ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 81 Budownictwo z.9 1963

OSWALD MATEJA

Katedra Budowli Podziemnych

O PEWNEJ WARIACYJNEJ METODZIE STATYCZNEJ STATECZNOŚCI

Streszczenie. W pracy wykazano, że warunek

$$\delta(\bar{\delta}^2 \Pi) = 0$$

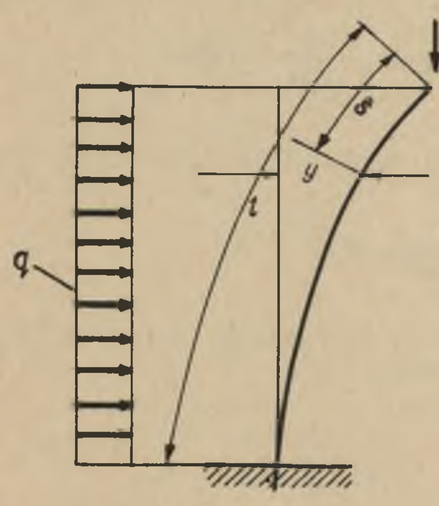
w ogólności nie prowadzi do właściwych obciążeń krytycznych badanego układu

W literaturze technicznej spotkać można następujący warunek do obliczania obciążeń krytycznych statycznej stateczności sprężystej układów zachowawczych:

$$\delta(\bar{\delta}^2 \Pi) = 0 \qquad (1)$$

gdzie:

Π - jest całkowitą energią potencjalną badanego układu.



Rys.1

Warunek (1) uzyskał w nieco innej postaci K.MARGUERRE [1] [2]; jest on również podawany w niektórych monografiach, np. w [3], [4], [5].

W niniejszej pracy wykażemy, że warunek (1) w ogólności nie prowadzi do właściwych obciążeń krytycznych badanego układu.

Rozpatrzmy najpierw następujący przykład: Dany jest prosty, liniowo sprężysty, utwierdzony na jednym końcu pręt o stałej sztywności EJ, obciążony podłużną siłą sciskającą P oraz równomiernym obciążeniem poprzecznym q (rys.1). Obliczymy obciążenie krytyczne tego pręta najpierw stosując metodę EULERA, a następnie w oparciu o warunek (1).

Przy dostatecznie małych wartościach q, równanie różniczkowe odkształconej osi pręta ma postać:

$$EJ\,\frac{d^2y}{ds^2} + Py = -\frac{qx^2}{2}. \tag{2}$$

Całką ogólną równania (2) jest funkcja:

$$y = C_1 \sin\alpha s + C_2 \cos\alpha s - \frac{q}{2P}s^2 + \frac{EJq}{P^2},\ \alpha = \sqrt{\frac{P}{EJ}}. \tag{3}$$

Warunki brzegowe rozpatrywanego pręta:

$$y''(0) = y(l) = 0,$$

prowadzą do następującego układu algebraicznych równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} -C_2\,\alpha^2 &= \frac{q}{P}, \\ C_1 \sin\alpha l + C_2 \cos\alpha l &= \frac{ql^2}{2P} - \frac{EJq}{P^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Z warunku znikania wyznacznika podstawowego układu równań (4) otrzymamy

$$\sin\alpha l = 0,$$

co zachodzi przy

$$\alpha l = n\pi. \tag{5}$$

Znikania wyznacznika podstawowego układu równań (4) oznacza, że macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha^2 \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l \end{bmatrix}, \tag{6}$$

jest rzędu pierwszego.

Układ równań (4) nie będzie układem sprzecznym, zgodnie z algebraicznym twierdzeniem KRONECKERA-CAPELLI'EGO (por. np.: [6], str. 155), wtedy i tylko wtedy jeśli również macierz

$$\begin{bmatrix} 0 & -\alpha^2 & \frac{q}{P} \\ \sin\alpha l & \cos\alpha l & \frac{ql^2}{2P} - \frac{EJq}{P^2} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

będzie rzędu pierwszego. Musi więc również znikać w rozpatrywanym przypadku wyznacznik

$$\begin{vmatrix} -\alpha^2 & \frac{q}{P} \\ \cos\alpha l & \frac{ql^2}{2P} - \frac{EJq}{P^2} \end{vmatrix},$$

co zachodzi przy

$$\cos\alpha l = -\alpha^2 \left(\frac{l^2}{2} - \frac{EJ}{P}\right). \tag{8}$$

Przy

$$\alpha l = n\pi, \qquad P = P_{kv} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}$$

z warunku (8) otrzymamy

1° dla $n = 2k - 1$

$$-1 = 1 - \frac{n^2 \pi^2}{2},$$

co nie może być spełnione,

2^0 dla $n = 2k$

$$1 = 1 - \frac{n^2 \pi^2}{2},$$

co również nie może być spełnione.

Zatem przy

$$\alpha l = n\pi,$$

układ równań (4) staje się układem sprzecznym, a zatem jego rozwiązaniem nie może być

$$\sin\alpha l = 0.$$

Wynika z tego wniosek, że rozważany pręt, przy $q \neq 0$ nie posiada obciążenia krytycznego.

Do tego samego stwierdzenia można również łatwo dojść rozwiązując równanie różniczkowe odkształconej osi pręta przybliżoną metodą GALERKINA.

Obliczymy teraz obciążenie krytyczne rozważanego pręta w oparciu o warunek (1).

Całkowitą energię potencjalną rozważanego pręta wyraża równanie:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EJ(y'')^2 + 2qy - P(y')^2\right] ds. \tag{9}$$

Z rozwinięcia wyrażenia (9) w szereg TAYLORA otrzymamy

$$\bar{\delta}^2 \Pi = \frac{1}{4}\int_0^l \left[EJ(\bar{y}'')^2 + P(\bar{y}')^2\right] ds, \tag{10}$$

gdy $\bar{y}'$ i $\bar{y}''$ mają znaczenie wariacji odpowiadających im funkcji: y' i y''.

Zgodnie z warunkiem (1) musi znikać pierwsza wariacja funkcjonału (10). Zatem szukana funkcja y musi być rozwiązaniem równania EULERA, które w rozpatrywanym przypadku ma postać:

$$EJ\bar{y}^{IV} + P\bar{y}'' = 0. \tag{11}$$

Jak widać w równaniu (11) nie występuje wyrażenie q, co oznaczałoby, że nie ma ono wpływu na obciążenie krytyczne rozważanego pręta, wbrew temu co otrzymano wyżej przy stosowaniu metody EULERA.

Wynika z tego wniosek, że warunek (1) prowadzi w niektórych przypadkach do błędnych wyników.

Do warunku (1) dochodzi się przeprowadzając następujące rozumowanie (por. np.: [3], str.61):

W stanie krytycznym układu muszą jednocześnie być spełnione, jak wiadomo, dwa następujące warunki:

$$\delta \Pi = 0, \tag{12}$$

$$\delta \Pi_I = 0, \tag{13}$$

gdzie Π_I - jest energią potencjalną układu odchylonego od rozpatrywanego położenia równowagi.

Zatem

$$\Pi_I = \Pi + \Delta \Pi = \Pi + \bar{\delta} \Pi + \frac{1}{2!} \bar{\delta}^2 \Pi + \frac{1}{3!} \delta^3 \Pi + \dots \tag{14}$$

Ponieważ stan wyjściowy jest stanem równowagi, więc

$$\bar{\delta} \Pi = 0.$$

Zatem po pominięciu małych wyższego rzędu w porównaniu z $\frac{1}{2} \bar{\delta}^2 \Pi$ otrzymamy

$$\Pi_I = \Pi + \frac{1}{2} \bar{\delta}^2 \Pi . \tag{15}$$

Czyli

$$\delta \Pi_I = \delta \Pi + \frac{1}{2} \delta (\bar{\delta}^2 \Pi) = 0. \tag{16}$$

Po uwzględnieniu, że również

$$\delta \Pi = 0,$$

otrzymamy

$$\delta (\bar{\delta}^2 \Pi) = 0 \tag{17}$$

W oparciu o warunek (17) oblicza się obciążenie krytyczne układu, traktując występujące w tym warunku kwadraty pierwszych wariacji niezależnych funkcji jako poszukiwane funkcje opisujące stan krytyczny układu (por. np.: [3], str.62). Utożsamia się więc wariacje funkcji z odpowiadającymi im funkcjami. Prowadzi to jednak w niektórych przypadkach do zmiany fizykalnego sensu rozpatrywanego zagadnienia, a więc do błędnych rezultatów.

LITERATURA

[1] Marguerre K.: Über die Bechandlung von Stabilitätsprobleme mit Hilfe der energetischen Methode, Z. Angew. Math. Mechan., 1938.

[2] Marguerre K.: Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stablitätsprobleme, DVL. Jb. 1938.

[3] Pflüger A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin-Göttingen - Heidelberg, 1950.

[4] Girkmann K.: Flachentragwerke, Wien, 1956.

[5] Bürgermeister G., Steup H.: Stabilitätstheorie, Berlin 1959.

[6] Mostowski A., Stark M.: Algebra wyższa, tom I, W-wa, 1953.

ОБ ОДНОМ ВОРИОЦИОННОМ МЕТОДЕ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Содержание

В работе доказано, что условие

$$\delta(\bar{\delta}^2 \Pi)=0$$

вообще не ведём к соотвстственны критическим ногрузком иследуемой системы.

ÜBER EINE BESTIMMTE VARIATIONSMETHODE DER STATISCHEN STABILITÄT

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Bedingung

$$\delta(\bar{\delta}^2 \Pi)=0$$

im allgemeinen nicht zur Ermittlung der kritischen Belastung ies geprüften Systems führt.