ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 81 Budownictwo z.9 1963

JÓZEF ŚLIWA

Katedra Budowli Podziemnych

FALE SPRĘŻYSTE W OŚRODKU QUASI-SPRĘŻYSTYM

Streszczenie. Podłoże gruntowe przy wymuszeniu charakteru dynamicznego jest ośrodkiem, w którym zaburzenie rozchodzi się w postaci fali oraz ulega stłumieniu. Ośrodek ten zatem wykazuje cechy zarówno sprężyste jak i niesprężyste. Uwzględniając te własności podłoża rozpatrzono energię fali rozchodzącej się ze źródła wymuszenia.
Następnie przeprowadzono analizę wielkości parametrów fali. Absorpcję fali uzależniono od niesprężystego oporu wewnętrznego jako charakterystyki ośrodka.

1. Wstęp

Ośrodek quasi-sprężysty poza cechami sprężystymi, które warunkują rozprzestrzenianie się fal wywołanych dowolnym zaburzeniem, wykazuje jeszcze pewne własności niesprężyste powodujące pochłanianie energii sprężystej procesu drgania. Stąd też w takim ośrodku amplitudy fal rozprzestrzeniając się od źródła zaburzenia maleją wraz z odległością.

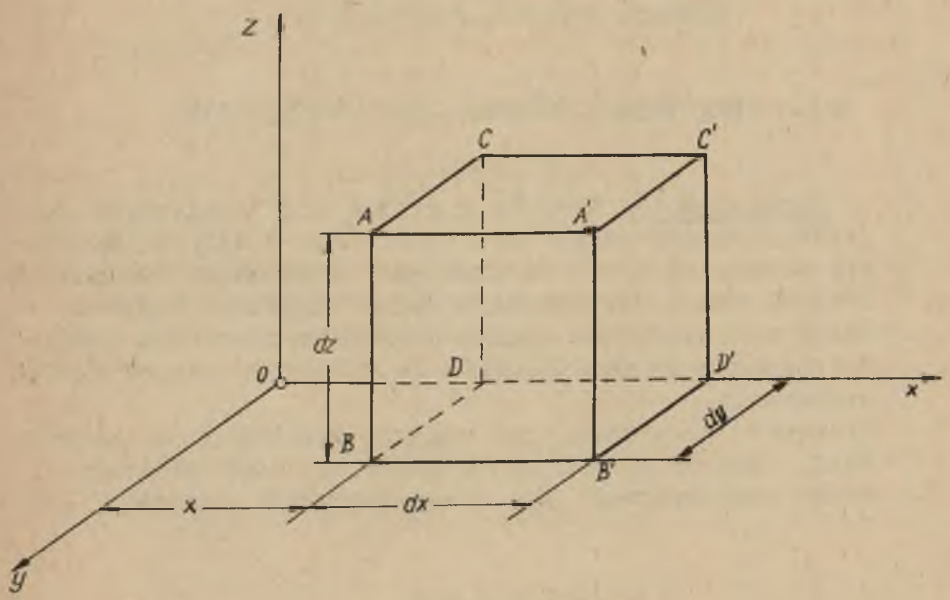
Celem niniejszej pracy jest analiza procesu falowego przy przyjęciu modelu ośrodka quasi-sprężystego opisanego w pracy [1].

Przyjęty model ośrodka uwzględnia jego cechy sprężyste i niesprężyste. Niesprężystość ośrodka zostaje wyrażona przez niesprężysty opór wewnętrzny będący siłą "hamującą" proces drgań i związaną z odkształceniem ciała.

2. Praca sił niesprężystego oporu wewnętrznego

Weźmy pod uwagę elementarny prostopadłościan o bokach dx, dy, dz (rys,2-1).

Przyjmijmy dalej, że w ośrodku rozchodzi się w kierunku osi x fala poprzeczna o wychyleniu a.



Rys.2.1

W ośrodku tym przez ścianę ABCD odległą o x od początku układu "wpływa" do bryły energia, którą możemy zapisać w postaci:

$$d\,E_x = M(\pm f)\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| da\,dy\,dz \qquad (2.1)$$

gdzie:

M - stała Lame'go,

f - współczynnik niesprężystego oporu wewnętrznego.

Przez ścianę przesuniętą o dx, czyli o odciętej x+dx "wypływa" energia

$$d\,E_{x+dx} = M(\pm f)\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| da\,dy\,dz + d\left[M(\pm f)\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| da\right] dy\,dz \qquad (2.2)$$

Wewnątrz bryły zostaje zatem pochłonięta energia

$$d\,E_\alpha = M(\pm f)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| da\right) dx\,dy\,dz \qquad (2.3)$$

Energia pochłonięta przez jednostkę objętości ośrodka wynosi

$$d\,E_\alpha = M(\pm f)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| da\right) \qquad (2.4)$$

Chcąc w dalszych rozważaniach opuścić znaki bezwzględnych wartości związane z charakterystyką sił niesprężystego oporu wewnętrznego wprowadzimy symbol $\operatorname{sign}\frac{\partial a}{\partial x}$
Definicja symbolu jest następująca

$$\operatorname{sign}\varphi(x) = \begin{Bmatrix} +1 & \text{gdy } \varphi(x) > 0 \\ -1 & \text{gdy } \varphi(s) < 0 \end{Bmatrix} \qquad (2.5)$$

W takim razie możemy napisać

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \left(\operatorname{sign}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial a}{\partial x} \qquad (2.6)$$

Wprowadzając to oznaczenie możemy wzór (2.4) napisać teraz w postaci

$$d\,E_\alpha = M(\pm f)\left(\operatorname{sign}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a}{\partial x}\,da\right) \qquad (2.7)$$

Ponieważ $da = \frac{\partial a}{\partial x}\,dx$, to wzór (2.7) będzie

$$d\,E_\alpha = M(\pm f)\left(\operatorname{sign}\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2\right] dx \qquad (2.8)$$

Skoro wyrażenie $M(\pm f)(\text{sign}\,\frac{\partial a}{\partial x})$ jest wartością stałą, to całkując (2.8) dostaniemy nową postać wzoru na wartość energii jaka zostaje pochłonięta w jednostce objętości ośrodka

$$E_\alpha = M(\pm f)(\text{sign}\,\frac{\partial a}{\partial x})(\frac{\partial a}{\partial x})^2 \qquad (2.9)$$

Można tu ustalić jaki należy wziąć każdorazowo znak przy współczynniku niesprężystego oporu wewnętrznego f.
Musi on być mianowicie taki, by wyrażenie na energię było zawsze dodatnie, gdyż niesprężysty opór wewnętrzny ośrodka powoduje absorpcję energii.

Trzeba zatem przyjąć jednakowe znaki przy f i przy $\frac{\partial a}{\partial x}$, czyli

$$\left.\begin{array}{ll} +f & \text{gdy } \frac{\partial a}{\partial x} > 0 \\ -f & \text{gdy } \frac{\partial a}{\partial x} < 0 \end{array}\right\} \qquad (2.10)$$

Stąd wyrażenie na wartość bezwzględną absorbowanej energii przyjmie zapis

$$E_\alpha = M\,f\,(\frac{\partial a}{\partial x})^2 \qquad (2.11)$$

3. Energia fali w ośrodku sprężystym

Analizę energii fali przeprowadźmy obecnie na przykładzie płaskiej fali poprzecznej opisanej wyrażeniem

$$a = A\cos(\xi x - \omega t) = A\cos\omega(\frac{x}{v_t} - t) \qquad (3.1)$$

gdzie:

A - maksymalne wychylenie punktu drgającego, czyli amplituda drgania,

$\omega = 2\pi n$ - częstość kątowa drgań,

n - ilość drgań,

$\xi = \frac{2\pi}{\lambda}$ - liczba falowa,

λ - długość fali,

$v_t = n\lambda = \frac{\omega}{\xi}$ - prędkość fazowa fali w ośrodku sprężystym.

Energia cząstki ośrodka, w którym się fala rozchodzi składa się z energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej E_p Oznaczając masę cząstki ośrodka przez m wyrażenie na energię kinetyczną będzie

$$E_k = \frac{1}{2} m v_t^2 \qquad (3.2)$$

Oznaczając przez ϱ gęstość ośrodka energia kinetyczna - w przypadku fali wyrażonej wzorem (3.1) przyjmie postać

$$E_k = \frac{1}{2}\varrho A^2 \omega^2 \sin^2\omega\left(\frac{x}{v_t} - t\right) \qquad (3.3)$$

Energię potencjalną obliczymy z odkształcenia sprężystego elementu tj.

$$E_p = \frac{1}{2} E V \Delta^2 \qquad (3.4)$$

We wzorze tym oznaczano:

E - moduł Younga materiału ośrodka,

V - objętość odkształconego elementu,

$\Delta = \frac{da}{dx}$ - odkształcenie względne - tu różnica wychyleń cząstek odległych od siebie o dx.

Energia potencjalna opisywanej fali będzie wyrażona wzorem

$$E_p = \frac{1}{2 v_t^2} EA^2 \omega^2 \sin^2\omega\left(\frac{x}{v_t} - t\right) \qquad (3.5)$$

Z porównania wyrażeń (3.3) i (3.5) wynika, że energia kinetyczna i potencjalna zmieniają się w jednakowej fazie, tzn. osiągają jednocześnie swoje maksima i minima. Pod tym względem energia części fali różni się istotnie od energii odizolowanego punktu. Dodając wyrażenia (3.3) i (3.5) otrzymamy wzór na energię sumaryczną w postaci

$$E = \varrho A^2 \omega^2 \sin^2\omega\left(\frac{x}{v_t} - t\right) \tag{3.6}$$

Skąd można dalej otrzymać wzór na wartość maksymalną energii elementarnej cząstki ośrodka

$$E = \varrho A^2 \omega^2 \tag{3.7}$$

4. Energia fali w ośrodku quasi-sprężystym

Przyjmijmy falę poprzeczną opisaną wzorem

$$a = A_s \cos\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right) \tag{4.1}$$

gdzie

A_s - amplituda fali,

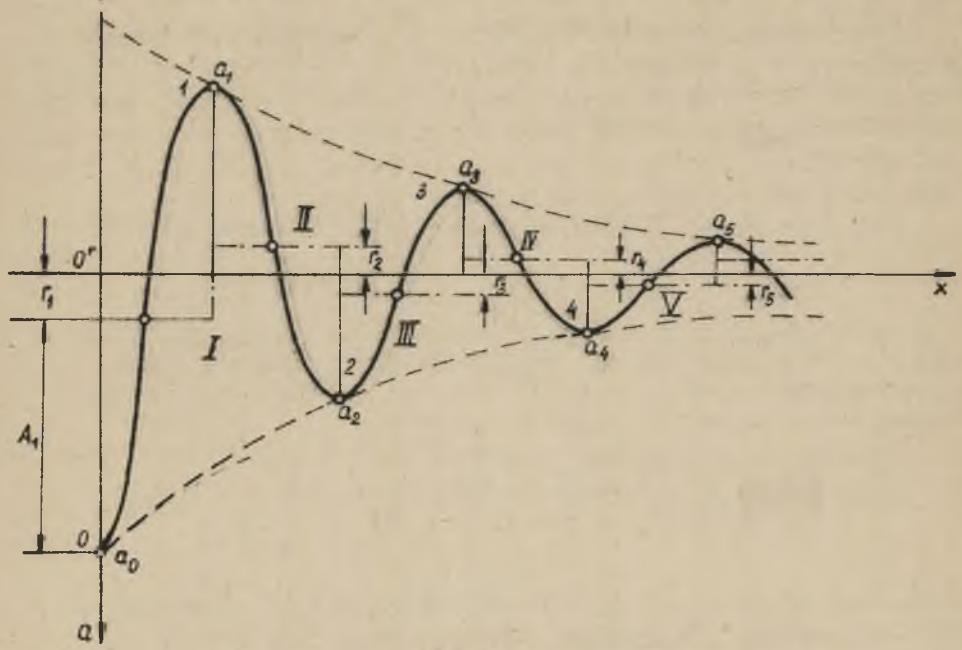
c_t - prędkość fali w ośrodku [1].

Ciąg fali w ośrodku przedstawiono na rys.4.1.

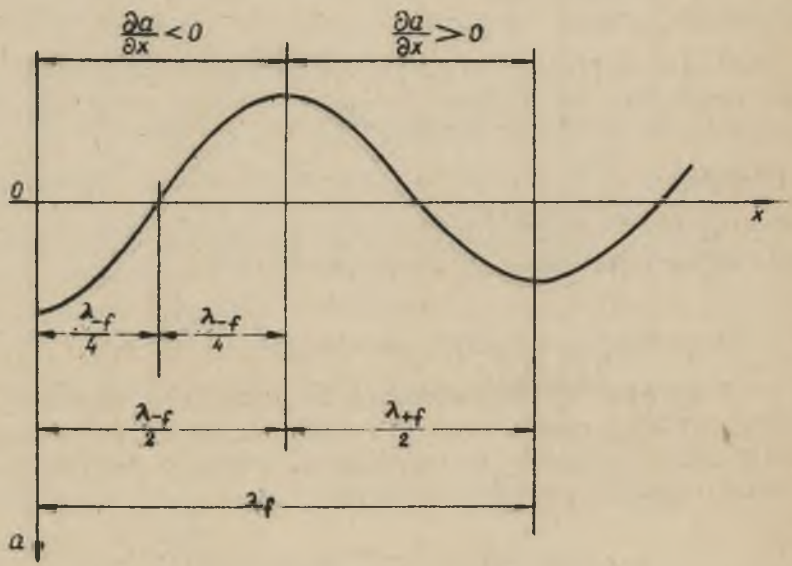
Z wyrażeń (2.10) wynika, że znak przy współczynniku niesprężystego oporu wewnętrznego f zależy od pochodnej wychylenia względem przesunięcia, czyli w przypadku fali opisanej wzorem (4.1) od relacji

$$\frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{1}{c_t} A_s \omega \sin\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right) \tag{4.2}$$

W pierwszej połówce (rys.4.2) - oznaczonej przez $\frac{1}{2}\lambda_{-f}$ jest $\frac{\partial a}{\partial x} < 0$, zaś w drugiej połówce oznaczonej przez $\frac{1}{2}\lambda_{+f}$ $\frac{\partial a}{\partial x} > 0$.


a_1
1
a_3
3
a_5
0^r
r_1
r_2
r_3
r_4
r_5
x
I
II
III
IV
V
2
4
a_2
a_4
A_1
0
a_0
a

Rys.4.1


$\frac{\partial a}{\partial x} < 0$
$\frac{\partial a}{\partial x} > 0$
0
x
$\frac{\lambda_{-f}}{4}$
$\frac{\lambda_{-f}}{4}$
$\frac{\lambda_{-f}}{2}$
$\frac{\lambda_{+f}}{2}$
λ_f
a

Rys.4.2

Zmiana znaku przy współczynniku f zachodzi więc wraz z osiągnięciem bezwzględnej maksymalnej wartości wychylenia. Energię absorbowaną fali opisanej wzorem (4.1) można zgodnie z wyrażeniem (2.11) przedstawić w postaci

$$E_\alpha = \frac{1}{c_t^2} Mf\,\omega^2 A_s^2 \sin^2\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right) \qquad (4.3)$$

Po uwzględnieniu wzoru na prędkość fali w ośrodku przy przyjętej charakterystyce [1] wyrażenie (4.3) przyjmie kolejny zapis

$$E_\alpha = \frac{\varrho f\,\omega^2 A_s^2}{1 \pm f} \sin^2\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right) \qquad (4.4)$$

Wzór ten wyraża ogólną wartość energii fali tłumionej. Rozpatrzmy teraz szczegółowo energię ciągu fali w ośrodku. Początkowe wychylenie oznaczone zgodnie z rys.4.1 wynosi a_o. Pierwsze maksimum wychylenia po stronie ujemnej układu odniesienia zostaje osiągnięte na końcu półfali $\frac{1}{2}\lambda_{-f}$.

Wartość bezwzględna tego wychylenia oznaczonego przez a_1 jest mniejsza od pierwszego a_o. Różnica energii jaka istnieje na początku przebiegu fali tj. w punkcie 0 i na końcu półfali $\frac{1}{2}\lambda_{-f}$ czyli w punkcie 1, będzie równała się energii pochłanianej przez siły niesprężystego oporu wewnętrznego ośrodka. Wartość jej wynosi:

$$E_{A_1} = \left[\frac{\varrho f\,\omega^2 A_1^2}{1 - f} \sin^2\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right)\right]_0^{\frac{1}{4}\lambda_{-f}} + \left[+\frac{\varrho f\,\omega^2 A_1^2}{1 - f} \sin^2\omega\left(\frac{x}{c_t} - t\right)\right]_{\frac{1}{4}\lambda_{-f}}^{\frac{1}{2}\lambda_{-f}} \qquad (4.5)$$

Uwzględniając związki

$$\frac{1}{4}\lambda_{-f} = \frac{\pi \cdot c_t}{2}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

wzór określający wartość energii pochłoniętej w pierwszej gałęzi fali przyjmie postać

$$E_{A_1} = \frac{2\varrho f \omega^2 A_1^2}{1 - f} \tag{4.6}$$

Energia pochłonięta na drugiej połówce fali o długości $\frac{1}{2}\lambda_{-f}$ wynosi

$$E_{A_2} = \frac{2\varrho f \omega^2 A_2^2}{1 + f} \tag{4.7}$$

W podobny sposób oblicza się też energię absorbowaną w dalszych członach fali.

5. Elementy fali w ośrodku quasi-sprężystym

W celu obliczenia poszczególnych elementów fali w interesującym nas ośrodku przeprowadźmy rozważanie jakie się stosuje przy analizie drgań własnych układów mechanicznych z uwzględnieniem tarcia[x].

W naszym przypadku - fali sprężystej absorbowanej - siły niesprężystego oporu wewnętrznego są zmienne i zależą liniowo od $\frac{\partial a}{\partial x}$, a tym samym od amplitudy fali. Korzystając z zależności wynikającej z podziału gałęzi 0 - 1, to jest pierwszej połówki fali oraz wzoru na energię absorbowaną fali, otrzymamy wyrażenia na elementy fali pierwszej połówki

$$A_1 = \frac{1 - f}{1 - 0{,}5\, f}\, a_o \tag{5.1}$$

$$r_1 = \frac{0{,}5\, f}{1 - 0{,}5\, f}\, a_o \tag{5.2}$$

x) Por. np. prace Goriaczkina [2], Klottera [3], Ziemby [4].

Dla drugiej połówki tj. o długości $\frac{1}{2}\lambda_{+f}$ otrzymamy

$$A_2 = \frac{1 - 0{,}5\,f - 1{,}5\,f^2}{1 + 0{,}5\,f - 0{,}75f^2}\,a_o \qquad (5.3)$$

$$r_2 = \frac{0{,}5\,f - 0{,}75\,f^2}{r + f - 0{,}75f^2}\,a_o \qquad (5.4)$$

Elementy wychylenia fali pierwszego okresu zostały wyrażone tylko przez wychylenie początkowe a_o oraz współczynnik f charakteryzujący własności niesprężystego oporu wewnętrznego ośrodka. Tak samo można wyprowadzić wzory na elementy wychylenia dalszych okresów.

Ogólna postać wzorów będzie

$$A_s = g_1\ (f)\ a_{s-2} \qquad (5.5)$$

$$a_s = g_2\ (f)\ a_{s-2} \qquad (5.6)$$

$$r_s = g_3\ (f)\ a_{s-2} \qquad (5.7)$$

Pozostałym elementem jest długość fali λ_f.

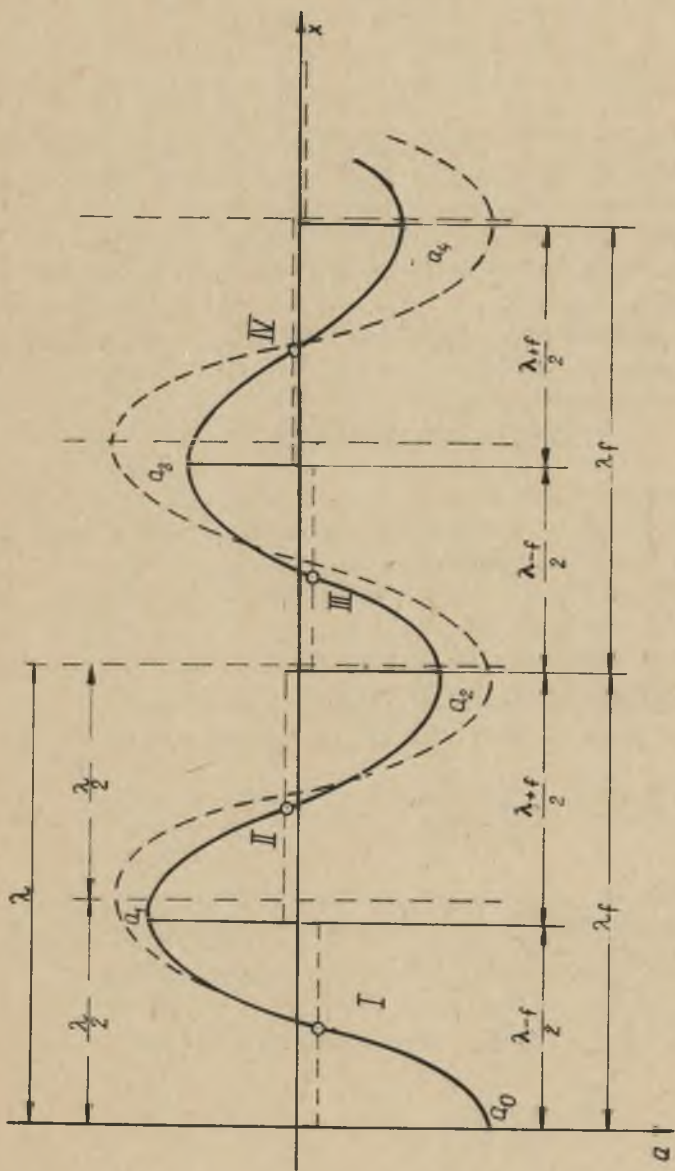
Ogólną postać wzoru na długość połówki fali jest

$$\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{\omega}\ c_t \qquad (5.8)$$

Uwzględniając zaś prędkość fali, poszczególne połówki fali w ośrodku absorpcyjnym będą

$$\frac{1}{2}\lambda_{-f} = \frac{\pi}{\omega}\left[\frac{M}{\varrho}(1-f)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.9)$$

$$\frac{1}{2}\lambda_{+f} = \frac{\pi}{\omega}\left[\frac{M}{\varrho}(1+f)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (5.10)$$


x
a
λ
λ/2
λ/2
I
II
III
IV
a_0
a_1
a_2
a_3
a_4
$\frac{\lambda-f}{2}$
$\frac{\lambda+f}{2}$
$\frac{\lambda-f}{2}$
$\frac{\lambda+f}{2}$
λf
λf

Rys. 5.1

Oznaczając przez λ długość fali w ośrodku sprężystym, możemy napisać wzór na długość fali w ośrodku absorpcyjnym w postaci

$$\lambda_f = 0{,}5\lambda\left[(1-f)^{\frac{1}{2}} + (1+f)^{\frac{1}{2}}\right] \qquad (5.11)$$

Jak łatwo można się przekonać, wpływ niesprężystego oporu wewnętrznego ośrodka na długość fali, tym samym również i na prędkość rozprzestrzeniania jest nieznaczny i przecz jasna praktycznie byłby trudny do zaobserwowania.

Dla przykładu rys.5.1 przedstawia ciąg fali w ośrodku absorpcyjnym gdy $f = 0{,}15$.

Długość fali wynosi tu $\lambda_f = 0{,}997165\lambda$.

6. Współczynnik absorpcji

Zespół przyczyn powodujących ubytek energii sprężystej fali wzdłuż ich drogi rozprzestrzeniania się w podłożu niedoskonale sprężystym nazywamy ogólnie absorpcją.

Obliczmy teraz wartość charakteryzującą to zjawisko, to jest współczynnik absorpcji.

Na podstawie poznanych już wzorów można napisać następujący stosunek kolejnych wychyleń fali

$$\frac{a_2}{a_o} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{1-f-0{,}75\,f^2}{1+f-0{,}75\,f^2} = g\,(f) = \text{const.} \qquad (6.1)$$

Stosunek dwóch wychyleń odległych od siebie o długość fali λ_f jest wartością stałą, zależną jedynie od współczynnika niesprężystego oporu wewnętrznego ośrodka.

Ekstremalne punkty wychylenia leżą na krzywej funkcji wykładniczej malejącej, czyli można napisać relację:

$$\frac{a_{s+2}}{a_s} = e^{-\alpha} \qquad (6.2)$$

gdzie α - współczynnik absorpcji.

Stąd dalej wynika, że

$$e^{-\alpha} = \frac{1-f-0,75\ f^2}{1+f-0,75\ f^2} \tag{6.3}$$

i w końcu otrzymamy wyrażenie na współczynnik absorpcji w postaci

$$\alpha = \ln \frac{1 + f - 0,75\ f^2}{1 - f - 0,75\ f^2} \tag{6.4}$$

Wartość współczynnika absorpcji otrzymamy z pomiaru amplitud drgań rozprzestrzeniających się od źródła zaburzenia przez podłoże. Zaś stąd bezpośrednio można dalej obliczyć współczynnik niesprężystego oporu wewnętrznego jako charakterystykę ośrodka.

LITERATURA

[1] J.Śliwa: Z dynamiki podłoża quasi-sprężystego. Zeszyty naukowe Politechniki Śląskiej Budownictwo, z.8 1962.

[2] W.P.Goriaczkin: Sobranije soczinienij, tom VII, Wsiesojuznaja Akademija Sielskochoziajstwiennych Nauk imieni W.I.Lenina, Moskwa, 1949.

[3] K.Klotter: Technische Schwingungslehre, Springer-Verlag, Berlin (Gottingen), Heidelberg, 1951.

[4] St.Ziemba: Analiza drgań PWN, Warszawa, 1957.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В КВАЗИ-УПРУГОЙ СРЕДЕ

Содержание

При динамическом возмущении распространяются в грунте затухающие волны.

Грунты представляют не вполне упругие среды. Учитывая эти свойства основания, рассмотрено энергию волн, распространяющихся от источника возбуждения.

Поэтому выведено анализ параметров волн.

Абсорбцию волн представлено в зависимости от неупругого внутреннего сопротивления среды.

ELASTIC WARES IN QUASI-ELASTIC MEDIUM

Summary

The soil subjected by the dynamic disturbances behaves like an elastic medium with some unelastic properties. The elastic waves energy propagated in the soil is absorbed. For the purpose of determining the values of unelastic internal resistance of the medium the absorption of the propagated waves has been represented.