ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 60 Budownictwo z.8 1962

JÓZEF ŚLIWA

Z MECHANIKI SWOBODNEGO WYWROTU KONSTRUKCJI SMUKŁYCH

1. Wstęp

W pracy poddano analizie siły i moment działający na konstrukcję smukłą przedstawioną w postaci pręta podczas swobodnego wywrotu.
Przez swobodny wywrót rozumiemy tu wychylenie z położenia pionowego pręta wokół punktu podparcia.
Przy czym wywrót ten jest wywołany tylko siłą ciężkości.
W rozważaniach przyjmuje się, że pręt do chwili złamania jest sztywny również w płaszczyźnie wywrotu.

2. Mechanika obrotu ciała sztywnego

Zagadnienia wywrotu pod wpływem siły ciężkości konstrukcji smukłych można rozpatrywać zatem jako ruch ciała sztywnego dokoła osi poziomej. W związku z tym można też skorzystać z zależności wynikających z kinematyki.
Zgodnie z teorią kinematyki ciała sztywnego przyjmując oznaczenia jak na rys.1, moment siły ciężkości względem osi obrotu wynosi:

$$L = m\,g\,d.\,\sin\varphi \tag{1}$$

gdzie oznaczono

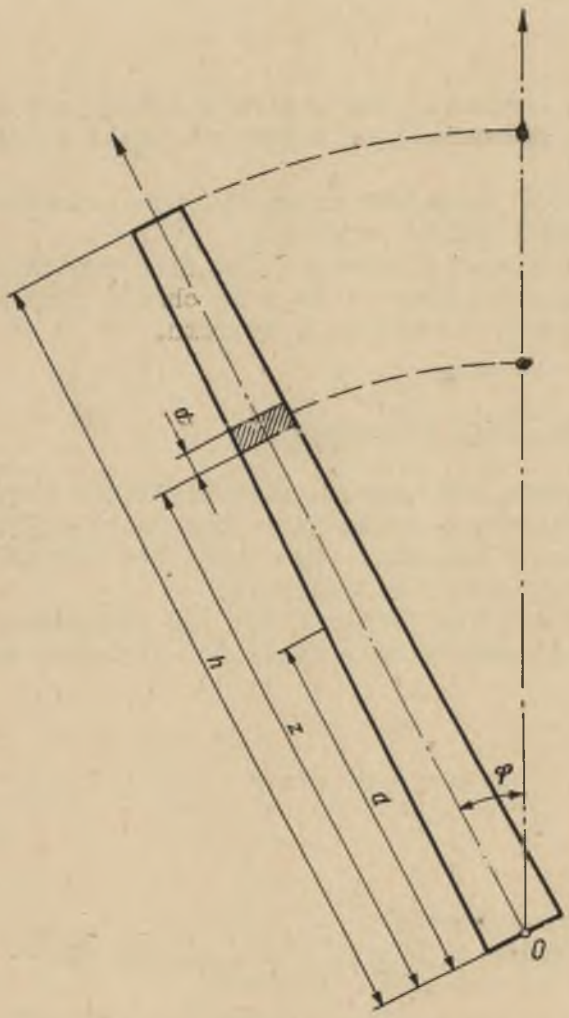
- m - masa pręta,
- g - przyspieszenie ziemskie,
- d - odległość środka ciężkości pręta od osi obrotu O
- φ - kąt wychylenia osi pręta od pionu.

W ogólnym przypadku pochodną kąta wychylenia osi pręta (obrotu) względem czasu nazywamy prędkością kątową, czyli

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \tag{2}$$

zaś pochodną prędkości kątowej względem czasu nazywamy przyspieszeniem kątowym, oznaczamy jako

$$\varepsilon = \frac{d^2 \varphi}{d\, t^2} \tag{3}$$



Rys. 1

Gdy ważkie ciało sztywne osadzone na stałej osi poziomej zostanie wychylone z położenia równowagi i pozostawione działaniu samego ciężaru $m\,g$ jako siły czynnej, to ciało to rozpocznie ruch przyspieszony pod wpływem momentu obrotu L.

Równaniem ruchu będzie przeto:

$$L = J \frac{d^2 \varphi}{d\,t^2} \tag{4}$$

Z równań (1) i (4) otrzymamy wyrażenie na przyspieszenie kątowe, a mianowicie:

$$\varepsilon = \frac{m\,g\,d}{J} \sin\varphi, \tag{5}$$

przy czym $J = m\,k^2$ oznacza moment bezwładności pręta względem osi wywrotu, k - odpowiedni promień bezwładności. Stąd wyrażenie na przyspieszenie kątowe pręta przyjmie teraz postać:

$$\varepsilon = \frac{g}{l} \sin\varphi \tag{6}$$

gdzie oznaczono

$$l = \frac{k^2}{d}\ ^{x)}$$

Możemy też teraz stąd obliczyć prędkość kątową w ruchu pręta, a mianowicie z relacji:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\,t} \tag{7}$$

stąd po scałkowaniu w granicach od 0 do φ otrzymamy:

$$\omega^2 = 2\,\frac{g}{l}\,(1 - \cos\varphi) \tag{8}$$

---

x) Punkt o rzędnej l nazywany jest środkiem uderzenia.

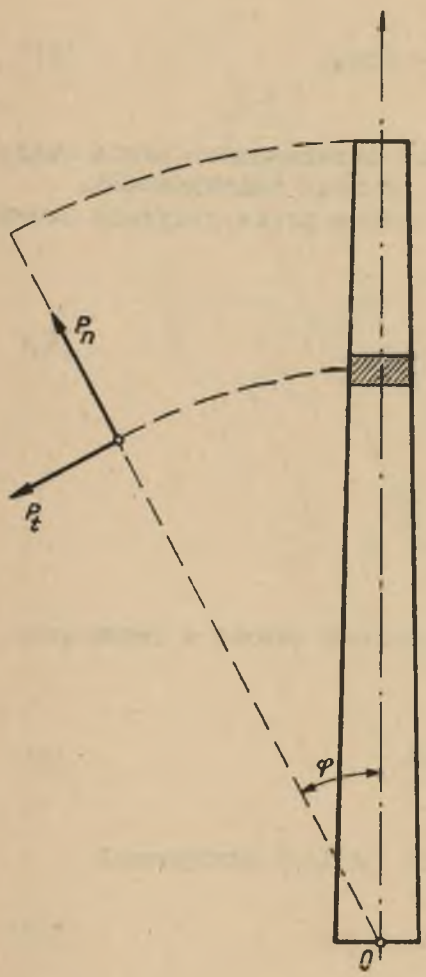
Jeżeli siła ciężkości nada ruchowi pręta dokoła punktu O przyspieszenie kątowe, wtedy element pręta m w odległości z od punktu O otrzyma prędkość kątową ω, a przyspieszenie elementu przyjmą wartości:

a) przyspieszenie styczne do toru ruchu, czyli obwodowe (rys.2)

$$p_t = \varepsilon z \tag{9}$$

b) przyspieszenie odśródkowe, normalne do toru ruchu

$$p_n = \omega^2 z \tag{10}$$



Rys.2

3. Analiza statyczna

Po tych wstępnych rozważaniach możemy przystąpić do obliczenia wartości sił i momentu. Zgodnie z zasadą d'Alemberta każdy dowolny element pręta o długości dz znajduje się w równowadze pod działaniem sił zewnętrznych i sił bezwładności. Siłę pionową działającą z elementu dm pręta wychylonego z pionu można rozłożyć na składową poprzeczną czyli prostopadłą do osi pręta i na składową podłużną tj. wzdłuż osi pręta.
Składowa poprzeczna i składowa podłużne będą tu równe różnicy odpowiednich składowych sił ciężkości i sił bezwładności. Obliczmy najpierw różniczkę siły poprzecznej dQ.

Siła ta równa się różnicy składowej poprzecznej siły ciężkości i siły bezwładności, czyli

$$dQ = dQ_c - dQ_b \tag{11}$$

Składowa poprzeczna siły ciężkości równa się

$$dQ_c = dG \sin\varphi \tag{12}$$

gdzie G oznacza ciężar pręta.
Siła ciężkości elementu pręta o długości dz i przekroju poprzecznym F_z i gęstości masy pręta ρ wynosi:

$$dG = \rho g F_z dz \tag{13}$$

Z uwagi na wyrażenie

$$G = \rho g V \tag{14}$$

gdzie V - objętość pręta
wzór (13) można napisać w postaci:

$$dG = \frac{G}{V} F_z dz \tag{15}$$

Stąd wyrażenie na składową poprzeczną siły ciężkości będzie:

$$dQ_c = \frac{G}{V} F_z \sin\varphi dz \tag{16}$$

Różniczka sił bezwładności dQ_b jest zależna od przyspieszenia stycznego i wynosi:

$$dQ_b = \rho F_z p_t dz \tag{17}$$

Podstawiając do powyższego wzoru wyrażenia (9) i (6) otrzymamy:

$$dQ_b = \frac{G}{V} \frac{z}{l} F_z \sin\varphi \, dz \tag{18}$$

Wyrażenie (11) przyjmie teraz postać:

$$dQ = \frac{G F_z \sin\varphi}{V} \left(1 - \frac{z}{l}\right) dz \tag{19}$$

Skąd możemy otrzymać wzór na siłę poprzeczną

$$Q = \int_z^h dQ = \frac{G \sin\varphi}{V} \int_z^h F_z \left(1 - \frac{z'}{l}\right) dz' \tag{20}$$

Podobne rozważania przeprowadzimy celem wyznaczenia siły podłużnej.
Analogicznie do wzoru (11) składowa podłużna siły elementu pręta równa się różnicy składowej podłużnej siły ciężkości i siły bezwładności, czyli

$$dN = dN_c - dN_b \tag{21}$$

Składowa podłużna siły ciężkości wynosi:

$$dN_c = \frac{G}{V} F_z \cos\varphi \, dz \tag{22}$$

Zaś składowa siły bezwładności jest zależna od przyspieszenia normalnego tj.

$$dN_b = \rho F_z p_n \, dz \tag{23}$$

Podstawiając do powyższego wzoru wyrażenie na prędkość kątową ω otrzymamy po uproszczeniu:

$$dN_b = \frac{G\,F_z}{V} \cdot \frac{2\,z}{l}\,(1-\cos\varphi)\,dz \qquad (24)$$

Uwzględniając teraz (22) i (24) wzór (21) przyjmie postać:

$$dN = \frac{G\,F_z}{V}\left[\cos\varphi - \frac{2\,z}{l}\,(1-\cos\varphi)\right]dz \qquad (25)$$

Otrzymaliśmy zatem wyrażenie na siłę podłużną, z jaką element słupa o długości dz w chwili wywrotu oddziaływuje na przyległe przekroje.
Całkowita siła podłużna o przekroju słupa na wysokości z wynosi:

$$N = \int_z^h dN = \frac{G}{V} \cdot \int_z^h F_z\left[\cos\varphi - \frac{2z'}{l}\,(1-\cos\varphi)\right]dz' \qquad (26)$$

Z kolei możemy obliczyć moment zginający.
W dowolnym punkcie x wzdłuż osi z ponad podstawą słupa wywracanego otrzymamy wyrażenie na moment zginający:

$$M_z = \int_{z=x}^{z=h} (x-z)\,dQ_z \qquad (27)$$

Co można podstawiając odpowiednie wartości siły poprzecznej napisać w postaci:

$$M_z = \frac{G\sin\varphi}{V}\int_{z=x}^{z=h} F_z(x-z)\left(1-\frac{z}{l}\right)dz \qquad (28)$$

Mając wyznaczone siły i moment możemy też teraz obliczyć naprężenia w przekroju poprzecznym pręta.

Stan naprężeń w przekroju będzie wywołany zarówno siłą podłużną jak i momentem zginającym, czyli

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M \tag{29}$$

Przedstawiona analiza obliczania sił i momentu, a stąd stanu naprężeń pręta w chwili swobodnego wywrotu może być zastosowana i do innych konstrukcji smukłych znajdujących się w ruchu obrotowym, wywołującym przyśpieszenie kątowe.

ИЗ МЕХАНИКИ СВОБОДНОГО ОПРОКИДЫВАНИЯ ГИБКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Краткое содержание

В статье представлено анализ механики гибких конструкций в моменте свободного опрокидывания.

Основой анализа является статическое состояние стержня, вращающегося вокруг горинтальной оси основания. Опрокидывание стержня вызвано только силой тяжести.

Подано формулы на поперечные и продольные силы, а также на изгибающие моменты.

ON THE MECHANICS OF FREE FALL OF SLENDER STRUCTURES

Summary

In this paper an analysis of the mechanics of slender structures at the moment of free falling has been given.

The basis of the analisis is the static state of a rod rotating around the horisontal axis of the base the fall of the rod is caused only by the force of gravity.

The formulae for transverse and longitudinal forces as well as bending moments of the structure were also given.