z_1\,S_2}{\tilde{J}}\right) + \frac{p_2}{b}\left(\frac{A_1'}{A}K(z_2) + \frac{z_2\,S_1}{\tilde{J}}\right)\right]K^{-2} \tag{3.3}$$

Naprężenia σ_z obliczamy, jak poprzednio, ze wzoru (1.8). Wykorzystamy relacje (2.1), (2.6), (3.2) oraz wprowadzimy dodatkowe oznaczenia

$$\left.\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \int_{z_1}^{z} \frac{r}{r+\zeta}\,\zeta b\,d\zeta, & \tilde{S}_2 &= \int_{z}^{z_2} \frac{r}{r+\zeta}\,\zeta b\,d\zeta \\ \tilde{J}_1 &= \int_{z_1}^{z} \frac{r}{r+\zeta}\,\zeta^2 b\,d\zeta, & \tilde{I}_2 &= \int_{z}^{z_2} \frac{r}{r+\zeta}\,\zeta^2 b\,d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

Ponieważ zachodzi

$$\int_{z}^{z_2} S_2(\zeta)\,K^{-2}(\zeta)\,d\zeta = \tilde{I}_2 - z\,S_2\,K^{-1} \quad (3.5)$$

rozkład tych naprężeń dla przypadku p_1 = const i p_2 = const, można przedstawić w postaci

$$\sigma_z = \left[\frac{M}{2rb}\left(\frac{\tilde{S}_z}{\tilde{J}} + \frac{A_z}{rA}\right) + \frac{N}{2rb}\left(\frac{z\,S_z\,K^{-1} - \tilde{J}_z}{\tilde{J}} + \frac{A_z}{A}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{q_1}{b}\cdot\frac{\tilde{J}_2 - z\,S_2\,K^{-1}}{\tilde{J}} + \frac{q_2}{b}\cdot\frac{\tilde{J}_1 - z\,S_1\,K^{-1}}{\tilde{J}}\right]K^{-1} \quad (3.6)$$

w której $\tilde{S}_z = \tilde{S}_2 - \tilde{S}_1$, $\tilde{J}_z = \tilde{J}_2 - \tilde{J}_1$. Ponieważ $S_2(z_1) = S_1(z_2) = 0$, $A_2'(z_1) = A_1'(z_2) = A$, $\tilde{S}_z(z_1) = -\tilde{S}_z(z_2) = -\frac{\tilde{J}}{r}$,

łatwo sprawdzić, że funkcje τ i σ_z spełniają wymagane warunki brzegowe. Dla prętów nie poddanych działaniu obciąże-

nia bezpośredniego, relacje (3.3) i (3.6) prowadzą do wzorów podanych w [6].

Uwagi końcowe

Przedstawiona metoda wyznaczania naprężeń drugorzędnych daje wyniki wystarczająco dokładne tylko dla niezbyt wielkich zmian przekroju poprzecznego pręta. Przeprowadzone w [5] obliczenia wykazują jednak, że nawet dla małej zmienności przekroju pręta mogą wystąpić duże zmiany w rozkładzie naprężeń drugorzędnych; dotyczy to zwłaszcza naprężeń stycznych. Dla prętów prostych naprężenia normalne poprzeczne jako niewielkie mogą być pomijane, lecz już dla prętów słabo zakrzywionych (również gdy przekrój jest stały) ich wielkość jest rzędu wielkości maksymalnych naprężeń stycznych. Naprężenia wywołane bezpośrednim działaniem obciążenia osiągają większe wartości, przede wszystkim w prętach silnie zakrzywionych.

LITERATURA

[1] J.Courbon - Cours de rèsistance des materiaux, Paris 1955.

[2] S.Timoshenko - Strength of Materials, Part II, New York 1956.

[3] R. L'Hermite - Rèsistance des materiaux, Paris 1954.

[4] W.Krzyś i M.Życzkowski - Wybór zadań i przykładów z podstaw teorii sprężystości, PWN 1955.

[5] Cz.Woźniak - Stan naprężenia w prętach, rozprawa doktorska, Gliwice 1958.

[6] A.Turowski - Naprężenia styczne i radialne w prętach silnie zakrzywionych, rozprawa doktorska, Gliwice 1958.

ВТОРОСТЕПЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛОСКОЗАГНУТЫХ СТЕРЖНЯХ

Краткое содержание

В статье представлено распределение второстепенных напряжений в стержнях, как результат действия некоторых дифференциально-интегральных операторов на функции, определяющие основные напряжения. Рассмотрено некоторые вопросы в связи со слабо и сильно загнутыми стержнями.

Учтено изменяемость сечения и влияние непосредственной нагрузки.

SECONDARY STRESSES IN FLATLY CURVED BEAMS

Summary

In this paper the distribution of secondary stresses in beam as a result of action of some differential-integral operators upon the function that determines primary stresses has been represented. Some problems connected with beams that are lightly and strongly curved have been considered too.

The variability of cross-section and influence of, distributed load were taken into consideration.