

BUDOWNICTWO z. 11

TADEUSZ KOLENDOWICZ

MODELOWE WYZNACZANIE WIELKOŚCI STATYCZNYCH W UKŁADACH POWIERZCHNIOWYCH

(Metoda przemieszczeń wymuszonych)

**20-LECIE
POLITECHNIKI
ŚLĄSKIEJ**

**P O L I T E C H N I K A Ś L Ą S K A
ZESZYT NAUKOWY Nr 111 – GLIWICE 1964**

SPIS TREŚCI

I. WSTĘP	3
II. PODSTAWY TEORETYCZNE BADAŃ	5
1. Ogólna podstawa teoretyczna modelowego wyznaczania sił uogólnionych	5
2. Powierzchnia wpływowa momentu zginającego	6
3. Powierzchnia wpływowa siły poprzecznej	10
4. Powierzchnia wpływowa momentu skręcającego	12
5. Powierzchnia wpływowa siły osiowej	13
6. Powierzchnie wpływowe reakcji	13
III. ODPOWIEDNIOŚĆ MODELOWA	15
7. Moment zginający	16
8. Moment skręcający	21
9. Siła poprzeczna	22
10. Siła podłużna	25
11. Szczególny przypadek odpowiedniości dla płyt izotropowych	25
12. Modelowanie płyt i powłok anizotropowych	29
IV. APARATURA	30
13. Pomiary przemieszczeń	30
14. Deformator powierzchniowy poprzeczno-skrętny	32
15. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej momentu skręcającego	34
16. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej siły poprzecznej	48
17. Deformator powierzchniowy kątowy	55
18. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej momentu zginającego	56
19. Deformator powierzchniowy podłużny i problem wyznaczenia sił osiowych	65
V. INNE METODY I PORÓWNANIE Z NIMI METODY PRZEMIESZCZEŃ WYMUSZONYCH	66
20. Metoda pomiaru kąta	66
21. Metoda pomiaru wydłużeń	68
22. Metoda pomiaru krzywizny	70
23. Porównanie metody przemieszczeń wymuszonych z innymi metodami	72
IV. ZAKOŃCZENIE	75
V. SPIS LITERATURY	77

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

ZESZYTY NAUKOWE

Nr 111

TADEUSZ KOLENDOWICZ

**MODELOWE WYZNACZANIE WIELKOŚCI STATYCZNYCH
W UKŁADACH POWIERZCHNIOWYCH**

(Metoda przemieszczeń wymuszonych)

PRACA HABILITACYJNA Nr 39

Data otwarcia przewodu habilitacyjnego 24. II. 1964 r.

GLIWICE 1964

REDAKTOR NACZELNY ZESZYTÓW NAUKOWYCH
POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Fryderyk Staub

REDAKTOR DZIAŁU

Józef Głomb

SEKRETARZ REDAKCJI

Tadeusz Matula

Dział Nauki — Sekcja Wydawnictw Naukowych — Politechniki Śląskiej
Gliwice, ul. Konarskiego 23

P.J. 430/64

Nakł. 190+45 Ark. wyd. 4,68 Ark. druk. 5 Papier powielacz. kl. V, 70x100, 70 g
Oddano do druku 6. 5. 1964 Podpis. do druku 17. 5. 1964 Druk ukończ. w maju 1964
Zam. 798 8. 5. 1964 B-18 Cena zł 5,85

Wykonano w Zakładzie Graficznym Politechniki Śląskiej w Gliwicach

I. W S T Ę P

Wiadomo ogólnie jakie trudności następuje rachunkowe wyznaczenie sił uogólnionych w płytach i powłokach, dowolnie obciążonych i w dowolny sposób podpartych. Nakład pracy wzrasta i trudności obliczeniowe powiększają się w przypadku konieczności wyznaczenia powierzchni wpływowych dla płyt i powłok o kształtach dowolnych, nie symetrycznych. W takich przypadkach analiza rachunkowa dźwigara powierzchniowego staje się praktycznie niemożliwa i jedyne wyjście do znalezienia szukanych sił uogólnionych przekroju prowadzi do badań na modelach, wchodzących coraz częściej i powszechniej do praktyki inżynierskiej.

W badaniach modelowych układów prętowych najodpowiedniejszą metodą wyznaczenia linii wpływowej dowolnej siły uogólnionej przekroju lub reakcji podporowej jest metoda przemieszczeń wymuszonych zapoczątkowane przez BEGGSA [1]. Teoretyczne uzasadnienie metody Bettiego-Maxwella. Rozszerzenie tej metody na układy prętowe przestrzenne opisałem w swej pracy doktorskiej [7]. W trakcie rozwiązywania tego problemu zrodziła się wówczas myśl zastosowania metody przemieszczeń wymuszonych do wyznaczania powierzchni wpływowych sił uogólnionych przekroju i na brzegu w płytach i powłokach, o czym napisałem na str.147 tejże pracy [7]. Sposób ten, nadający się szczególnie do wyznaczenia powierzchni wpływowych, może objąć swym zastosowaniem również takie powierzchnie wpływowe sił uogólnionych jakich dotąd inne metody badań modelowych wyznaczyć bezpośrednio nie pozwalają. Dotyczy to siły poprzecznej.

Wyznaczenie linii wpływowych dla układów prętowych polega, przy stosowaniu metody przemieszczeń wymuszonych, na przecięciu pręta w miejscu badanym i wymuszeniu w tym miejscu przy pomocy deformatora odpowiedniego przemieszczenia przekroju. Siła uogólniona odnosi się więc do całego przekroju pręta. W układach powierzchniowych siły uogólnione przedstawione są w postaci powierzchni wpływowych i odnoszą się do określonego punktu tych układów, ponieważ w sąsiednim punkcie wartość siły uogólnionej jest z reguły różna. Chcąc za stosować metodę przemieszczeń wymuszonych do tych układów należało by przeciąć układ w badanym punkcie i wymusić odpowiednie przemieszczenie, nie naruszając przecięciem otoczenia tego punktu. Przecięcie modelu w punkcie nie jest możliwe. Musi posiadać pewną dłu-

gość, a więc siła uogólniona może być wyznaczona jako wartość średnia na tej długości. We wszystkich dotychczasowych metodach badań modelowych możliwe jest wyznaczenie tylko średniej wartości siły uogólnionej na pewnej długości. Długość ta jest różna w różnych metodach (sprawę tę omówiono w p. 20-23). W metodzie przemieszczeń wymuszonych wyznacza się również wartość średnią, jednak na długości mniejszej niż w innych metodach badań modelowych, co stanowi jedną z zalet tej metody.

Przed przystąpieniem do projektowania odpowiedniej aparatury (deformatorów) i praktycznego stosowania metody nasuwały się wątpliwości, czy po przecięciu płyty lub powłoki na pewnej niewielkiej długości jednolite otoczenie tego miejsca pozwoli na praktyczną realizację przemieszczenia, a więc kąta obrotu, kąta skręcenia, przesunięcia poprzecznego i przesunięcia podłużnego. Praktyka wykazała, że realizacja tych przemieszczeń jest możliwa, z wyjątkiem przesunięcia podłużnego, co zresztą było wyczuwalne jeszcze przed przystąpieniem do badań.

Nazwę "metoda przemieszczeń wymuszonych" w odniesieniu do badań modelowych układów prętowych wprowadził po raz pierwszy JANUSZ [5]. Tę nazwę, jako najlepiej określającą istotę badań tego typu, użyłem również w niniejszej pracy. Podałem w niej wzór ogólny, z którego wyprowadziłem wyrażenia na intensywność poszczególnych sił uogólnionych oraz omówiłem za każdym razem mechanizm postępowania doświadczalnego.

Dla każdego przypadku wyznaczenia sił uogólnionych wyprowadziłem warunki odpowiedniości modelowej w oparciu o zasady analizy wymiarowej, korzystając z twierdzenia π . Wykazałem również jak można uprościć projektowanie modelu w przypadku szczególnym badania płyt izotropowych, gdzie model niekoniecznie spełniać musi warunek całkowitego podobieństwa geometrycznego, stanowiący jeden z warunków podstawowych przy stosowaniu analizy wymiarowej. Omówiłem również sprawę projektowania modeli płyt i powłok anizotropowych.

Aparatura i sposób wyznaczania przy pomocy niej powierzchni wpływowych są dalszym istotnym wynikiem tej pracy. Zaprojektowano i wykonano trzy deformatory: kątowy, umożliwiający wyznaczenie momentu zginającego; poprzeczno-skrętny pozwalający wyznaczyć dwie powierzchnie wpływowe, a mianowicie momentu skręcającego i siły po przeczej oraz deformator podłużny. Stosowanie deformatora podłużnego, jak już wspomniano, nie dało pozytywnych rezultatów.

W końcowej części pracy opisałem inne metody badań modelowych, które również pozwalają na wyznaczenie powierzchni wpływowych i porównałem z nimi metodę przemieszczeń wymuszonych. Porównanie to uwydatnia bezsporne zalety omawianej metody.

II. PODSTAWY TEORETYCZNE BADAŃ

1. Ogólna podstawa teoretyczna modelowego wyznaczania sił uogólnionych

Omawianą metodę badań modelowych można uzasadnić opierając się na twierdzeniu Bettiego o wzajemności prac. Twierdzenie Bettiego jest ważne dla każdego układu liniowo sprężystego (układu Clapeyrona), a więc może być zastosowane zarówno do układów prętowych jak i do powierzchniowych.

Stosując twierdzenie Bettiego otrzymuje się wyrażenie na dowolną niewiadomą siłę uogólnioną X_1 w znanej postaci

$$X_1 = - \frac{P \cdot p}{\delta_1} \quad (1)$$

gdzie P jest siłą uogólnioną, obciążającą układ rzeczywisty, p przemieszczeniem uogólnionym w miejscu działania i kierunku siły P wyznaczonym w tzw. układzie pomocniczym, a δ_1 przemieszczeniem w miejscu działania i kierunku szukanej niewiadomej X_1 , wyznaczonym w układzie pomocniczym.

W szczególnym przypadku, gdy $P = 1$, wzór (1) staje się równaniem rzędnych η_{X_1} linii wpływowej lub powierzchni wpływowej siły uogólnionej X_1

$$\eta_{X_1} = - \frac{p}{\delta_1} \quad (2)$$

Szukane X_1 i η_{X_1} , występujące w równaniach (1) i (2), nie mogą być jeszcze obliczone analitycznie, ponieważ nie są znane wielkości przemieszczeń p i δ_1 .

Jest oczywiste, że wyznaczenie ich w płycie lub w powłoce jest tak samo trudne, jak wyznaczenie samych sił uogólnionych.

Wzory (1) i (2) wystarczają jednak do uzasadnienia teoretycznego omawianej metody wyznaczania sił uogólnionych na modelu. Mianowicie dla rzeczywistej płyty lub powłoki wykonujemy model z celuloиду, plexiglasu, blachy lub innego odpowiedniego tworzywa. W miejscu działania i kierunku szukanej siły uogólnionej X_1 przecinamy płytę lub powłokę wykonując w tym miejscu małą szczelinę i wymuszamy deformatorem odpowiednie przemieszczenie o znanej wartości δ_1 (stąd nazwa metody przemieszczeń wymuszonych). W tym stanie model odpowiada układowi teoretycznemu, nazwanemu wyżej pomocniczym. Wymuszenie przemieszczenia δ_1 powoduje odkształcenie płaszczy-

znych płyty lub powierzchni powłoki. Przemieszczenia p punktów płaszczyzny środkowej płyty lub powierzchni środkowej powłoki, figurujące we wzorach (1) i (2), mierzy się precyzyjną aparaturą pomiarową w miejscu i kierunku obciążenia. Znajomość p i δ_1 już umożliwia wyznaczenie wielkości X_1 i ηX_1 ze wzorów (1) i (2).

Ze wzoru (2) wynika, że przemieszczenia odkształconych powierzchni płyt i powłok, mierzone w kierunku obciążenia, tworzą powierzchnie wpływowe pewnej siły uogólnionej w podziałce określonej przez mieszczaniem wymuszonym δ_1 . Rzędne tych powierzchni, otrzymane na modelu trzeba jeszcze przeliczyć na rzeczywiste według wzorów, o których będzie mowa w p. III.

Wszystkie rozważania dotychczasowe dotyczą sposobu wyznaczania sił uogólnionych zarówno w przekrojach płyty lub powłoki, jak również w miejscach ich podparcia.

Powyższa teoria daje pojęcie ogólne o podstawach, na których opiera się badanie modelowe płyt i powłok sposobem przemieszczeń wymuszonych. Ze wzorów (1) i (2) wyprowadzone zostaną obecnie szczególne przypadki wyznaczania sił uogólnionych, obrazujące mechanizm badania modelowego.

2. Powierzchnia wpływowa momentu zginającego

Na powłokę przedstawioną na rysunku 1 działa w punkcie a dowolnie skierowana siła P. Należy wyznaczyć intensywność momentu zginającego m w przekroju c.

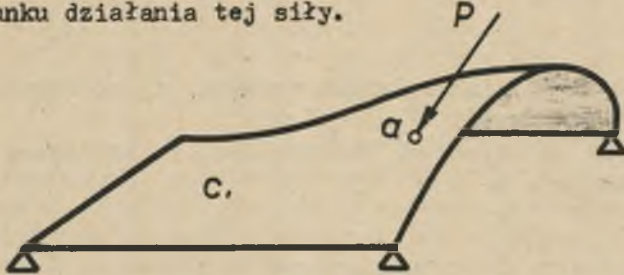
W celu znalezienia jakiegokolwiek siły uogólnionej wewnętrznej przekroju należy powłokę w tym miejscu myślowo przeciąć. Zrównoważone uogólnione siły przekroju staną się przez to siłami zewnętrznymi i wraz z siłą zewnętrzną P objęte będą twierdzeniem Bettiego. Układ pokazany na rysunku 1 i zmodyfikowany układ pokazany na rysunku 2 są równoważne. Oznaczono literami: \bar{m} wektor intensywności momentu zginającego, \bar{k} wektor intensywności momentu skręcającego, q intensywność siły poprzecznej, s intensywność siły podłużnej. Dla układu rzeczywistego zmodyfikowanego (rys.2) dobieramy układ pomocniczy, geometrycznie podobny do rzeczywistego i po uprzednim przecięciu powłoki w przekroju c obciążamy w miejscu i kierunku szukanego momentu m momentem wymuszającym wzajemny obrót sąsiednich płaszczyzn przekroju o kąt $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Sposób wymuszenia kąta ψ jest taki, że niemożliwe są inne przemieszczenia przekroju c.

Do układu rzeczywistego zmodyfikowanego (rys.2) i układu pomocniczego (rys.3) stosujemy teraz twierdzenie Bettiego. W danym przypadku spośród sił uogólnionych przekroju c, pokazanych na rys.2, pracę wykona tylko moment m na kącie ψ_1 i ψ_2 . Praca pozostałych sił uogólnionych przekroju jest równa zero, ponieważ odpowiadają im przemieszczenia zerowe.

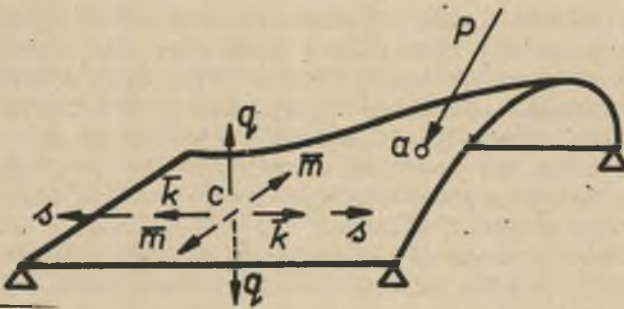
Na mocy twierdzenia Bettiego jest więc

$$m = - \frac{P \cdot p}{\delta}, \quad (3)$$

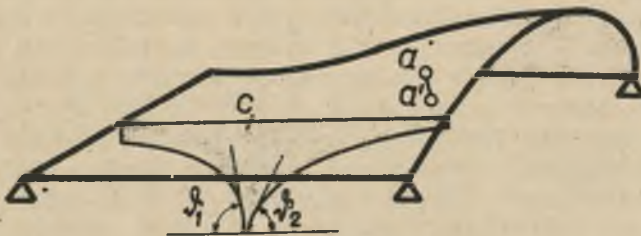
gdzie p jest składową przemieszczenia aa' punktu zaczepienia siły w kierunku działania tej siły.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Wymuszenie kąta δ spowoduje odkształcenie powierzchni środkowej powłoki. Na rysunku 3 pokazano przekrój zdeformowanej powłoki w układzie pomocniczym płaszczyzn działania momentu m .

Jeśli siłę P rozłożymy na składowe P_x , P_y i P_z , a przemieszczenie punktu a na składowe u , v i w , to składowymi momentu zginającego m w przekroju c będą

$$m^x = - \frac{P_x \cdot u}{\vartheta}, \quad m^y = - \frac{P_y \cdot v}{\vartheta}, \quad m^z = - \frac{P_z \cdot w}{\vartheta}, \quad (4)$$

gdzie m^x , m^y i m^z są częściami momentu m pochodzącymi od obciążenia siłami składowymi P_x , P_y i P_z .

Cały moment m wywołany obciążeniem P otrzymamy dodając do siebie liczby m^x , m^y i m^z :

$$m = m^x + m^y + m^z. \quad (5)$$

Z równań (4) nie można jeszcze wyznaczyć analitycznie momentu zginającego, ponieważ występują w nich niewiadome geometryczne u , v , w i ϑ . W celu wyznaczenia tych niewiadomych wykonuje się model układu pomocniczego, pokazany na rysunku 3, w odpowiedniej skali i z właściwego tworzywa. W miejscu, dla którego ma się wyznaczyć moment m , przecina się powłokę, wmontowuje się przyrząd nazwany deformatorem powierzchniowym kątowym i wymusza się nim obrót o znany kąt ϑ . Przemieszczenia składowe u , v i w mierzy się dokładną aparaturą i dzieli przez ϑ . Ostateczne wartości momentu m , otrzymane na modelu, trzeba jeszcze przeliczyć na rzeczywiste (p.7).

Stan napięcia w płycie ma osobliwość w punkcie, gdy jakakolwiek składowa naprężenia w tym punkcie staje się nieskończenie wielka [18]. Dotyczy to również powłok. Osobliwości występują zazwyczaj w punktach przyłożenia skupionych sił i momentów, a więc w rozważanym przypadku w przekroju, dla którego wyznacza się powierzchnię wpływową momentu, gdyż w tym przekroju obciąża się płytę lub powłokę skupionym momentem, wymuszającym obrót o kąt ϑ . W rozwiązaniach teoretycznych otrzymuje się osobliwość w postaci kieszki, o rzędnej posiadającej wielkość nieskończoną (całka jednak z objętości ograniczonej tą kieszką posiada wartość skończoną).

W badaniach modelowych wymuszenie obrotu w punkcie o kąt ϑ nie jest możliwe z przyczyn technicznych. Płytę lub powłokę trzeba bowiem uchwycić deformatorem na pewnej długości, a później wymusić obrót o kąt ϑ . Jeśli więc przy obrocie w punkcie intensywność kąta ϑ jest równa nieskończoności, to przy wymuszaniu obrotu deformatorem intensywność kąta ϑ jest skończona i zależna od wielkości rozłożenia tego kąta na długości e badanego przekroju. Stąd intensywność momentu zginającego, otrzymanego drogą modelową, będzie

odpowiadać szerokości pasma płyty lub powłoki równej e . Aby więc otrzymać intensywność momentu zginającego na jednostkę długości na leży pomierzone na modelu rzędne powierzchni odkształconej podzielić jeszcze przez e . Wychodząc ze wzoru ogólnego (2), równania rzędnych powierzchni wpływowej intensywności momentu zginającego będą więc

$$\eta_{m^x}^{(P)} = -\frac{u}{\sqrt{e}}, \quad \eta_{m^y}^{(P)} = -\frac{v}{\sqrt{e}}, \quad \eta_{m^z}^{(P)} = -\frac{w}{\sqrt{e}}. \quad (6)$$

Wielkości we wzorze (6) są niemianowane.

Dotychczasowe rozważania dotyczyły wyznaczenia momentu zginającego przy obciążeniu płyty lub powłoki siłą skupioną P .

Otrzymane wyniki rozszerzyć można na przypadek obciążenia płyty lub powłoki momentem skupionym. W tym przypadku należy na modelu pomierzyć kąty obrotu β w miejscach odpowiadających przyłożeniu momentów obciążających. Wektory momentu obciążającego i mierzonego kąta β są równoległe i posiadają to samo położenie oraz ten sam zwrot. Przy ukośnym działaniu momentu wektor β będzie również ukośny i można by go podobnie jak przesunięcie p , odpowiadające wyżej sile P , rozłożyć na trzy prostopadłe składowe, postępując dalej analogicznie jak przy obciążeniu siłą. Zazwyczaj jednak taka potrzeba zachodzi rzadko. Pomiar laboratoryjny natomiast kąta β , o dowolnym kierunku wektora, nie sprawia trudności.

Równanie rzędnych powierzchni wpływowej intensywności momentu zginającego przy obciążeniu układu momentem będzie więc:

$$\eta_m^{(M)} = \frac{-\beta}{\sqrt{e}}. \quad (7)$$

Wielkości $\eta_m^{(M)}$ posiadają wymiar $\frac{1}{\text{cm}}$.

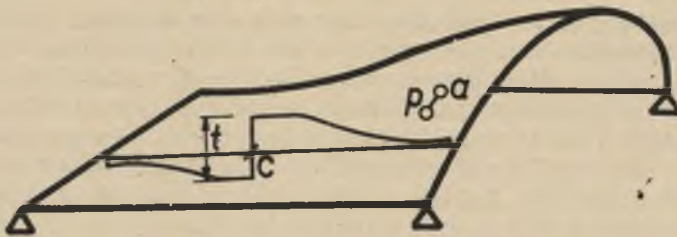
Przy rozpatrywaniu płyt i powłok stosunkowo prostych znakowanego momentu zginającego, inaczej zwrot wektora tego momentu, jest oczywisty i z miejsca widoczny. Przy układach skomplikowanych, zwłaszcza przy powłokach ciągłych, niesymetrycznie podpartych itp., zwrot wektora szukanego momentu zginającego może nie być od razu wiadomy.

Wymuszony deformatorem kąt ψ , przy tej samej wartości bezwzględnej, może mieć wektory o zwrotach przeciwnych. Tym samym zwrot wektora szukanego momentu m został przyjęty dowolnie. Należy więc jeszcze określić rzeczywisty zwrot tego wektora. Otóż ze wzoru ogólnego (1) wynika wprost następująca reguła:

Rzeczywisty moment zginający m ma taki zwrot, jaki założono dla kąta ϑ , gdy zwrot wektora siły uogólnionej obciążającej jest niezgodny ze zwrotem odpowiadającego jej przemieszczenia. Gdy te zwroty są zgodne, to rzeczywisty moment zginający m ma zwrot przeciwny do założonego zwrotu kąta ϑ .

3. Powierzchnia wpływowa siły poprzecznej

Intensywność siły poprzecznej q (rys.2) wyznacza się podobnie do momentu zginającego. W układzie pomocniczym sile tej odpowiada przesunięcie względne t dwóch sąsiednich płaszczyzn przekroju, równoległe do wektora tej siły. Na rysunku 4 pokazano przekrój powłoki odkształconej płaszczyzną prostopadłą do przekroju c i styczną do przesunięcia t .



Rys. 4

Zastosowanie twierdzenia Bettiego prowadzi do wyrażenia:

$$q = - \frac{P \cdot p}{t}, \quad (8)$$

gdzie p jest składową całkowitego przesunięcia punktu a powierzchni środkowej powłoki w kierunku działania siły P .

Po rozłożeniu siły P na składowe P_x , P_y i P_z , równoległe do osi współrzędnych, a przesunięcia p na składowe u , v i w , składowymi siły poprzecznej będą

$$q^x = - \frac{P_x \cdot u}{t}, \quad q^y = - \frac{P_y \cdot v}{t}, \quad q^z = \frac{-P_z \cdot w}{t}. \quad (9)$$

Całkowita wartość siły poprzecznej będzie równa

$$q = q^x + q^y + q^z \quad (10)$$

Równania (9) uzasadniają postępowanie modelowe służące do wyznaczenia siły poprzecznej. Model powłoki przecinamy w badanym przekroju c i wmontowujemy przyrząd nazwany deformatorem poprzecznym, którym wymuszamy znane przesunięcie t , a u , v i w mierzymy przy pomocy precyzyjnej aparatury. Ostateczne wartości siły q trzeba jeszcze przeliczyć na rzeczywiste.

Podobnie jak przy operacji wymuszania kąta ψ dla otrzymania momentu zginającego, również w rozważanym przypadku wyznaczania siły poprzecznej przy wymuszaniu deformatorem poprzecznym przesunięcia t , otrzymujemy intensywność tego przesunięcia na odcinku d badanego przekroju. Intensywność siły poprzecznej otrzymanej na modelu i przypadającej na jednostkę długości wyznaczmy więc ze wzoru (9) dzieląc odpowiednie wyrażenia przez d . Równania zaś rzędnych powierzchni wpływowej intensywności siły poprzecznej będą

$$\eta_{q_x}^{(P)} = -\frac{u}{td}, \quad \eta_{q_y}^{(P)} = -\frac{v}{td}, \quad \eta_{q_z}^{(P)} = -\frac{w}{td} \quad (11)$$

Wielkości te posiadają wymiar $\frac{1}{\text{cm}}$.

Równanie rzędnych powierzchni wpływowej intensywności siły poprzecznej przy obciążeniu powłoki momentem skupionym M jest

$$\eta_q^{(M)} = -\frac{\beta}{td} \quad (12)$$

Rzędne te mają wymiar $\frac{1}{\text{cm}^2}$.

Wektor kąta β jest mierzony na modelu w miejscu odpowiadającym obciążeniu M i posiada wektor o tym samym zwrocie i położeniu co wektor momentu M .

Rzędne powierzchni wpływowych otrzymane ze wzorów (11) i (12) trzeba jeszcze przeliczyć na rzeczywiste (p.9).

Siła poprzeczna w badanym przekroju c powłoki dąży do równoległego przesunięcia sąsiednich płaszczyzn przekroju w sposób pokazany na rys.4 lub przeciwny (tzn. lewa strona przekroju jest przesunięta w górę, prawa w dół).

Przesunięcie t (rys.4) jest wymuszone w badanym przekroju modelu deformatorem poprzecznym. Rzeczywisty zwrot siły poprzecznej jest zgodny ze zwrotem, jaki został nadany deformatorem, gdy zwrot

wektora siły obciążającej P lub momentu M jest niezgodny ze zwrotem wektora przesunięcia lub kąta obrotu punktu na modelu w miejscu i kierunku działania sił uogólnionych P i M . Gdy te zwroty są zgodne, to rzeczywista siła poprzeczna ma zwrot przeciwny do wymuszonego deformatorem wektora przesunięcia t .

4. Powierzchnia wpływowa momentu skręcającego

W sposób podobny jak w p.2 i 3 wyznacza się na modelu powierzchnię wpływową intensywności momentu skręcającego k . Płaszczyzny przekroju c należy w tym przypadku obrócić równolegle względem siebie o kąt ψ za pomocą deformatora powierzchniowego skrętnego. Wykuszenie kąta ψ spowoduje deformację powłoki. Składowe przesunięcia u , v i w punktów na powierzchni środkowej powłoki będą proporcjonalne do rzędnych powierzchni wpływowej momentu skręcającego dla obciążenia odpowiednimi siłami skupionymi P_x , P_y i P_z . Równania zaś rzędnych powierzchni wpływowej intensywności momentu skręcającego, przypadającego na jednostkę długości powłoki będą

$$\eta_{k,x}^{(P)} = -\frac{u}{\psi f}, \quad \eta_{k,y}^{(P)} = -\frac{v}{\psi f}, \quad \eta_{k,z}^{(P)} = -\frac{w}{\psi f}. \quad (13)$$

Wielkości te są niemianowane.

Równanie rzędnych powierzchni wpływowej przy obciążeniu powłoki momentem skupionym M jest

$$\eta_k^{(M)} = -\frac{\beta}{\psi f} \quad (14)$$

Wymiar tych rzędnych jest $\frac{1}{\text{cm}}$. Wektory β i M posiadają to samo położenie i ten sam zwrot.

Kąt ψ jest sumą bezwzględnych wartości dwu kątów ψ_1 i ψ_2 o które obracają się sąsiednie płaszczyzny badanego przekroju c . Kąty ψ_1 i ψ_2 mają jednakowy kierunek wektora lecz przeciwne zwroty.

Wektor rzeczywisty momentu skręcającego k ma zwrot zgodny z wektorem wymuszonych kątów ψ_1 i ψ_2 , jeżeli zwroty przemieszczeń składowych u , v i w lub kąta β i zwroty siły obciążającej P lub momentu obciążającego M są niezgodne. Gdy te zwroty są zgodne rzeczywisty moment skręcający k ma zwrot przeciwny do wymuszonego deformatorem.

5. Powierzchnia wpływowa siły osiowej

Wyznaczenie na modelu powierzchni wpływowej intensywności siły osiowej jest podobne do opisanego postępowania przy szukaniu pozostałych sił uogólnionych przekroju. Różnica polega tylko na tym, że przy pomocy deformatora podłużnego wymusza się wzajemne odsunięcie lub zbliżenie b sąsiednich płaszczyzn przekroju.

Przy obciążeniu siłą równania rzędnych powierzchni wpływowej in tensywności siły osiowej przypadającej na jednostkę długości powłoki będą

$$\eta_{s x}^{(P)} = -\frac{u}{bg}, \quad \eta_{s y}^{(P)} = -\frac{v}{bg} \quad \text{i} \quad \eta_{s z}^{(P)} = -\frac{w}{bg}. \quad (15)$$

Wymiar tych rzędnych jest $\frac{1}{\text{cm}}$. Przesunięcie b jest rozłożone w przekroju na długości g .

Równanie rzędnych powierzchni wpływowej przy obciążeniu powłoki momentem skupionym M jest

$$\eta_s^{(M)} = -\frac{\beta}{bg}. \quad (16)$$

Wymiar tych rzędnych jest $\frac{1}{\text{cm}^2}$. Rzędne powierzchni wpływowej otrzy mane na modelu trzeba jeszcze przeliczyć na rzeczywiste.

Rzeczywista siła osiowa s jest ściskaniem, gdy wektory przemieszczeń u, v, w i β oraz wektory odpowiadających im obciążeń P i M mają zwroty przeciwne. Przy zwrotach zgodnych rzeczywista siła osiowa jest rozciąganiem.

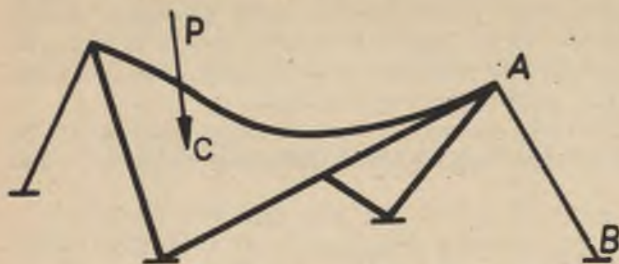
6. Powierzchnie wpływowe reakcji

Wyznaczenie powierzchni wpływowych oddziaływań jest w swej isto cie takie, jak w przypadkach obliczania sił uogólnionych wewnętrznych. Niewielka różnica może zachodzić jedynie w rodzaju przyrządów do wymuszania przemieszczeń.

Wyznaczanie momentów utwierdzenia, zginającego lub skręcającego odbywa się drogą wymuszania w miejscu utwierdzenia kąta obrotu ψ lub kąta skręcenia φ . Kąty te wymusza się deformatorami kątowym lub skrętnym, odpowiednio umocowanymi.

Siły podporowe można wyznaczyć przy użyciu deformatora poprzecz nego, jeśli chodzi o reakcję rozłożoną liniowo na podporze, lub

przez wymuszenie przesunięcia przy pomocy śruby mikrometrycznej, jeśli chodzi o reakcję w podparciu punktowym.



Rys. 5



Rys. 6

Wyznamy np. oddziaływanie R powłoki w punkcie A na pręt podpierający AB . Powłoka jest obciążona w punkcie c ukośną siłą skupioną P (rys. 5). Dla tego układu należy przyjąć odpowiedni układ pomocniczy (rys. 6). W punkcie A' wymuszamy przesunięcie n , którego wektor pokrywa się z AB . Przesunięcia w innych kierunkach jak również jakikolwiek obrót, są niemożliwe.

Stosując do układów z rys. 5 i 6 twierdzenie Bettiego otrzymujemy

$$R = - \frac{P \cdot d}{n} \quad (17)$$

Podobnie jak w przypadkach już omawianych, siłę P i przesunięcie p rozkładamy na składowe równoległe do osi x , y i z . Otrzymamy wówczas następujące równania

$$R^x = - \frac{P \cdot u}{n}, \quad R^y = - \frac{P \cdot v}{n} \quad i \quad R^z = - \frac{P \cdot w}{n} \quad (18)$$

Całkowita reakcja jest równa

$$R = R^x + R^y + R^z \quad (19)$$

Przy $P_x = P_y = P_z = 1$ wzór (18) staje się równaniem rzędnych powierzchni wpływowej oddziaływania R

$$\eta_{R^x_{AB}}^{(P)} = - \frac{u}{n}, \quad \eta_{R^y_{AB}}^{(P)} = - \frac{v}{n} \quad i \quad \eta_{R^z_{AB}}^{(P)} = - \frac{w}{n} \quad (20)$$

Przechodząc do badań modelowych należy sporządzić model powłoki i w miejscu i kierunku szukanego oddziaływania wymusić przesunięcie n . To przesunięcie można wymusić śrubą mikrometryczną, albo deformatorem powierzchniowym poprzecznym, przymocowanym w miejscu A do powłoki. Przesunięcia punktów zdeformowanej powierzchni powłoki mierzy się dokładną aparaturą i dzieli przez n .

Reguła znaków jest następująca; Rzeczywisty zwrot szukanego oddziaływania jest zgodny ze zwrotem wymuszonego przemieszczenia, gdy zwroty siły uogólnionej obciążającej i odpowiadającego jej przemieszczenia są przeciwne. Gdy te zwroty są zgodne, wówczas rzeczywisty zwrot oddziaływania jest przeciwny do wymuszonego przemieszczenia.

III. ODPOWIEDNIOŚĆ MODELWA

Żądamy aby rzędne powierzchni wpływowych otrzymane na modelu były ważne dla obiektu rzeczywistego. Model musi więc spełniać kryteria podobieństwa. Założeniem zasadniczym jest podobieństwo geometryczne między obiektem i modelem oraz podobieństwo układu sił obciążających, tzn. wszystkie siły muszą pozostawać między sobą w tych samych stosunkach wielkości i być przyłożone w odpowiadających sobie punktach.

Kryteria podobieństwa, odnoszące się zarówno do płyt jak i powłok, wyprowadzone w oparciu o zasady analizy wymiarowej (praca [2])

W dalszych rozważaniach symbole bez indeksu będą się odnosiły do obiektu, z indeksem (M) do modelu. Przyjęto następujące oznaczenia:

ν, ν_M - współczynnik Poissona [1],

E, E_M - moduł sprężystości podłużnej [kg m^{-2}],

L, L_M - wymiar długości [m],

$\dot{\varphi}, \dot{\varphi}_M$ - wymuszony kąt obrotu przy zginaniu [m^{-1}],

ψ, ψ_M - wymuszony kąt skręcenia [m^{-1}],

t, t_M - wymuszone przesunięcie poprzeczne [1],

w, w_M - przesunięcie punktu płaszczyzny lub powierzchni środkowej [1],

β, β_M - obrót przekroju płaszczyzny lub powierzchni środkowej [m^{-1}],

P, P_M - siła skupiona obciążająca [kg],

N, N_M - moment skupiony obciążający [kG m],

m, m_M - moment zginający [kG],

k, k_M - moment skręcający [kG],

q, q_M - siła poprzeczna [kG m⁻¹],

s, s_M - siła podłużna [kG m⁻¹].

Stosunki poszczególnych wielkości (podziałości) oznaczono:

$$K = \frac{\text{wielkość na modelu}}{\text{wielkość na obiekcie}}.$$

7. Moment zginający

7.1. Obciążenie siła skupiona

Moment zginający można wyrazić jako funkcję następujących parametrów

$$m = \Phi(\nu, E, L, \nu^d, w, P). \quad (21)$$

Przyjmując E, ν jako wymiarowo niezależne, funkcję m można, korzystając z twierdzenia π analizy wymiarowej, zapisać:

$$m = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) E^e \nu^d. \quad (22)$$

Obliczenie wykładników e i d :

$$kG = kG^e m^{-2e} m^{-d};$$

$$e = 1; 0 = -2e - d, \text{ stąd } d = -2.$$

$$m = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \frac{E}{\nu^2}.$$

Współczynniki bezwymiarowe π_1, π_2, π_3 i π_4 obliczamy następująco:

$$\pi_1 = \nu, \text{ bo jest bezwymiarowe.}$$

$$L = \pi_2 E^e \nu^d.$$

$$m = \pi_2 kG^e m^{-2e} m^{-d}.$$

$$e = 0; 1 = -2e - d, \text{ stąd } d = -1.$$

$$I = \pi_2 v^{-1}.$$

$$\pi_2 = Lv.$$

$\pi_3 = w$, bc jest bezwymiarowe.

$$F = \pi_4 E e v^d;$$

$$kG = \pi_4 kG e^m m^{-2e} m^{-d},$$

$e = 1; C = -2e - d$. stąd $d = -2$;

$$\pi_4 = \frac{P}{k v^2} = \frac{P v^2}{k}.$$

Moment zginający można teraz wyrazić w postaci następującej funkcji:

$$m = \varphi(v, Lv, w, \frac{P v^2}{E}) \frac{P}{k v^2}, \quad (23)$$

lub

$$\chi\left(\frac{m v^2}{E}, v, Lv, w, \frac{P v^2}{E}\right) = 0. \quad (24)$$

Podziałka momentów $K_m = \frac{m}{M}$.

" modułów sprężystości $K_E = \frac{E_M}{E}$.

" kątów $K_\vartheta = \frac{\vartheta_M}{\vartheta}$.

" długości $K_L = \frac{L_M}{L}$.

" sił obciążających $K_P = \frac{P_M}{P}$.

Dla modelu i obiektu muszą być spełnione następujące równości:

$$1) \frac{m_M v_M^2}{E_M} = \frac{m v^2}{E},$$

$$\frac{m_M}{m} = \frac{E_M}{E} \cdot \frac{v^2}{v_M^2}, \text{ czyli}$$

$$K_m = K_E \frac{1}{K_\vartheta^2}. \quad (25)$$

$$2) I_M \vartheta_M^3 = L \vartheta^3,$$

$$\frac{\vartheta_M^3}{\vartheta^3} = \frac{I}{I_M}, \text{ czyli}$$

$$K_{\vartheta^3} = \frac{1}{K_L}. \quad (26)$$

Równanie (26) wyraża związek między podziałką kątów a podziałką długości.

$$3) \frac{P_M \vartheta_M^2}{E_M} = \frac{P \vartheta^2}{E},$$

$$\frac{P_M}{P} \cdot \frac{\vartheta_M^2}{\vartheta^2} = \frac{E_M}{E}, \text{ czyli}$$

$$K_P \cdot K_{\vartheta^2} = K_E.$$

W modelu i obiekcie $P_M = P = 1$, czyli $K_P = 1$, a więc

$$K_E = K_{\vartheta^2}^2. \quad (27)$$

Podstawiając (27) do (25) otrzymujemy

$$K_m = 1, \text{ czyli} \quad (28)$$

$$\boxed{m = m_M} \quad (29)$$

Oznacza to, że przy obciążeniu siłą skupioną $P_M = P = 1$ moment zginający lub rzędne powierzchni wpływowej momentu zginającego wyznaczone na modelu są ważne dla obiektu i nie zależą od podziałki długości. Odpowiedniość ta jest ścisła przy założeniu $\vartheta_M = \vartheta$.

7.2. Obciążenie momentem zginającym

W przypadku tym wyrazimy moment zginający jako funkcję parametrów:

$$m = \Phi(\nu, E, L, \vartheta, \beta, N).$$

Przyjmując E i ν jako wymiarowo niezależne wyrazimy moment następująco:

$$m = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) E^e \nu^d.$$

Korzystając z wyników p.7.1 można napisać wprost

$$m = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \frac{E}{\nu^2}, \quad (30)$$

$$\pi_1 = \nu,$$

$$\pi_2 = l\nu$$

Dalsze współczynniki bezwymiarowe obliczymy następująco:

$$\beta = \pi_3 E^e \nu^d,$$

$$m^{-1} = \pi_3 \text{ kG}^e m^{-2e} m^{-d};$$

$$e = 0; d = 1; \beta = \pi_3 \nu, \quad \text{stad}$$

$$\pi_3 = \frac{\beta}{\nu}.$$

$$N = \pi_4 E^e \nu^d;$$

$$\text{kG m} = \pi_4 \text{ kG}^e m^{-2e} m^{-d};$$

$$e = 1; 1 = -2 - d, \quad \text{stad } d = -3.$$

$$N = \pi_4 E \nu^{-3},$$

$$\pi_4 = \frac{N\nu^3}{E}.$$

Wartości poszczególnych π wstawiamy do równania (30):

$$m = \varphi(v, L\vartheta, \frac{\beta}{\vartheta}, \frac{N\vartheta^3}{E}) \frac{E}{\vartheta^2}, \quad (31)$$

lub

$$\chi \left(\frac{m\vartheta^2}{E}, v, L\vartheta, \frac{\beta}{\vartheta}, \frac{N\vartheta^3}{E} \right) = 0. \quad (32)$$

Równania (25) i (26) obowiązują również w tym przypadku, czyli

$$K_m = K_E \frac{1}{K_\vartheta^2}, \quad (33)$$

$$K_\vartheta = \frac{1}{K_L}. \quad (34)$$

Dalej jest również:

$$\frac{N_M \vartheta^3}{E_M} = \frac{N\vartheta^3}{E},$$

$$\frac{N_M}{N} \cdot \frac{\vartheta^3}{\vartheta} = \frac{E_M}{E}, \quad \text{czyli}$$

$$K_N \cdot K_\vartheta^3 = K_E.$$

W modelu i obiekcie $N_M = N = 1$, czyli $K_N = 1$, a więc

$$K_E = K_\vartheta^3. \quad (35)$$

$$\text{Na podstawie (34)} \quad K_\vartheta^3 = \frac{1}{K_L^3} = K_E, \quad (36)$$

oraz

$$\frac{1}{K_\vartheta^2} = K_L^2. \quad (37)$$

Podstawiamy (36) i (37) do (33):

$$K_m = \frac{1}{K_L}, \text{ czyli} \quad (38)$$

$$\frac{m_M}{m} = \frac{1}{K_L}.$$

Ostatecznie

$$\boxed{m = m_M K_L} \quad (39)$$

Przy obciążeniu momentem skupionym $N_M = N = 1$ moment zginający lub rzędne powierzchni wpływowej momentu zginającego dla obiektu równe są momentom lub rzędnym otrzymanym na modelu pomnożonym przez podziałkę długości, przy założeniu $\nu_M = \nu$.

8. Moment skrecający

8.1. Obciążenie siłą skupioną

Moment skrecający wyrazimy podobną funkcją jak moment zginający

$$k = \Phi(\nu, E, L, \psi, w, P). \quad (40)$$

Funkcje (40) i (21) różnią się tym, że zamiast kąta ν występuje kąt ψ . Obydwa kąty posiadają ten sam wymiar. Otrzymamy więc związek podobny do (29), tj.

$$\boxed{k = k_M} \quad (41)$$

8.2. Obciążenie momentem skupionym

$$k = \Phi(\nu, E, L, \psi, \beta, N).$$

Analogicznie jak przy momencie zginającym otrzymamy

$$\boxed{k = k_M K_L} \quad (42)$$

9. Siła poprzeczna

9.1. Obciążenie siłą

Siłę poprzeczną wyrazimy w postaci funkcji

$$q = \Phi(\nu, E, L, t, w, P). \quad (43)$$

Przyjmujemy E i L jako wymiarowo niezależne.

Funkcję q zapiszemy

$$q = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) E^e L^l. \quad (44)$$

Obliczenie wykładników e i l :

$$KG m^{-1} = kG^e m^{-2e} m^l;$$

$$e = 1; -1 = -2 + 1, \text{ stąd } l = 1.$$

$$q = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) EL \quad (45)$$

Współczynniki bezwymiarowe zostały obliczone podobnie jak w p.7.

Ich wartości są następujące: $\pi_1 = \nu$; $\pi_2 = t$; $\pi_3 = w$; $\pi_4 = \frac{P}{EL^2}$.

Funkcję (45) zapiszemy teraz:

$$q = \varphi(\nu, t, w, \frac{P}{EL^2}) \cdot EL, \quad (46)$$

lub

$$\mathcal{H}(\frac{q}{EL}, \nu, t, w, \frac{P}{EL^2}) = 0. \quad (47)$$

Podziałkę sił poprzecznych oznaczono $K_q = \frac{q_M}{q}$. Dla modelu i obiektu muszą być spełnione następujące równości:

$$\frac{q_M}{E_M L_M} = \frac{q}{EL}, \text{ albo } \frac{q_M}{q} = \frac{E_M L_M}{EL}, \text{ czyli}$$

$$K_q = K_E K_L. \quad (48)$$

Dalej

$$\frac{P_M}{E_M I_M^2} = \frac{P}{EL^2}, \text{ albo } \frac{P_M}{P} = \frac{E_M I_M^2}{EL^2}.$$

Siły $P_M = P = 1$, a więc

$$1 = K_E K_L^2,$$

lub

$$K_E = \frac{1}{K_L^2}. \quad (49)$$

Równanie (49) podstawiamy do (48) i otrzymujemy

$$K_q = \frac{1}{K_L}, \text{ czyli} \quad (50)$$

$$\frac{q_M}{q} = \frac{1}{K_L}.$$

Ostatecznie

$$\boxed{q = q_M K_L}. \quad (51)$$

Siła poprzeczna wyznaczona na modelu i pomnożona przez podziałkę długości jest dla obciążeń $P_M = P = 1$ równa sile poprzecznej w obiekcie. Odpowiedniość ta jest ścisła przy $\nu_M = \nu$.

9.2. Obciążenie momentem

Siłę poprzeczną wyrazimy jako funkcję następujących parametrów:

$$q = \Phi(\nu, E, L, t, \beta, N). \quad (52)$$

E i L przyjmujemy jako wymiarowo niezależne.

$$q = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) E^{\alpha} L^{\beta}. \quad (53)$$

Na podstawie analogii z 9.1 jest:

$$q = \varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)EL, \quad (5)$$

Współczynniki π , po obliczeniu, mają następujące wartości:

$$\pi_1 = \nu; \pi_2 = t; \pi_3 = \beta L; \pi_4 = \frac{N}{EL^3}.$$

Obliczone wielkości dla poszczególnych π wstawiamy do (54):

$$q = \varphi(\nu, t, \beta L, \frac{N}{EL^3})EL, \quad (5)$$

lub

$$\chi(\frac{q}{EL}, \nu, t, \beta L, \frac{N}{EL^3}) = 0. \quad (5)$$

Dla obiektu i modelu muszą być spełnione następujące równości:

$$K_q = K_E K_L, \quad (5)$$

na tej samej podstawie co równość (48).

$$\beta_M L_M = \beta L, \text{ albo}$$

$$\frac{\beta_M}{\beta} = \frac{L}{L_M}, \text{ czyli } K_\beta = \frac{1}{K_L}.$$

Ostatnie równanie określa związek między podziałką kątów obrotu podziałką długości

$$\frac{N_M}{E_M L_M^3} = \frac{N}{EL^3}, \text{ albo } \frac{N_M}{M} = \frac{E_M}{E} \cdot \frac{L^3}{L_M^3}.$$

momenty $N_M = N = 1$, a więc

$$1 = K_E \cdot K_L^3, \quad (59)$$

lub

$$K_E = \frac{1}{K_L^3}$$

Wstawiając równanie (59) do (57) otrzymamy

$$K_q = \frac{1}{K_L^2}, \text{ czyli } \frac{q_M}{q} = \frac{1}{K_L^2}. \quad (60)$$

Ostatecznie

$$\boxed{q = q_M K_L^2} \quad (61)$$

Siła poprzeczna wyznaczona na modelu i pomnożona przez kwadrat podziałki długości jest przy obciążeniach momentami $N_M = N = 1$ równa sile poprzecznej w obiekcie. $\nu_M = \nu$.

10. Siła podłużna

Siłę podłużną można również przedstawić przy pomocy funkcji, której parametry mają taki sam wymiar jak parametry funkcji siły poprzecznej. Zastosowanie analizy wymiarowej prowadzi więc do wyników podobnych. Można zatem napisać wprost:

Przy obciążeniu $P = 1$ $\boxed{s = s_M K_L}$ (62)

Przy obciążeniu $N = 1$ $\boxed{s = s_M K_L^2}$ (63)

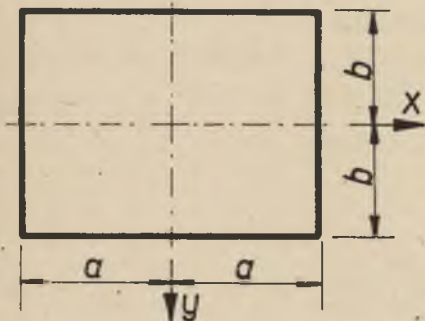
11. Szczególny przypadek odpowiedniości dla płyt izotropowych

Wyprowadzone poprzednio kryteria podobieństwa zakładają $\nu_M = \nu$ oraz podobieństwo geometryczne między obiektem i modelem. Oznacza to, że wymiary długości, szerokości i grubości płyty muszą posiadać jednakową podziałkę. Poniżej zostanie wykazane, że siły i momenty w płycie zależą od wymiarów płyty w planie, a nie zależą od

grubości, wobec czego grubość modelu może być przyjęta dowolnie. Można również uwzględnić w niektórych przypadkach różne ν .

Równanie biharmoniczne, które muszą spełniać ugięcia "w" płyty ma następującą postać:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{p}{D} \quad (64)$$



Rys. 7

Wprowadźmy nowe zmienne ξ, η i w_0 (rys.7):

$$x = \xi a; \quad y = \eta b; \quad w = A w_0;$$

A jest współczynnikiem bezwymiarowym, na razie nieustalonym. Wprowadźmy oznaczenie $\gamma = a:b$.

Wobec tego będzie:

$$a^4 = \gamma^4 b^4, \quad b^4 = \frac{a^4}{\gamma^4}, \quad a^2 = \gamma^2 b^2, \quad b^2 = \frac{a^2}{\gamma^2}.$$

Równanie (64) można zatem zapisać następująco [10]:

$$A \left(\frac{1}{\gamma^4 b^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \frac{2 \gamma^2}{\gamma^2 b^2 a^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} \frac{\gamma^4}{a^4} \right) = - \frac{p}{D},$$

albo

$$A \left(\frac{1}{\gamma^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\gamma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} \right) = - \frac{pb^4}{D} \quad (65)$$

Wyrażenie po prawej stronie równania (65) jest bezwymiarowe, gdyż

$$\frac{pb^4}{D} = \frac{pb^4}{Eh^3} \cdot 12(1 - \nu^2) = \left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot \text{cm}^4 \cdot \frac{1}{\text{kg cm}^2} \right] = [1].$$

Ponieważ A jest również bezwymiarowe, można przyjąć

$$A = - \frac{qb^4}{D}. \quad (66)$$

Wstawiając wyrażenie (66) do równania (65) otrzymamy

$$\frac{1}{\gamma^4} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + \frac{2}{\gamma^2} \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial \eta^4} = 1. \quad (67)$$

Z równania (67) wynika, że funkcja w_0 zależy tylko od parametru γ , a więc jest równa dla płyt o różnych wymiarach, dla których γ jest stałe.

11.1. Momenty zginające

Momenty zginające w płycie wyrażone są następującymi równaniami

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (68)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Uwzględniając wprowadzone wyżej oznaczenia można napisać

$$m_x = -pb^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} \right) \quad (69)$$

$$m_y = -pb^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \frac{\nu}{\gamma} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \right)$$

Z równań (69) wynika, że momenty zginające zależą od dwóch niezależnych parametrów bezwymiarowych γ i ν , nie zależą natomiast od sztywności D .

Zakładając więc $\nu_M = \nu$, model już spełnia warunek podobieństwa geometrycznego jeśli podziałki dla długości i szerokości płyty są jednakowe.

11.2. Momenty skręcające

Równanie momentu skręcającego ma następującą postać

$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (70)$$

lub po wprowadzeniu oznaczeń jak w p.11.1

$$m_{xy} = -\frac{pb^2}{\gamma} (1 - \nu) \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi \partial \eta} \quad (71)$$

Moment skręcający zależy więc również od γ i ν . Stosunek γ spełniony zostanie w jednakowej podziałce długość boków płyty, grubość zaś może być dowolna. Z reguły niemożliwe jest spełnienie $\nu_M = \nu$. Niespełnienie jednak tego postulatu nie obarczy wyników otrzymanych na modelu żadnym błędem, jeśli wykona się proste przeliczenie w sposób następujący:

Przy obciążeniu siłą $P = 1$

$$\eta_{rzecz.} = \eta_{model} \frac{1 - \nu}{1 - \nu_M}, \quad (72)$$

a przy obciążeniem momentem $N = 1$

$$\eta_{rzecz.} = \eta_{model} \frac{1 - \nu}{1 - \nu_M} K_L \quad (73)$$

11.3. Siły poprzeczne

Siłę poprzeczną wyraża następujące równanie:

$$q_{xz} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial x}, \quad (74)$$

lub po odpowiednim podstawieniu

$$q_{xz} = -\frac{pb^3}{\gamma} \frac{\partial \Delta w_0}{\partial \xi}. \quad (75)$$

Z równania (75) wynika, że siła poprzeczna nie zależy również od grubości płyty i nie zależy ponadto od ν . Siła poprzeczna więc otrzymana na modelu, nie jest obciążona przy przejściu do obiektu żadnym błędem, jeśli przyjęto jednakową podziałkę długości i szerokości boków. Dowolne mogą być grubość i ν_M .

12. Modelowanie płyt i powłok anizotropowych

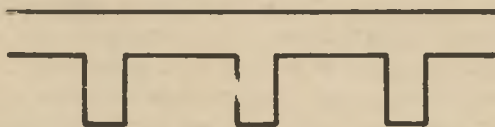
Badanie układów anizotropowych na modelach jest możliwe pod warunkiem odpowiedniego zaprojektowania modelu. Nie we wszystkich przypadkach jest to możliwe. Trudno jest np. wykonać model płyty żelbetowej o anizotropii ortogonalnej (ewentualnie w modelu gipsowym). Udowodniono jednak [13], że przy sztywnościach w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach o wartościach różniących się o 20% błąd wynikający z przyjęcia płyty jako izotropowej jest mniejszy od tego, który jest spowodowany przez przyjęcie $\nu = 0$, praktykowane często w budownictwie żelbetowym. Dlatego modele płyt żelbetowych anizotropowych można wykonać z reguły z materiału izotropowego. W przypadkach szczególnych, przy znacznych różnicach sztywności w różnych kierunkach, projektowanie modelu wymaga szczególnej analizy.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Inny rodzaj anizotropii może polegać na tym, że materiał jest izotropowy, a anizotropia wynika dopiero na skutek ukształtowania powierzchni. Do takich przypadków zaliczyć można przykładowo blachę falistą (rys. 8); blachę wzmocnioną żebrami (rys. 9), płytę wzmocnioną układem żeber w jednym kierunku (rys. 10) lub w obu kierunkach (ruszt). W tych przypadkach model należy wykonać jako geometrycznie podobny i spełnić warunki odpowiedniości podane w p.7 do 10.

IV. APARATURA

13. Pomiary przemieszczeń

W części teoretycznej wykazano, że wyznaczanie powierzchni wpływowych sił uogólnionych płyt i powłok sprowadza się do pomiaru przesunięć punktów na powierzchni zdeformowanego modelu w przypadku obciążenia układu rzeczywistego siłą lub do pomiaru kątów obrotu przekrojów modelu, gdy układ rzeczywisty jest obciążony momentem.

Pomiar kątów obrotu jest prosty i wykonuje się przy pomocy lunety autokolimacyjnej i lusterek, założonych w badane przekroje modelu. Pomiar przesunięć jest w zasadzie również nieskomplikowany, jeżeli posiada się odpowiednio precyzyjną aparaturę. Rzędne ugięcia powierzchni odkształconej są bardzo małe, zwłaszcza, gdy wpływ wyznaczanej na modelu siły uogólnionej nie jest wielki. Rzędne te są szczególnie małe przy wyznaczaniu powierzchni wpływowej siły poprzecznej. Małe przesunięcia, od kilku do kilkudziesięciu mikronów można łatwo pomierzyć przy pomocy elektrycznego czujnika indukcyjnego Philipsa lub aparatury zbudowanej na zasadzie pneumatycznej.

Czujnik elektryczny Philipsa stosowany jest w aparaturze LEONHARDTA, ANDRÁ'A i KRIGERA służącej do wyznaczania powierzchni wpływowych momentów zginających i skręcających dla płyt na zasadzie pomiaru krzywizny. Najmniejsza wartość pomiarowa tego czujnika wynosi 0,0001 mm.

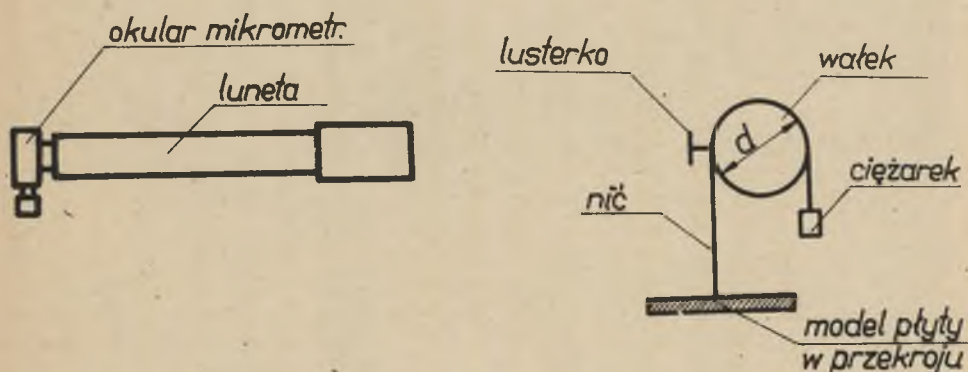
Jeszcze mniejsze przesunięcia można pomierzyć czujnikami pneumatycznymi, przy stosowaniu których można uzyskać powiększenie 40 000 razy.

Istotną właściwością tych czujników jest to, że nie obciążają one modelu albo zupełnie (czujnik pneumatyczny) lub obciążają minimalnie (czujnik elektryczny) bez znaczenia praktycznego. Natomiast czujniki mechaniczne, sprężynowe, obciążają model naciskiem sprężyny, co jest niedopuszczalne w badaniach modelowych opisanego typu.

Autor niniejszej pracy nie dysponował niestety przy pomiarach modelowych ani czujnikiem elektrycznym ani czujnikiem pneumatycznym. Autor użył więc aparatury pomiarowej własnego pomysłu, zbudow-

wanej dla pomiarów przesunięć przestrzennych modeli prętowych, która może być zastosowana również w badaniach modelowych płyt i powłok.

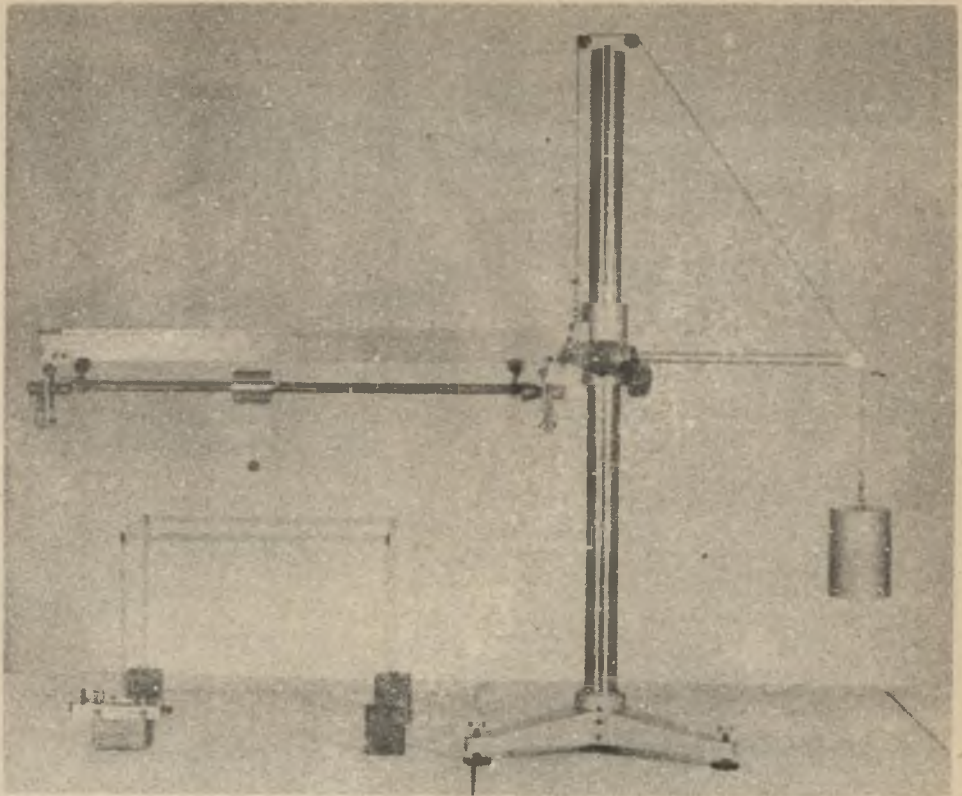
Aparatura ta składa się z lunety autokolimacyjnej i wałka sprężonego z lusterkiem (rys. 11). Przez wałek przewinięta jest nić zaczepiona jednym końcem do modelu. Na drugim końcu nici zawieszony



Rys. 11

jest niewielki ciężarek dla zrównoważenia ciężaru lusterka oraz dla uzyskania niezbędnego napięcia nici. Siła jaka w ten sposób przenosi się na model jest niewielka i stała, wobec czego nie ma ona żadnego znaczenia. Po zdeformowaniu modelu, punkt do którego została zaczepiona nić, przesunie się pociągając za sobą nić, co spowoduje obrót wałka z lusterkiem o pewien kąt. Kąt obrotu można odczytać przy pomocy lunety autokolimacyjnej, a znając średnicę wałka obliczyć część obwodu odpowiadającą temu kątowi. Będzie to szukane przesunięcie punktu modelu. Od wielkości średnicy wałka zależy najmniejsza wartość pomiarowa odczytana na śrubie okularu mikrometrycznego założonego do lunety autokolimacyjnej. Zależnie od wielkości przesunięć modelu można użyć wałków o różnych średnicach. W pomiarach modelowych płyt, przeprowadzonych przez autora, użyto wałka o średnicy 49,5 mm. Najmniejsza wartość pomiarowa wynosiła dla tego przypadku 0,00024 mm.

Wałek oparty jest na specjalnym statywie, pokazanym na rys. 12.



Rys. 12

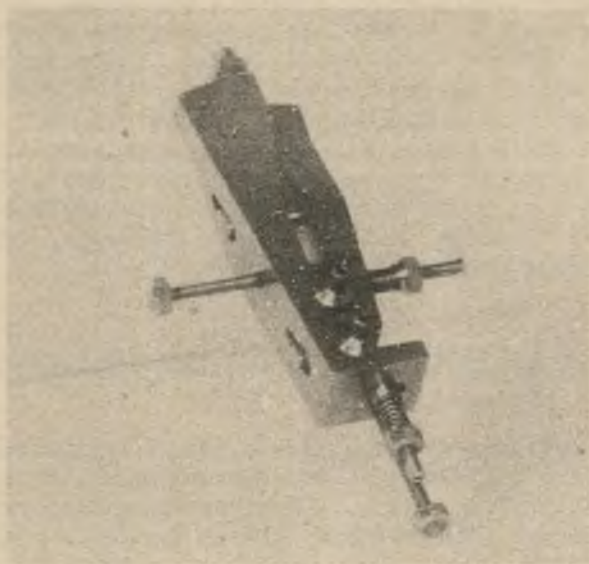
14. Deformator powierzchniowy poprzeczno-skrętny

Powierzchnię wpływową momentu skręcającego i powierzchnię wpływową siły poprzecznej dla dowolnej płyty i powłoki można otrzymać wymuszając w badanym przekroju odpowiednio kąt skręcenia ψ i przesunięcie poprzeczne t . Oba te przemieszczenia można wymusić przy pomocy zaprojektowanego przez autora deformatora powierzchniowego poprzeczno-skrętnego, którego fotografię przedstawia rys. 13.

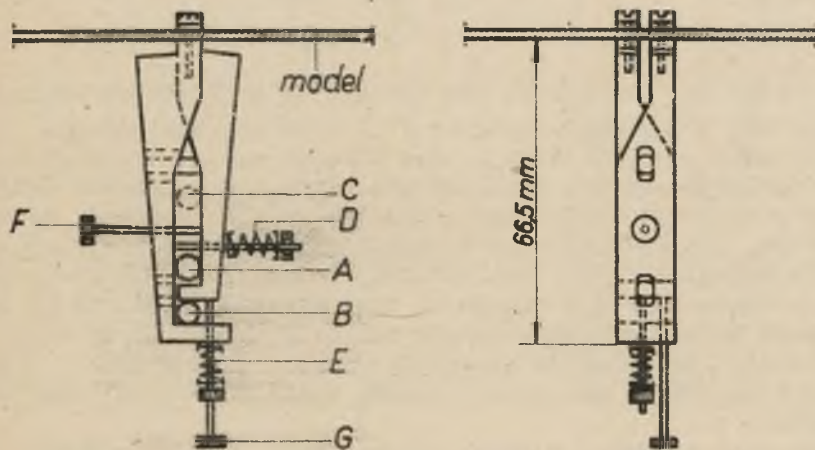
Na rys. 14 pokazano schemat tego deformatora w dwóch rzutach.

Kąt skręcenia wymuszony zostaje przez zmianę średnicy wałka A umieszczonego między dwoma stalowymi ramionami dociskanyymi do wałka sprężyną D. Podczas operacji wymuszania kąta skręcenia umieszczony jest w deformatorze wałek B dociskany sprężyną E, którego zadaniem jest uniemożliwienie wzajemnego przesunięcia poprzecznego ramion deformatora. Śruby F i G umożliwiają odsunięcie się od siebie ramion w celu wymiany wałków o różnych średnicach. Model przy-

mocowany jest do deformatora przy pomocy nakładek i śrub. Szerokość ramion w miejscu przymocowania do modelu wynosi 5 mm. Długość teoretyczna ramion jest równa 49,5 mm. Przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych momentu skręcającego maksymalna różnica średnic



Rys. 13



Rys. 14

zmienianego wałka A wynosiła 0,3 mm. Przy grubości modelu 2 mm wymuszano więc maksymalny kąt skręcenia równy 0,00594 radiana.

Wzajemne równoległe przesunięcie poprzeczne t otrzymamy przesuwając równoległe ramiona deformatora przez zmianę średnicy wałka B. Przy tej operacji należy jeszcze wstawić między ramiona dodatkowy wałek C o takiej samej średnicy jak wałek A. Jednakowe średnice wałków A i C zapewniają równoległość przesunięcia ramion, wykluczając jednocześnie wszelkie inne przemieszczenia badanego przekroju. Ciężar wszystkich wałków musi być jednakowy. Średnice ich zmieniają się od 4,0 mm do 5,0 mm co 0,1 mm.

Przeprowadzone przy pomocy deformatora poprzeczno-skrętnego badania modeli ograniczyły się do takich pomiarów płyt, dla których rozwiązania podane są w literaturze. Porównanie wyników miało udowodnić poprawność omawianej metody badań modelowych, jak również zweryfikować sprawne działanie deformatora.

15. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej momentu skręcającego

Powierzchnię wpływową momentu skręcającego wyznaczono dla płyt ukośnych podpartych swobodnie na dwóch krawędziach przeciwnych, a wyniki dla tych płyt porównano z powierzchniami wpływowymi otrzymanymi przez RUSCHA I HERGENRÖDERA [16] na modelach z gipsu.

Zgodnie ze wzorem (13) rzędna powierzchni wpływowej intensywności momentu skręcającego jest wyrażona równaniem

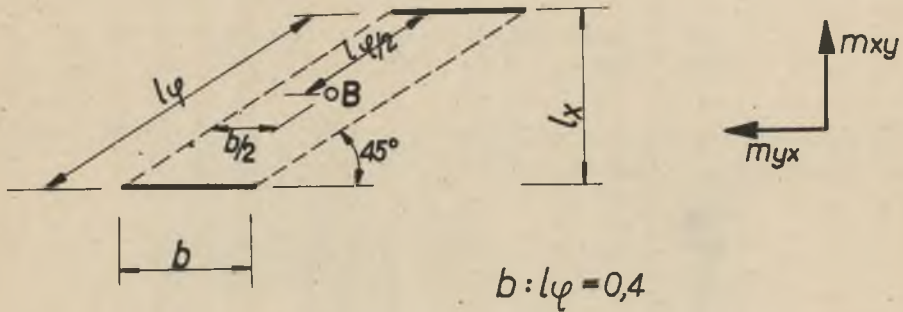
$$\eta_k = -\frac{m}{\psi f}$$

Na modelu więc η_k otrzymuje się wymuszając przy pomocy deformatora znany kąt ψ , mierząc ugięcia w i dzieląc przez długość f rozłożenia kąta ψ . W przekroju, dla którego wyznacza się dowolną wielkość statyczną, model przecina się. Przyjęto jednakową długość szczeliny przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych zarówno momentu skręcającego, jak również momentu zginającego i siły poprzecznej. Długość ta wynosiła 10 mm. Wielkość f jednak nie jest równa długości przecięcia i jest z reguły od niej większa. Wielkość tę należy wyznaczyć doświadczalnie. Zależy ona od grubości płyty lub powłoki i od cech sprężystych materiału modelu. Udowodniono natomiast, że wielkość ta nie zależy od wielkości modelu i warunków brzegowych.

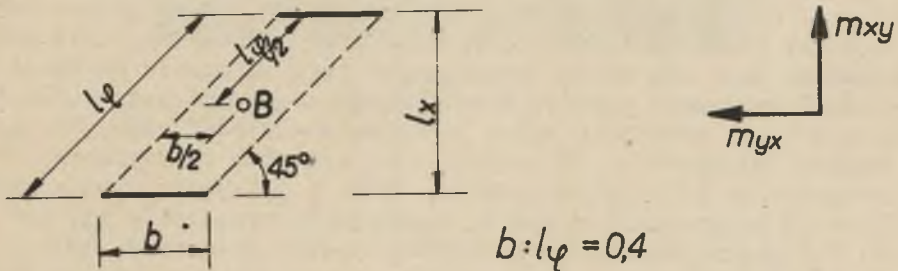
Powierzchnie wpływowe momentu skręcającego m_{xy} wyznaczono dla punktu B płyt opisanych na rysunkach 15 i 16.

Boki krótsze są swobodnie podparte, krawędzie dłuższe są swobodne. We wszystkich przypadkach szczelina w przekroju B jest prostopadła do wektora m_{xy} .

Jak już wspomniano, otrzymane rzędne powierzchni wpływowych porównano z rzędnymi uzyskanymi dla analogicznych płyt w publikacji RUSCHA i HERGENRÖDERA [16]. Ponieważ powierzchnie wpływowe w tej publikacji wyznaczone dla płyt z gipsu o współczynniku Poissona $\nu^g = 0,215$, a badane przez autora modele były wykonane z aluminium i celulozoidu o $\nu_d = 0,340$ i $\nu_{cel} = 0,38$, trzeba było podane rzędne powierzchni wpływowej, powiększone jeszcze 8X-krotnie, odpowiednio przeliczyć.



Rys. 15



Rys. 16

Równanie momentu skręcającego posiada następującą postać:

$$m_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

W p.11 wykazano, że rzędne powierzchni wpływowej nie zależą od sztywności D , zależą natomiast od współczynnika ν . Wartości rzędnych

dla modeli aluminiowych otrzymano więc wykonując następujące przeliczenie:

$$8\pi \frac{m_{al}}{xy} = \frac{m_{gips}}{xy} \frac{1 - \nu_{al}}{1 - \nu_{gips}} = \frac{m_g}{xy} \frac{1 - 0,34}{1 - 0,215} = \frac{m_{gips}}{xy} \cdot 0,841.$$

Ostateczną wartość rzędnych otrzymano dzieląc przez 8π . A więc

$$\frac{m_{al}}{xy} = \frac{m_{gips}}{mx} \frac{0,841}{8\pi} = \frac{m_{gips}}{xy} \cdot 0,03345.$$

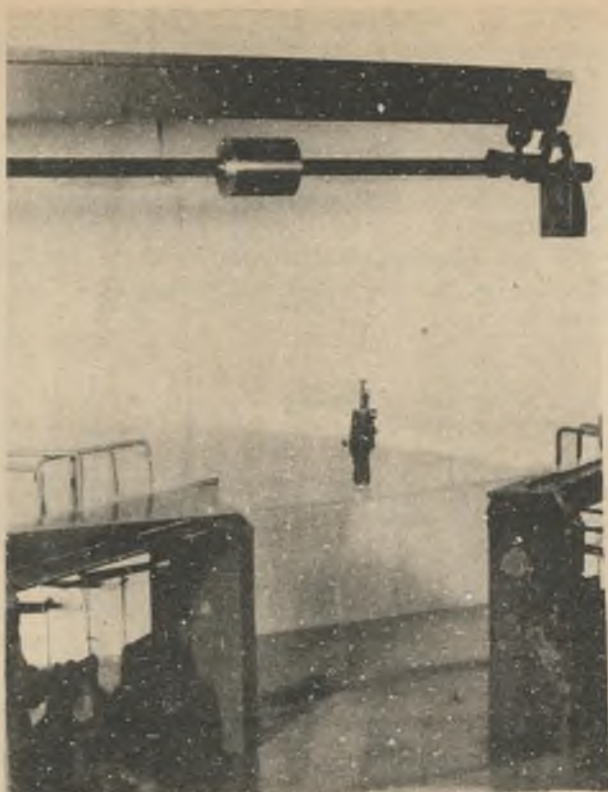
Po wykonaniu podobnych obliczeń dla modeli z celuloиду i pleksi glasu (posiadają jednakową wartość ν) otrzymano

$$\frac{m_{cel}}{xy} = \frac{m_{gips}}{xy} \cdot 0,0314.$$

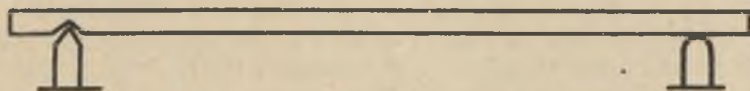
Na rysunku 17 pokazano fotografię płyty w czasie wykonywania pomiarów.

Deformator można zamocować od strony górnej lub dolnej płyty. Ze względu na wygodę przy wymianie wałków podczas wymuszania przemieszczeń, lepiej jest zamocować deformator od strony górnej modelu, tak jak widać na rysunku 17. Ważne jest dokładne ustawienie deformatora tak, aby wektor wymuszanego kąta skręcenia pokrywał się z wektorem szukanego momentu skręcającego. Poprawne ustawienie deformatora można sprawdzić przez porównanie wartości rzędnych punktów modelu rozmieszczonych symetrycznie względem deformatora. Takie sprawdzenie jest jednak możliwe tylko w przypadku wyznaczenia powierzchni wpływowej dla punktu leżącego na przecięciu się osi symetrii lub antymetrii badanego modelu. Sposób podparcia płyty przedstawia rysunek 18, gdzie po lewej stronie pokazano podparcie przegubowo-nieprzesuwne, a po prawej przegubowo-przesuwne.

Deformator zamocowywano do płyty z wałkami A, B i C (rys. 14) o średnicach 4,0 mm. Po zamocowaniu, wałek C usunięto, a wałek A zmieniono na inny o średnicy 4,1 mm w celu nadania wstępnej deformacji likwidującej ewentualne luzy w deformatorze lub na łożyskach. Odczyty wyjściowe notowano przy średnicy wałka 4,1 mm a końcowe przy średnicy 4,4 mm. Przesunięcia każdego badanego punktu modelu mierzyono co najmniej sześciokrotnie i z odczytów tych obliczano średnią.



Rys. 17



Rys. 18

MODEL nr 1 stanowiła ukośna płyta opisana na rys. 15, wykonana z blachy aluminiowej grubości 2 mm i długościach boków $b = 20$ cm i $l_{\varphi} = 50$ cm. Wyznaczono dla niej powierzchnię wpływową m_{xy} , której warstwicę przedstawia rys. 19. Poszczególne rzędne tej powierzchni obliczono na podstawie wzoru (13)

$$\eta_k = -\frac{w}{\psi f}$$

Przesunięcia w punktów pomierzono przy pomocy aparatury opisanej w p. 13. Najmniejsze przesunięcie zmierzone w pobliżu podpory miało wartość 0,048 mm, a największe 0,37 mm w przekroju dla którego wyznaczono powierzchnię wpływową. Przy różnicy średnic zmienianych wałków równej 0,3 mm wymuszany kąt skręcenia ψ był równy 0,00594 radiana. Wartość f otrzymano jako iloraz pola przekroju płaszczyzną pionową powierzchni wpływowej, wyznaczonej w pracy [16], z podobnym polem, wyznaczonym przy pomocy opisywanego badania przy założeniu $f = 1$. Dla blachy aluminiowej grub. 2 mm otrzymano wielkość $f = 18$ mm. Rzędne powierzchni wpływowej dla danego modelu obliczano następująco:

$$\eta_k = \frac{n \cdot 0,00024}{0,00594 \cdot 18} = n \cdot 0,00224,$$

gdzie n oznacza liczbę odstępów na śrubie okularu mikrometrycznego, a 0,00024 wielkość jednego odstepu w mm.

Porównanie powierzchni wpływowych otrzymanych przez RUSCHA i HERGENRÖDERA oraz przez autora pokazano na rysunkach 20 do 28, przedstawiających przekroje pionowe. Porównanie pól tych przekrojów otrzymanych na drodze badań dwiema różnymi metodami wykazuje różnice nie większe od 1,5%, natomiast maksymalny błąd pomiarów oszacowany przez w/w autorów w ich badaniach nie przekraczał 4%. Otrzymane więc rezultaty, praktycznie biorąc, są identyczne.

Celem dalszych badań modeli było wykazanie w jakim stopniu wpływają na wartość f wielkość modelu, kształt, grubość płyty lub powłoki i rodzaj materiału modelu. Dla wszystkich przypadków wyznaczano m_{xy} .

MODEL nr 2 była płyta aluminiowa grub. 2 mm o parametrach ogólnych podanych na rys. 15, lecz o długościach $b = 12$ cm i $l\varphi = 30$ cm, a więc mniejszych w porównaniu z długościami boków modelu nr 1. Sprawdzono przekrój powierzchni wpływowej między punktami 42-22 (numeracja punktów jest podana na rys. 19). Wartość f obliczono w sposób podany wyżej. Otrzymano $f = 18$ mm, czyli wielkość taką samą jak dla modelu nr 1. Przekrój przez powierzchnię wpływową przedstawia rys. 29.

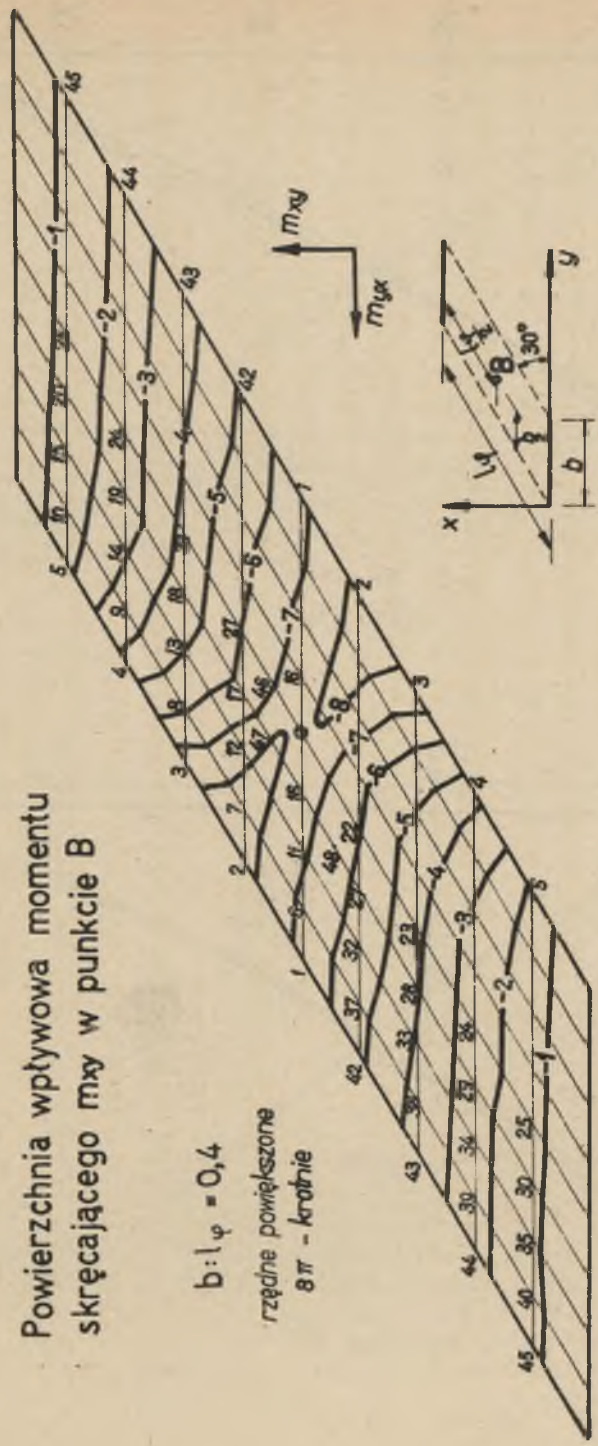
Z przeprowadzonego badania wynika wniosek, że wartość f nie zależy od wielkości modelu.

MODEL nr 3 stanowiła płyta identyczna jak w modelu nr 2, lecz o grubości 1 mm. Pomierzono rzędne przekroju przez powierzchnię wpływową między punktami 30-26 i inne rzędne w różnych punktach płyty. Dla tego przypadku wartość $f = 60,6$ mm. Wykres przekroju przedstawiono na rys. 30.

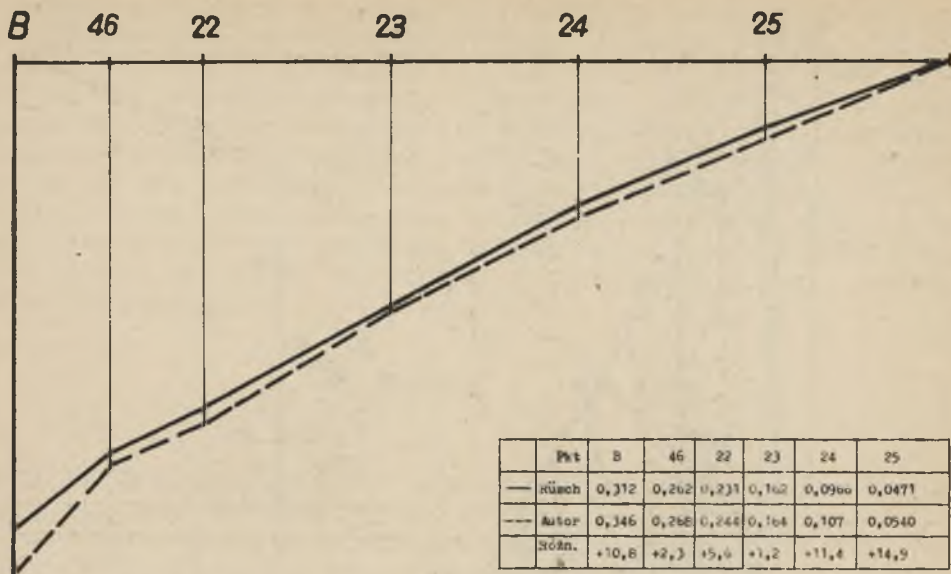
Powierzchnia wpływa momentu
skręcającego m_{xy} w punkcie B

$b : l_{\varphi} = 0,4$

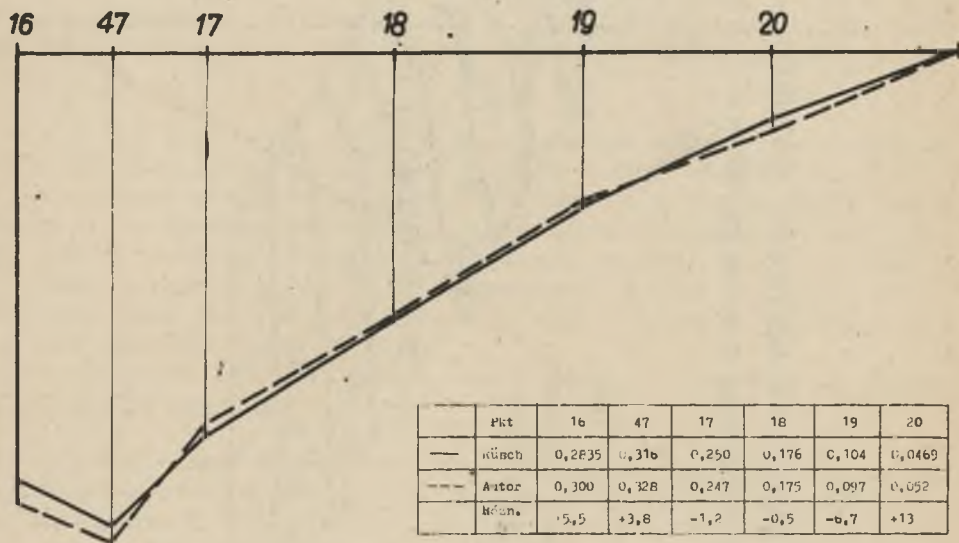
rzędne powiększone
 8π - krotnie



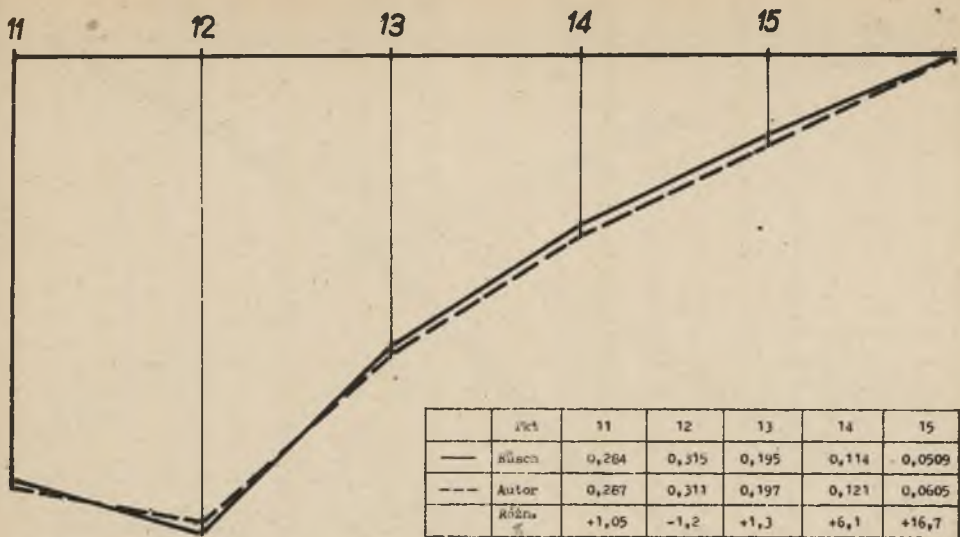
Rys. 19



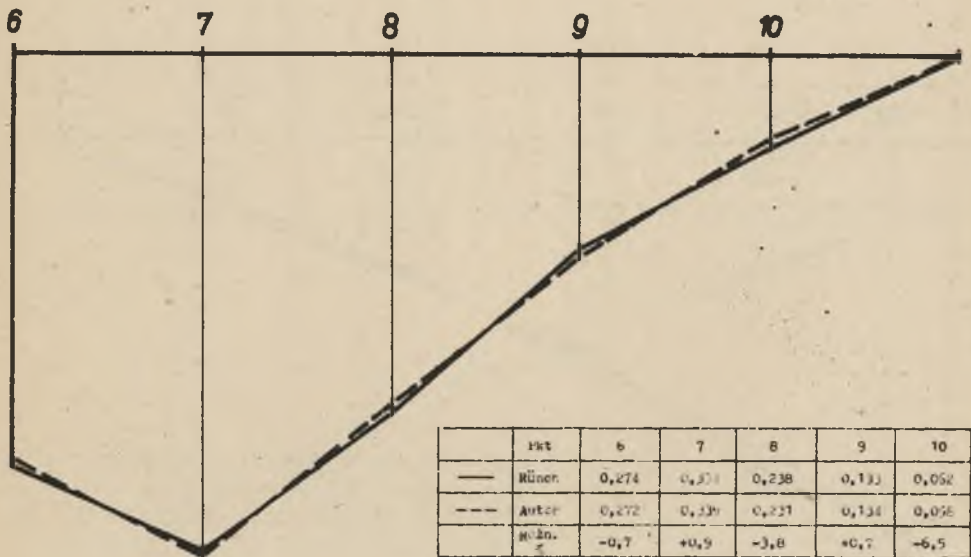
Rys. 20



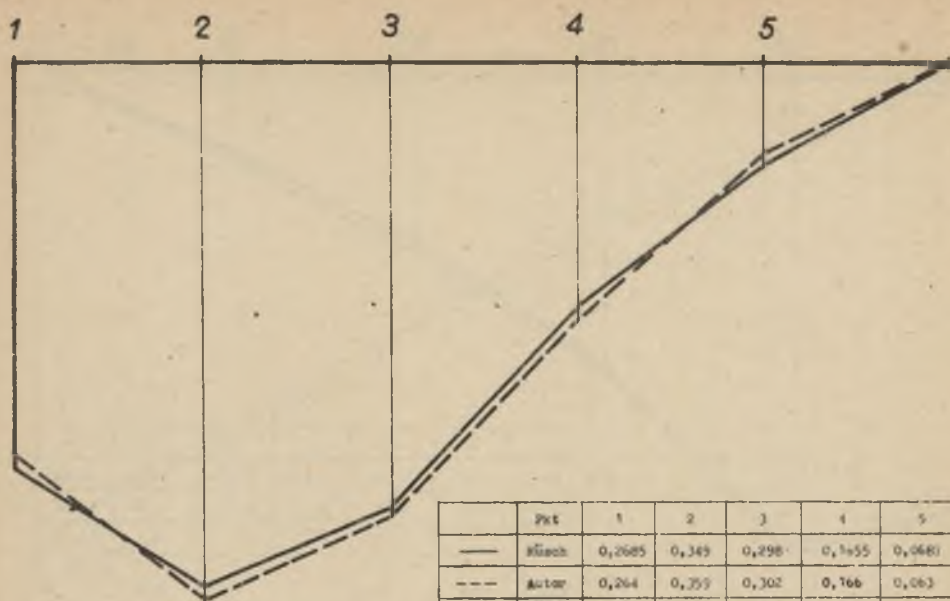
Rys. 21



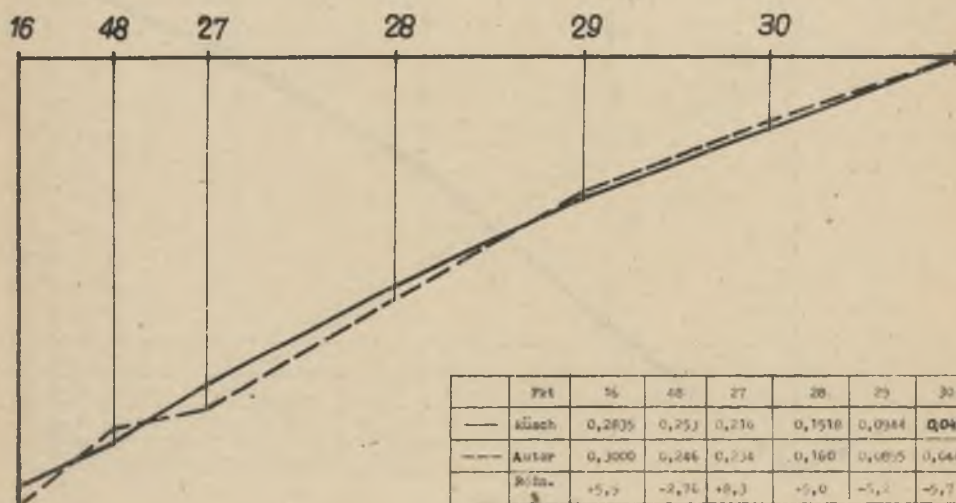
Rys. 22



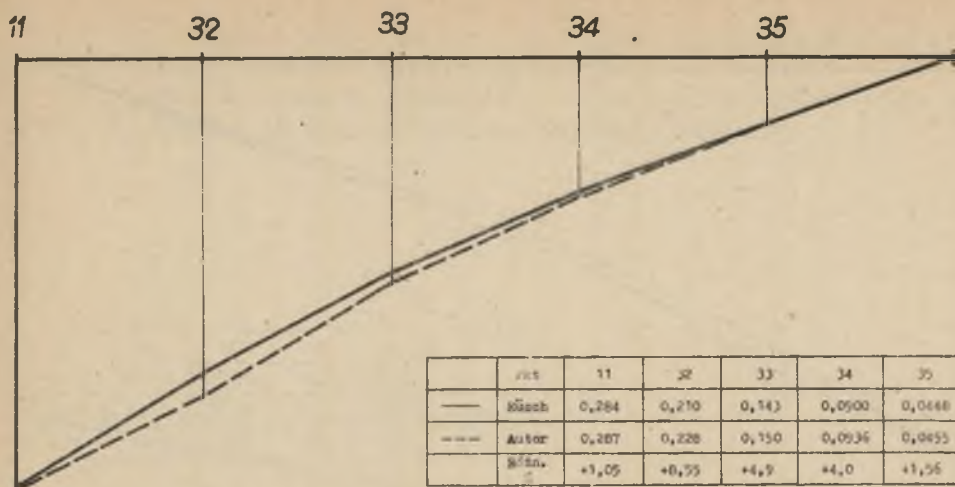
Rys. 23



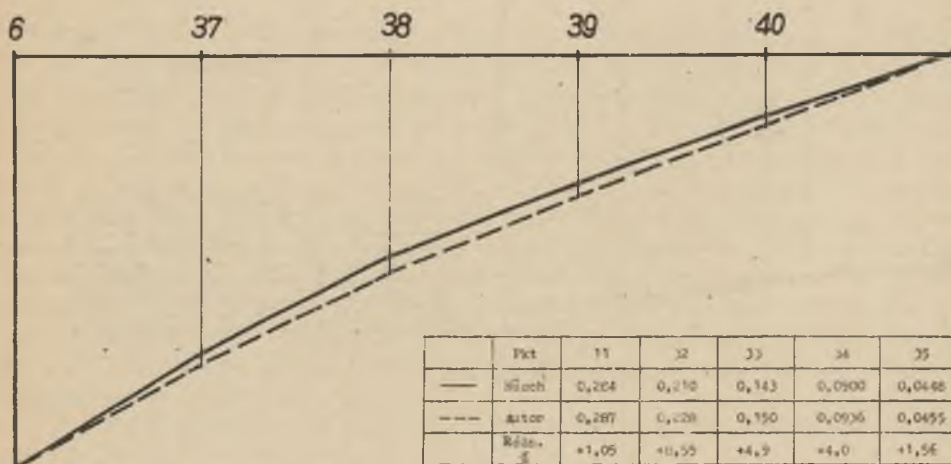
Rys. 24



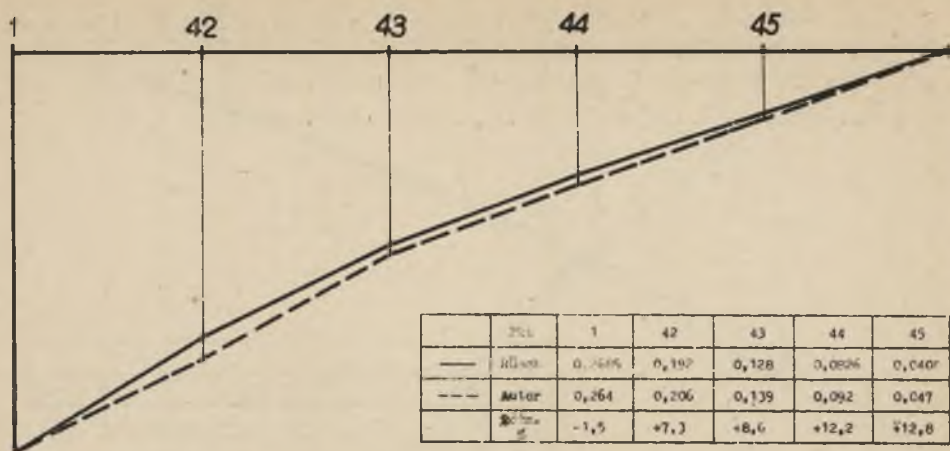
Rys. 25



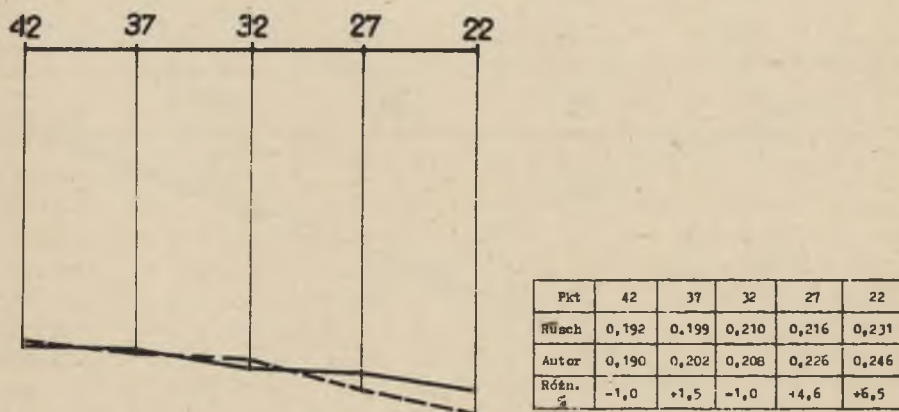
Rys. 26



Rys. 27



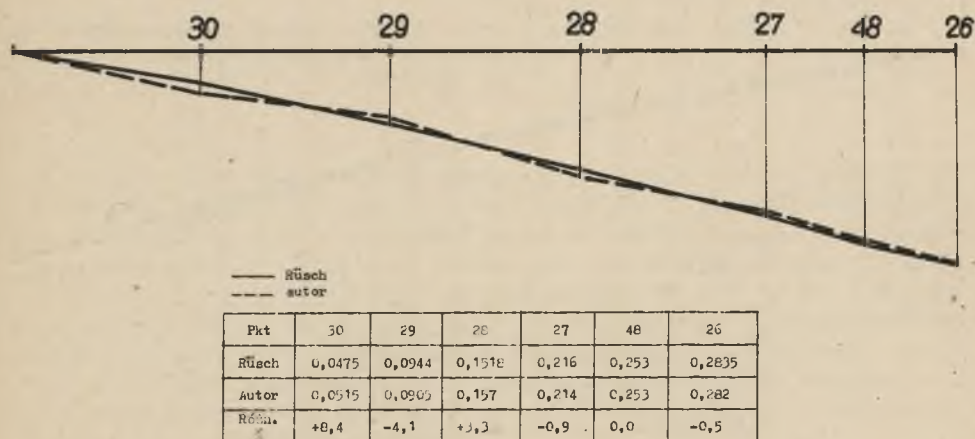
Rys. 28



Rys. 29

Na tym wykresie widoczna jest szczególna zgodność wyników otrzymanych różnymi metodami badań modelowych.

Na podstawie badania ostatniego modelu wynika wniosek, że wartość f zależy od grubości modelu płyty lub powłoki.

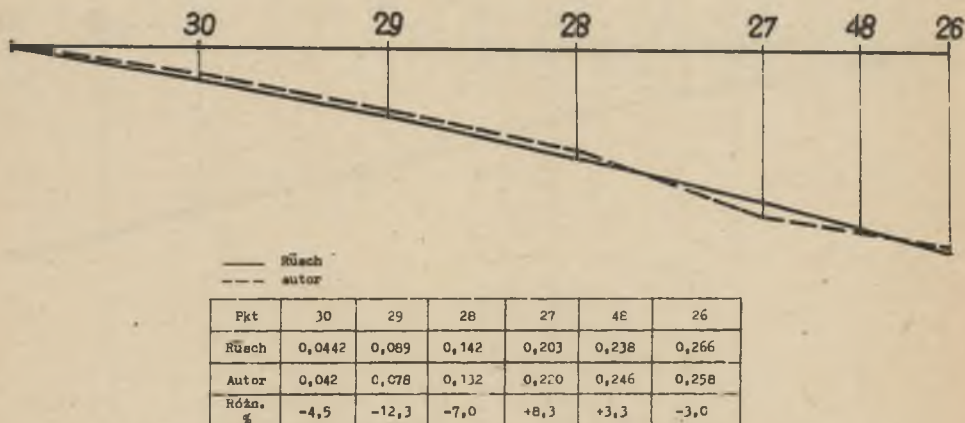


Rys. 30

MODEL nr 4 - płyta o kształcie i wymiarach jak w modelu nr 2, lecz wykonana z celulojdu grub. 2 mm. Próby badania tej płyty nie dały pozytywnych wyników z powodu szkodliwego wpływu zmiany temperatury, wywołanego przez zbliżenie do deformatora ręki badającego. Jednostronne ogrzanie płyty powodowało zdeformowanie modelu i przesunięcie punktów o rzędzie wielkości podobnym do przesunięć pochodzących od wymuszonego kąta skręcenia. Zwiększono więc grubość płyty do 3 mm. Przy tej grubości i przy szybkim wymuszaniu kąta otrzymano już rezultat pozytywny. Wykonano pomiary punktów przekroju powierzchni wpływowej od 30-26, a ponadto zmierzono rzędne w punktach 22, 29 i 32. Dla tej płyty wyliczono wartość $f=44\text{mm}$. Wykres przekroju powierzchni wpływowej wraz z wartościami rzędnych przedstawia rys. 31.

Z przytoczonego badania nie wynika wprost, że wartość f zależy od rodzaju materiału, gdyż należałoby zbadać płytę celulojdomową grub. 2 mm, albo dodatkowo płytę aluminiową grub. 3 mm, której nie

badano z powodów uzasadnionych niżej. Przez porównanie jednak wartości f dla płyt aluminiowych grubości 2 mm i 1 mm wynika pośrednio wniosek, że f zależy od rodzaju materiału lub inaczej - f zależy od cech sprężystych materiału modelu.

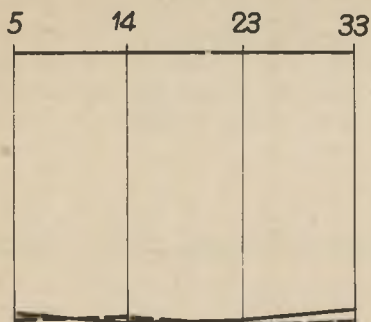


Rys. 31

Przy płycie aluminiowej grubości 2 mm $f = 18$ mm, natomiast przy grubości 1 mm wzrasta do $f = 60,6$ mm. Można zatem wnioskować, że przy płycie aluminiowej grub. 3 mm f byłoby mniejsze od 18 mm. Wniosek wyrażony wyżej jest więc uzasadniony.

M O D E L nr 5 - płyta aluminiowa grub. 2 mm o kształcie jak na rys. 16 i długościach boków $b = 16$ cm i $l\varphi = 40$ cm. Pomiarów wykonano dla przekroju powierzchni wpływowej przeprowadzonego przez punkt B i równoległego do krótszego boku płyty. Obliczona wartość $f = 18$ mm, a więc jest taka sama jak dla modelu nr 1, gdzie płyta aluminiowa o innym kształcie posiadała grubość również 2 mm. Wykres rzędnych otrzymanych na modelu przedstawia rys. 32.

Ostatnie badanie uzasadnia wniosek, że f nie zależy od warunków brzegowych.



	Pkt	5	14	23	33	45
—	Rüsch	0,1720	0,177	0,1765	0,170	0,118
---	Autar	0,178	0,172	0,178	0,181	0,120
	Różn. %	+3,5	-2,8	+0,9	+6,5	+1,7

Rys. 32

Celem przeprowadzonych i przedstawionych wyżej badań modeli było wykazanie słuszności koncepcji i dokładności podanej metody przy wyznaczaniu powierzchni wpływowej momentu skręcającego. Wykazano to przede wszystkim na modelu pierwszym, zaś badania dalszych modeli dodatkowo to potwierdziły. Badania modeli nr 2 - nr 5 służyły przede wszystkim do określenia wartości liczbowej f , występującej w mianowniku wzoru na rzędną powierzchni wpływowej i dowodu, że f zależy od grubości modelu i cech sprężystych materiału modelu, a nie zależy od wielkości modelu i warunków brzegowych. Otrzymane wielkości liczbowe są następujące:

aluminium grub. 1 mm - $f = 60,6$ mm

aluminium grub. 2 mm - $f = 18$ mm

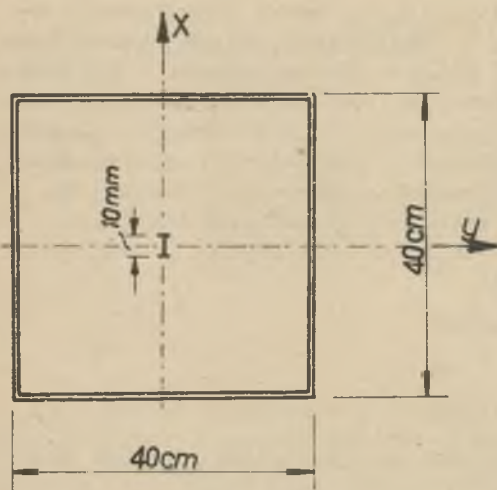
celuloid grub. 3 mm - $f = 44$ mm

Przeprowadzono również badania płyt z pleksiglasu, jednak znaczne opóźnienia sprężyste tego materiału obarczały rezultaty pomiarów poważnymi błędami. Nie badano płyt aluminiowych o grubości większej niż 2 mm, ani też celuloidowych o grubości większej niż 3 mm. Obawiano się bowiem stosunkowo zbyt dużych sił jakie model mógłby wywierać na deformatore. Stosowanie jednak płyt grubszych jest zbędne, a nawet niewskazane ze względów oszczędnościowych. Op tymalnym materiałem jest aluminium grub. 2 mm, przy maksymalnej długości największej przekątnej modelu 50-60 cm. Cieńsze płyty aluminiowe wykazują podczas pomiarów pewne drgania, podobnie jak płyty z celuloidu. Celuloid w porównaniu z aluminium posiada gorsze własności sprężyste. Szczelina w modelu, w miejscu zamocowania deformatora, musi być nieco większa od szerokości ramion deformatora, przytwierdzonych do modelu. Szerokość tych ramion wynosi 5 mm. We wszystkich modelach przyjęto jednakową długość szczeliny 10 mm,

tno. z każdej strony deformatora model był przecięty jeszcze na długości 2,5 mm. Przy wykonywanych próbach z mniejszą szczeliną trzeba było stosować względnie dużą siłę w celu rozwierania ramion deformatora, co mogło powodować jego niepożądane odkształcenie. Długość więc szczeliny 10 mm jest optymalna przy danej sztywności deformatora. Tylko przy tej długości szczeliny ważne są wielkości f podane wyżej. Przy innych długościach szczeliny trzeba f wyznaczyć specjalnie.

16. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej siły poprzecznej

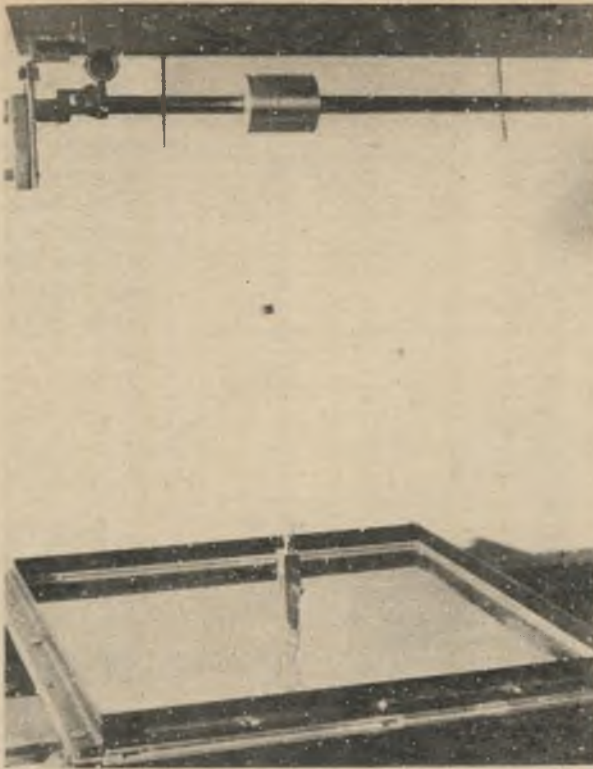
Powierznię wpływową siły poprzecznej q_{yz} wyznaczono dla płyty kwadratowej utwierdzonej na wszystkich krawędziach. Przekrój badany znajdował się na przecięciu osi symetrii (rys. 33).



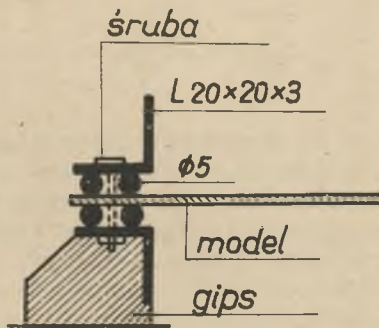
Rys. 33

Płytę oznaczono jako M O D E L 6 i wykonano z celuloиду grub. 2 mm. Długość szczeliny wynosiła 10 mm, podobnie jak przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych momentów skręcających. Model płyty podczas badania pokazano na rys. 34. Utwierdzenie na krawędziach wykonano tak, aby możliwy był przesuw w kierunku stycznym do płaszczyzny środkowej płyty, a kąt obrotu równy był zeru. Rys. 35 przedstawia konstrukcję łożyska utwierdzającego. Przy takim utwierdzeniu płyty jeden wierzchołek był nieprzesuwny, jedna krawędź posiadała swobodę przesuwu tylko stycznie do jej kierunku, a druga krawędź, prostopadła

do pierwszej, posiadała swobodę przesuwu tylko prostopadle do jej kierunku. Deformator zamocowano do płyty z wałkami A, B i C (rys. 14) o średnicach 4,0 mm. Po zamocowaniu deformatora wałki A i C pozostawiono a wałek B zmieniono na inny o średnicy 4,1 mm w celu nadania wstępnej deformacji. Przy średnicy wałka 4,1 mm notowano odczyty wyjściowe, a końcowe przy średnicy 4,2 mm, czyli wymuszano przesunięcie $t = 0,1$ mm. Wszystkie przesunięcia pionowe płyty powstałe na skutek wymuszenia t , mierzono co najmniej sześciokrotnie, posługując się aparaturą złożoną z lunety autokolimacyjnej i wałka o średnicy 49,5 mm sprzężonego z lusterkiem.



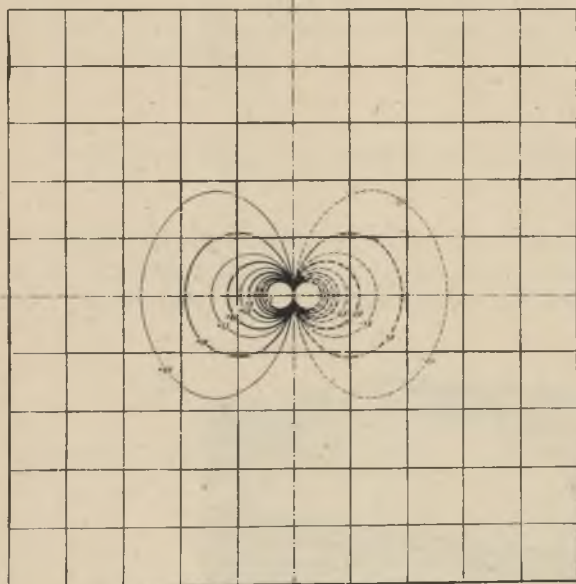
Rys. 34



Rys. 35

Dla identycznej płyty powierzchnię wpływową q_{yz} wyznaczył teoretycznie PUCHER [15]. Fotografię warstwic tej powierzchni przed

stawiono na rysunku 36. Z wynikami PUCHERA porównano wyniki otrzymane przez autora na modelu. Na rysunku 37 przedstawiono warstwicę obu powierzchni w jednej ćwiartce płyty. Równanie siły poprzecznej jest



Rys. 36

$$q_{yz} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

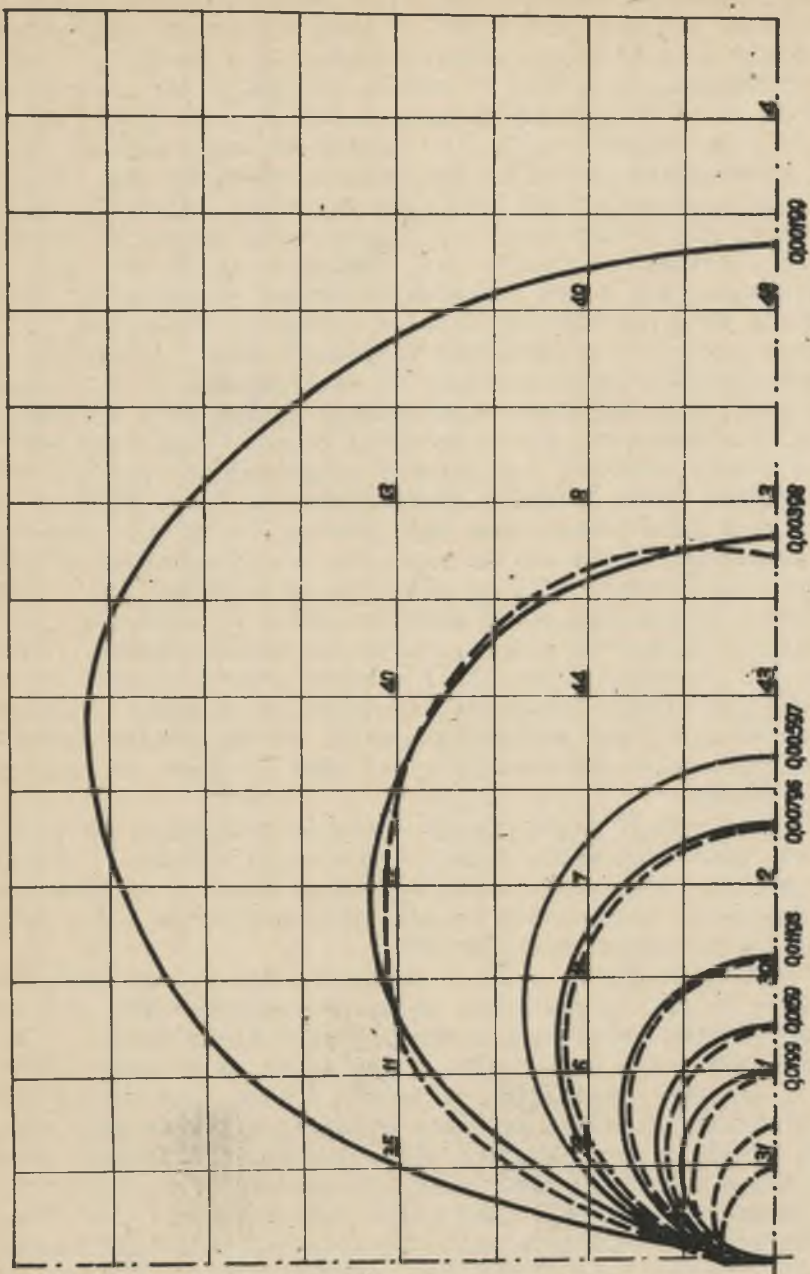
Wartość q_{yz} nie zależy więc od współczynnika Poissona ν . Wartości rzędnych powierzchni wpływowej powinny być zatem w obu rozwiązaniach równe.

Zgodnie ze wzorem 11 rzędna powierzchni wpływowej intensywności siły poprzecznej jest równa

$$\eta_{q_{yz}} = -\frac{w}{td}$$

Przesunięcie $t = 0,1$ mm wymuszono deformatorem, przesunięcia w mierzono na modelu, wielkość d natomiast obliczono podobnie jak w p.15, porównując pola dowolnych przekrojów powierzchni wpływowej teoretycznej i modelowej (z wyjątkiem takiego przekroju, który w rozwiązaniu teoretycznym przecina obszar, gdzie występuje osobliwość tej powierzchni). Osobliwość, gdzie rzędne powierzchni wpływowej równe są nieskończoności, w badaniu modelowym wystąpić nie może. Długość przekroju służącego do obliczenia d może być w zasadzie dowolna, jednak wartość d będzie dokładniejsza gdy przekrój będzie stosunkowo długi i gdy będzie on narysowany w dużej skali.

Wielkość d jest w tym przypadku równa 5,8 mm. Na rysunkach 38, 39 i 40 pokazano trzy przekroje powierzchni wpływowej, gdzie widoczny jest przebieg linii teoretycznych i modelowych. Z porówna-



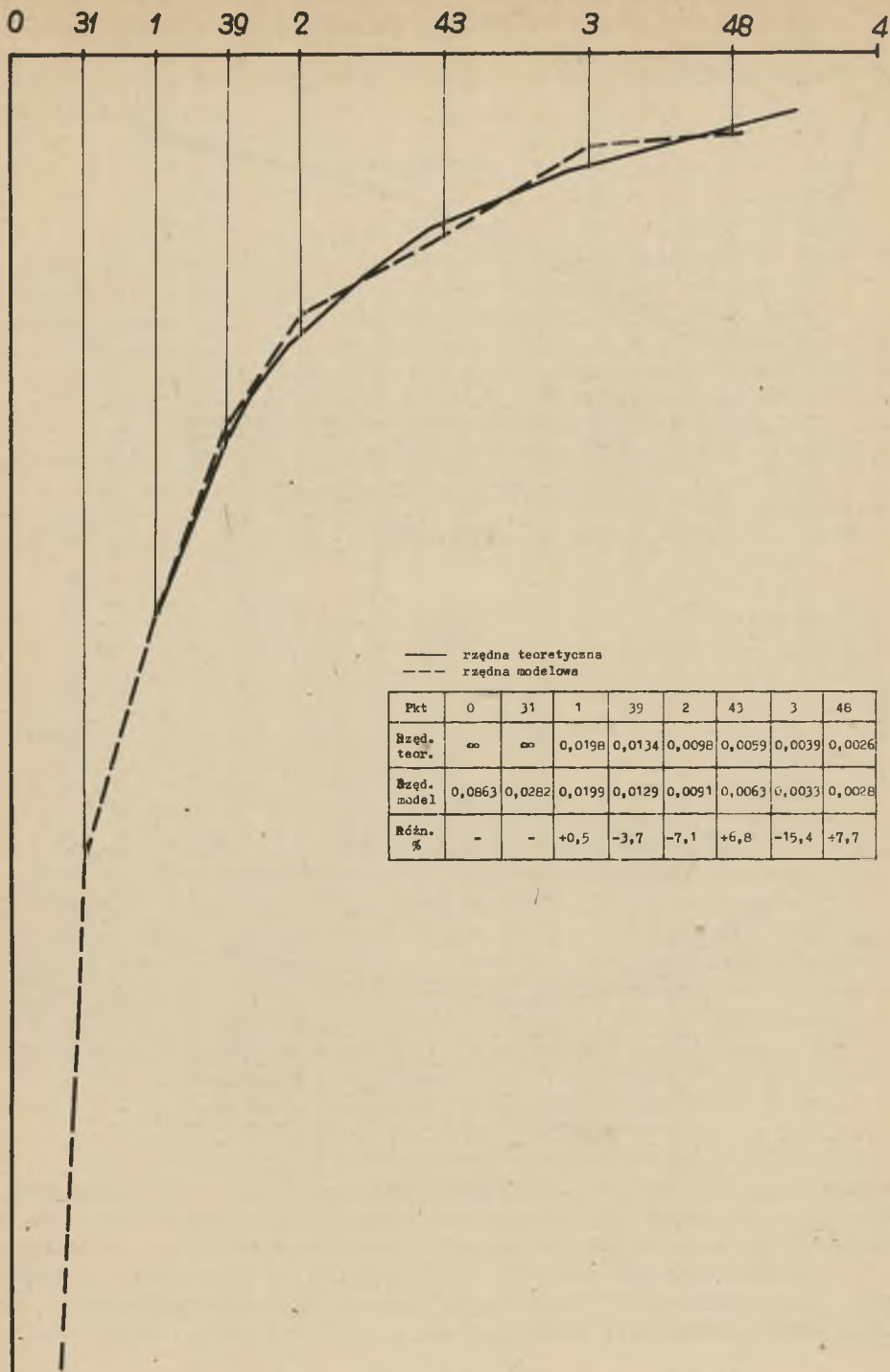
Rys. 37

nia ich wynika, że otrzymane wyniki na modelu są wystarczająco poprawne, a większe rozbieżności występują w miejscu, gdzie rozwiązanie teoretyczne posiada osobliwość. W tych miejscach otrzymuje się teoretycznie dwie kieszki o różnych znakach i o rzędnych równych nieskończoności, na modelu natomiast otrzymuje się wartości skończone. Dla celów praktycznych więc, rezultaty otrzymane drogą badań na modelu są lepsze i dające w efekcie końcowym wartość siły poprzecznej niewątpliwie bardziej zbliżoną do rzeczywistej. Objętość kieszki można wprawdzie obliczyć; ma to jednak znaczenie tylko w tym przypadku, gdy obszar osobliwy, ograniczony warstwicą dającą się jeszcze przedstawić w planie, jest obciążony ciężarem jednostajnie rozłożonym. Gdy w tym obszarze natomiast stanie siła skupiona, wartości siły poprzecznej w ogóle wyznaczyć nie można.

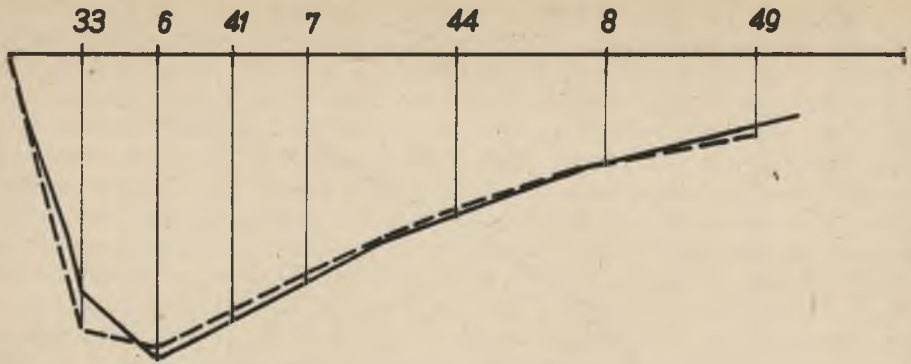
Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej siły poprzecznej można znacznie uprościć wykorzystując tę okoliczność, że w otoczeniu obszaru osobliwego warstwicę powierzchni tworzą koła o wspólnej stycznej, przechodzącej przez przekrój badany. Wystarczy wtedy wyznaczyć na modelu przekrój powierzchni wpływowej prostopadły do przekroju badanego (taki przekrój przedstawia rys. 38). Długość tego przekroju jest ograniczona taką małą rzędną, która ma jeszcze praktyczne znaczenie. Około połowa rzędnych takiego przekroju, od strony obszaru osobliwego, leży na warstwicach kołowych. W ten sposób większą i ważniejszą część warstwic można wyznaczyć z jednego przekroju zbadanego na modelu, korygując równocześnie pewne spłaszczenia kół warstwic (rys. 37), wynikłe z konieczności wykonania w modelu szczeliny. Pozostałe warstwicę powierzchni wpływowej należy wyznaczyć przez pomiar na modelu. Należy również sprawdzić, czy przyjęte w sposób opisany wyżej koło skrajnej warstwicę jest jeszcze kołem.

Jak zaznaczono wyżej, płyta modelu wykonana została z celuloиду grub. 2 mm. Szkodliwy wpływ zmiany temperatury podczas badań był w tym przypadku niewielki ze względu na sztywne zamocowanie wszystkich krawędzi. Zastosowano ponadto przy pomiarach stały wpływ powietrza przy pomocy wentylatorów.

Wartość d dla celuloidu grub. 2 mm jest równa 5,8 mm przy dku gości szczeliny 10 mm. Na podstawie badań przeprowadzonych przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych momentu skręcającego można przez analogię stwierdzić, że d również zależy tylko od grubości płyty lub powłoki i od cech sprężystych materiału modelu, nie zależy natomiast od wielkości modelu i warunków brzegowych. Porównanie wyników badań na modelu z rozwiązaniami teoretycznymi dla innych płyt lub powłok było niemożliwe, gdyż autor nie znalazł w literaturze drugiej powierzchni wpływowej, poza jedną powierzchnią PUCHERA, przedstawioną wyżej. Porównanie zaś z rezultatami badań modelowych innego rodzaju również było niemożliwe, gdyż nie ma dotąd innej metody badań modelowych przy pomocy której można by wyznaczyć powierzchnię wpływową siły poprzecznej.

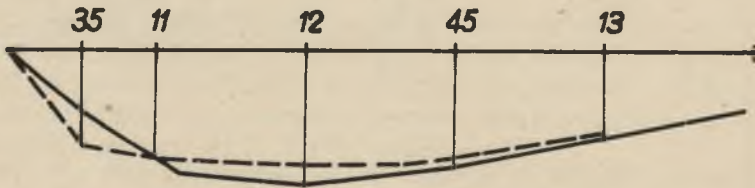


Rys. 38



	Pkt	33	6	41	7	44	8	49
—	Rzędn. iśc.	0,0080	0,0100	0,0089	0,0075	0,0053	0,0038	0,0024
- - -	Rzędn. model.	0,0092	0,0097	0,0085	0,0070	0,0052	0,0037	0,0025
	Różn.	+15,0	-3,0	-4,5	-7,1	-1,9	-2,6	+4,2

Rys. 39



	Pkt	35	11	12	45	13
—	Rzędn. iśc.	0,0021	0,0036	0,0045	0,0038	0,0028
- - -	Rzędn. model.	0,0033	0,0037	0,0038	0,0034	0,0025
	Różn.	+57,0	+3,6	-15,5	-10,5	-10,7

Rys. 40

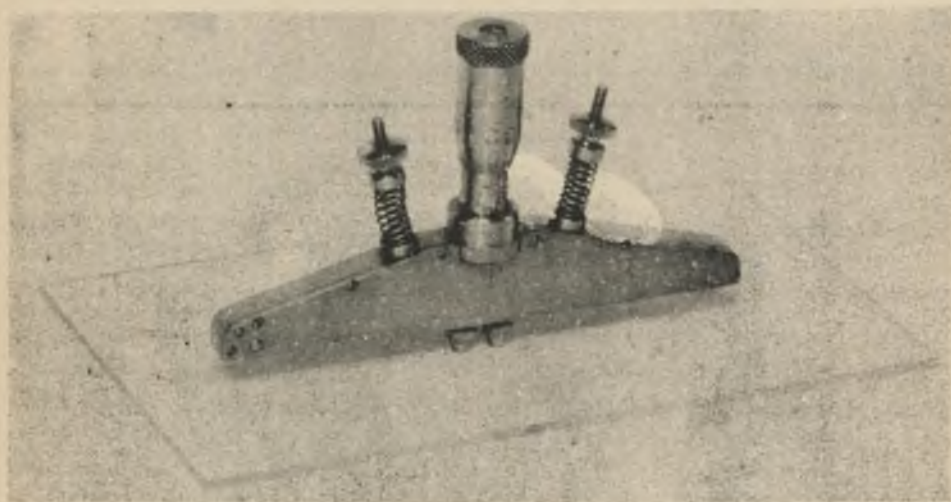
17. Deformator powierzchniowy katowy

Powierzchnię wpływową momentu zginającego, zgodnie ze wzorem (6) wyznaczają rzędne

$$\eta_m z = \frac{w}{\nu e}$$

Kąt ν należy wymusić odpowiednim deformatorem. Deformator taki, za projektowany przez autora, pokazuje fotografia na rys. 41.

Zasada wymuszania kąta obrotu jest następująca (rys. 42): Na skutek przesuwania śrubą mikrometryczną trzpienia (1) ramiona (2) obracają się dookoła przegubów (3) zamocowanych w obudowie (4). Ramiona (2) dociskane są do trzpienia śruby mikrometrycznej sprężynami (5). Do końców ruchomych ramion przykręca się śrubami model płyty lub powłoki. Długość teoretyczna jednego ramienia jest równa 40 mm. Przy znanym przesunięciu śruby mikrometrycznej i znanej długości ramion wiadoma jest wartość wymuszonego kąta ν , która praktycznie zawarta jest w granicach 0,005 do 0,015 radiana.



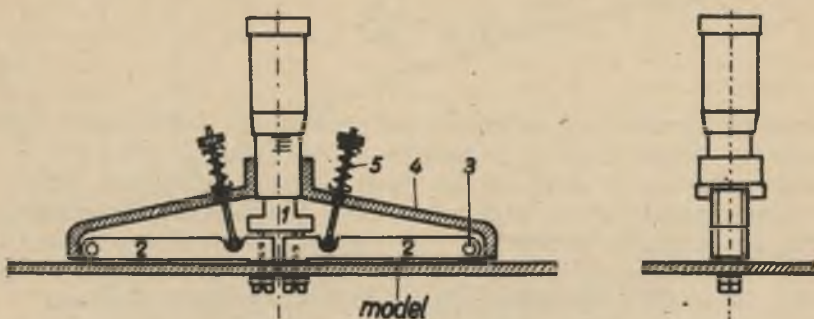
Rys. 41

Podobnie jak w przykładach poprzednich, przesunięcia pionowe "w" zdeformowanego modelu mierzone aparaturą złożoną z lunety auto kolimacyjnej i wałka o średnicy 49,5 mm sprzężonego z lusterkim.

Sposób wyznaczania wielkości "e" zostanie omówiony niżej.

Powierzchnie wpływowe momentu zginającego wyznaczono na modelach dla płyt, z których jedną teoretycznie rozwiązał PUCHER [15],

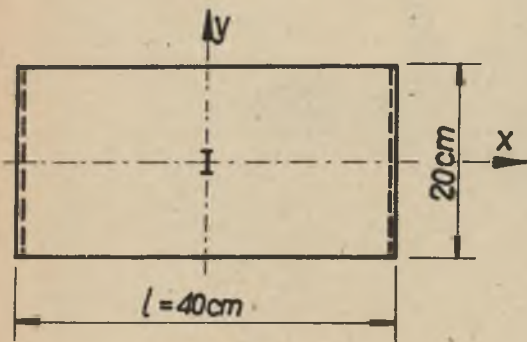
a drugą otrzymali na modelu z gipsu RÜSCH i HERGENRÖDER [16] przy pomocy innej metody badań.



Rys. 42

18. Wyznaczanie na modelu powierzchni wpływowej momentu zginającego

Powierzchnię wpływową momentu zginającego m_x wyznaczono na MODELU nr 7 (rys. 43) płyty w przekroju położonym na przecięciu się osi x i y . Model wykonano z blachy aluminiowej grubości 2 mm. Długość szczeliny w przekroju badanym przyjęto, podobnie jak we wszystkich poprzednich przykładach, równą 10 mm. Płyta była oparta swobodnie na krawędziach krótszych. Dłuższe krawędzie były swobodne. Łożyska płyty wykonano podobnie jak dla MODELU nr 1 (rys. 18).



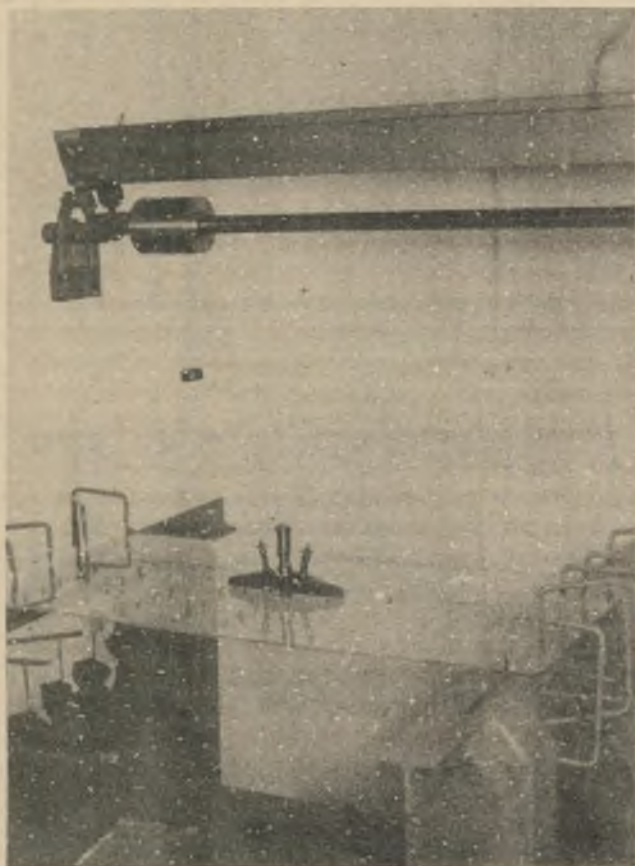
Rys. 43

otrzymane na modelu rządne powierzchni wpływowej porównano z rządnyimi wyznaczonymi teoretycznie przez PUCHERA [15].

Równanie momentu zginającego ma następującą postać

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right).$$

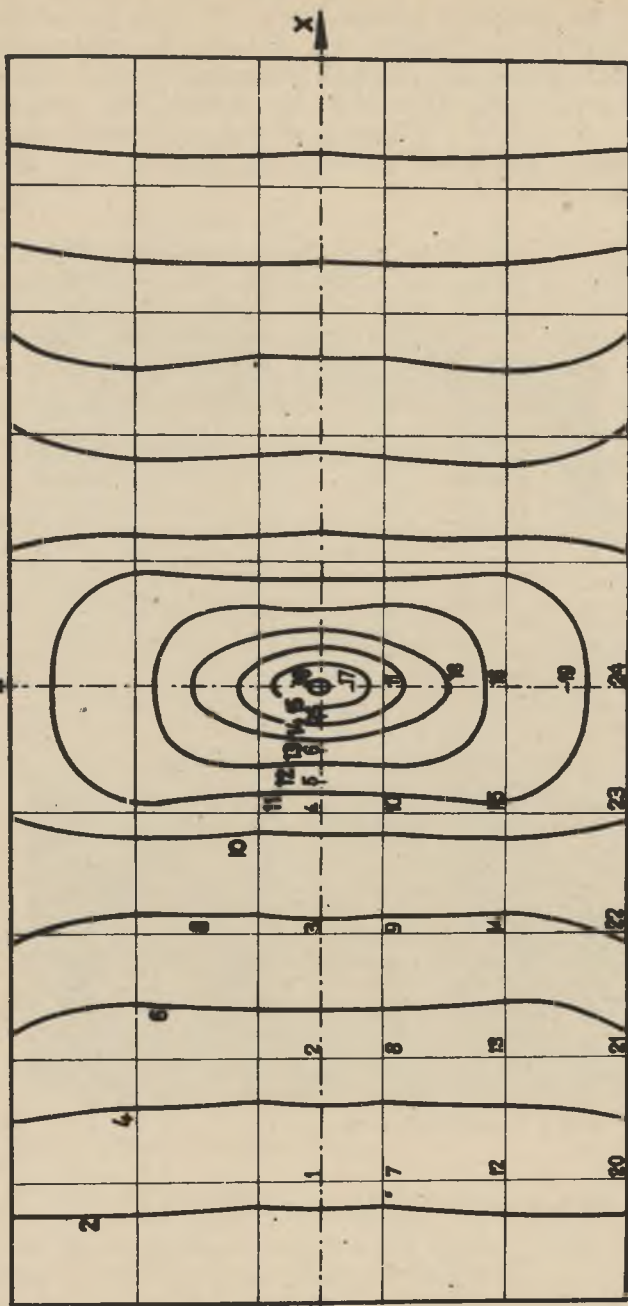
Powierzchnia wpływowa w rozwiązaniu PUCHERA została wyznaczona w założeniu, że $\nu = 0$. Aby więc porównać rzędne powierzchni wpływowej otrzymanej na modelu z aluminium o $\nu = 0,34$ należało rzędne teoretyczne odpowiednio przeliczyć. W tym celu skorzystano z drugiej powierzchni wpływowej PUCHERA wyznaczonej dla tej samej płyty i tego samego przekroju, lecz dla m_y . Rzędne tej powierzchni pomnożone przez $\nu = 0,34$ i dodane do rzędnych powierzchni m_x utworzyły powierzchnię wpływową teoretyczną momentu m_x ważną dla płyty aluminiowej.



Rys. 44

Model omawianej płyty podczas badania przedstawia fotografia na rysunku 44. Przy pomocy deformatora wymuszono obrót o kąt $\vartheta = 0,01$ radiana. Ugięcia "w" mierzono za pomocą aparatury złożonej z lunety autokolimacyjnej i wałka o średnicy 49,5 mm, sprzężo-

Powierzchnia wpływu m_x dla punktu środkowego płyty



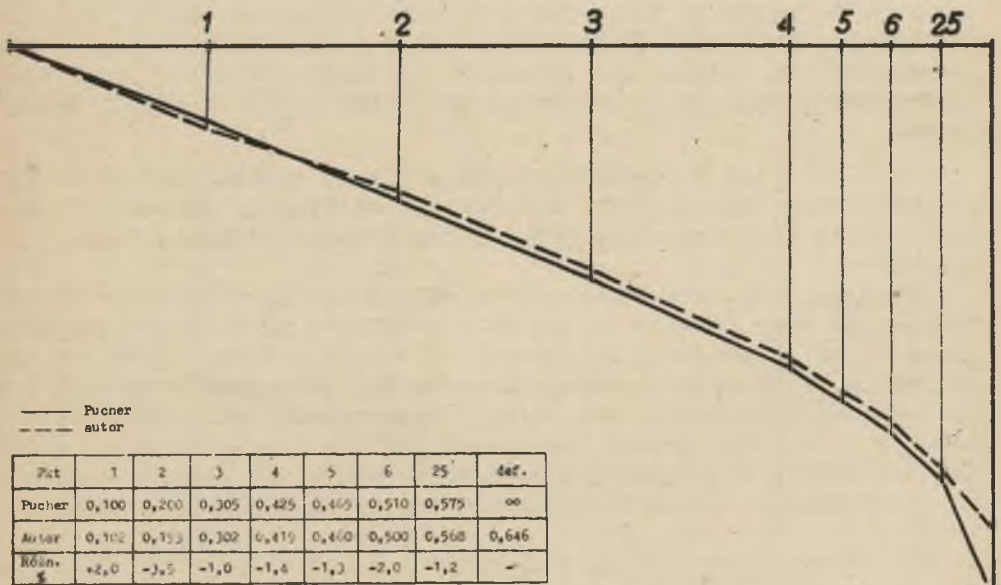
powiększenie rzędnych 8π -krotne
wartość rzędnej w środku 16,63

Rys. 45

nego z lusterkiem. Przy wartości jednego odstepu na bębnie okularu mikrometrycznego równej 0,00024 mm, rzędne powierzchni wpływowej obliczono następująco:

$$\eta_{m_x} = \frac{\pi}{\lambda e} = \frac{n \cdot 0,00024}{0,01 \cdot 14,4} = n \cdot 0,001\bar{6}$$

gdzie n oznacza liczbę odstepów na śrubie mikrometrycznej okularu. Wartość e = 14,4 mm wyznaczono w sposób opisany niżej. Każdą rzędną ugięcia płyty mierzono co najmniej sześciokrotnie i z wartości pomierzonych obliczono średnią. Powierzchnię wpływową, otrzymaną na modelu, przedstawiono w planie warstwicowym na rys. 45. Na rysunkach 46, 47, 48, 49 i 50 porównano przekroje powierzchni wpływowych wyznaczone na modelu z przekrojami wyznaczonymi teoretycznie. Na trzech pierwszych przekrojach obie linie praktycznie pokrywają się ze sobą.



Rys. 46

W przypadkach wyznaczania momentu skręcającego i siły poprzecznej dla obliczenia długości rozłożenia kąta skręcenia i przesunięcia poprzecznego (wielkości f i d) należało porównać dowolne pole przekroju powierzchni wpływowej wyznaczone na modelu z odpowiednim polem otrzymanym z rozwiązań już znanych. W przypadku modelowego wyznaczania powierzchni wpływowej momentu zginającego wielkość "e" można obliczyć bez uciekania się do rozwiązań innych.

Wiadomo, że np. dla płyty pokazanej na rys. 43 pole przekroju powierzchni wpływowej momentu zginającego m_x , leżące w płaszczyźnie yz równe jest $1/4$. Dla wyznaczenia więc e należy początkowo wykonać pomiar tego przekroju na modelu płyty jak na rys. 43 z takiego materiału i o takiej grubości jaką będzie posiadać model przeznaczony do właściwego badania. Iloraz pola tego przekroju i $1/4$ jest równy e . Może być również płyta o innym kształcie, dla której jakieś pole przekroju powierzchni wpływowej jest znane.

W ten sposób dla omawianego przykładu (rys. 50) wyliczono $e = 14,4$ mm. Przy tej wartości e różnica procentowa między polem otrzymanym na modelu a $1/4$ jest równa $+0,9\%$ (rys. 50).

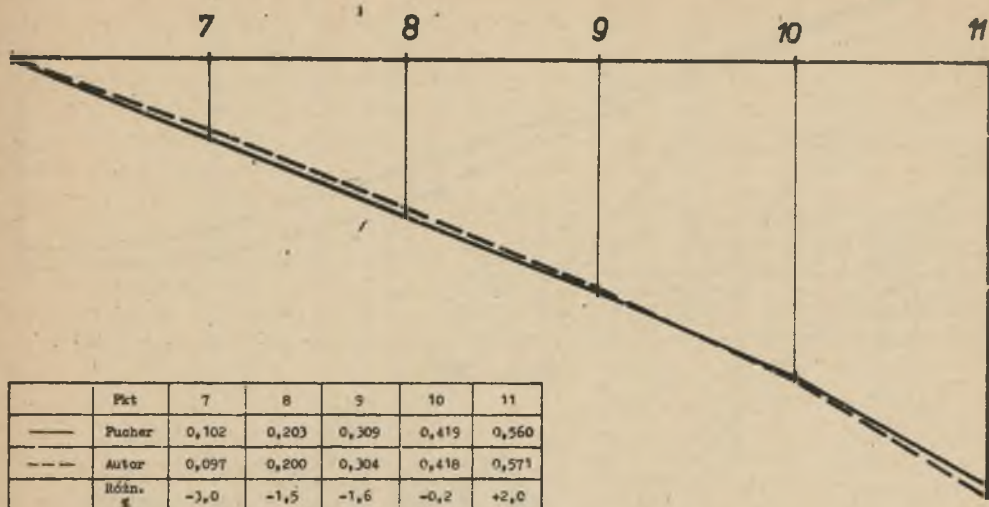
Kolejny MODEL nr 8 stanowiła płyta celuloidowa grub. 3 mm, o schemacie statycznym i wymiarach takich samych jak w modelu nr 7. W przypadku tym wpływ temperatury przy zbliżaniu ręki do deformatora uniemożliwił przeprowadzenie pomiarów. Włączenie wentylatora podczas badania nie poprawiło sytuacji, gdyż ruch powietrza spowodował ruchy płyty, podpartej swobodnie tylko na dwóch krawędziach.

MODEL nr 9 stanowiła płyta z blachy aluminiowej grub. 2 mm podparta swobodnie na dwóch krawędziach krótszych. Kształt i wymiary płyty oraz numerację punktów pomiarowych przedstawiono na rys. 51.

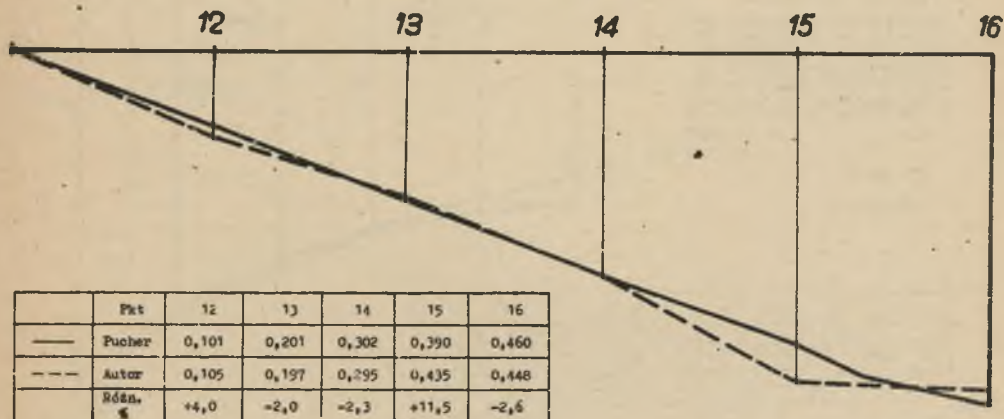
Dla płyty tej wyznaczono moment zginający m_x w punkcie B. Podobnie jak przy badaniu modelu nr 7 przecięto płytę szczeliną długości 10 mm i wymuszono kąt obrotu $\vartheta = 0,07$ radiana. Także w tym przypadku płyty pole przekroju powierzchni wpływowej w połowie rozpiętości powinno równać się $1/4$. Z tego warunku wyliczono wielkość $e = 14,4$ mm, a więc identyczną jak dla modelu nr 7. Wynik ten potwierdza udowodnione w p.15 twierdzenie, że długość rozłożenia wymuszonego przemieszczenia nie zależy od kształtu i wymiarów modelu.

Otrzymane rzędne powierzchni wpływowej porównano z rzędnymi dla tej samej płyty, lecz uzyskanymi przez RÜSCHA i HERGENRÖDERA [16] na modelu z gipsu przy pomocy innej metody badawczej. Na rysunku 52 i 53 przedstawiono wykresy porównawcze.

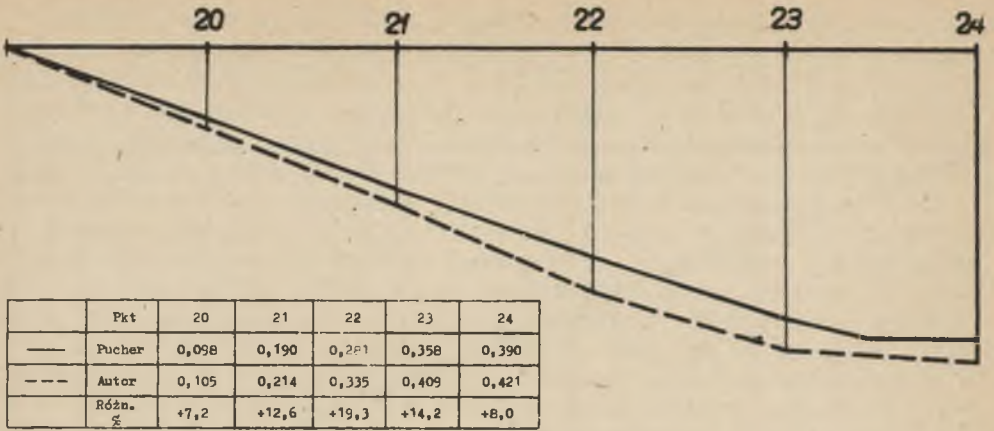
Na rys. 52 wykreślono połowę przekroju środkowego powierzchni wpływowej, który względem punktu B jest symetryczny. Przy wielkości $e = 14,4$ mm pole tego przekroju różni się od teoretycznego tylko o $-0,9\%$. Wynik jest więc bardzo dokładny. Większe różnice między rzędnymi (rys. 53) otrzymanymi przez RÜSCHA i autora wy-



Rys. 47



Rys. 48



Rys. 49

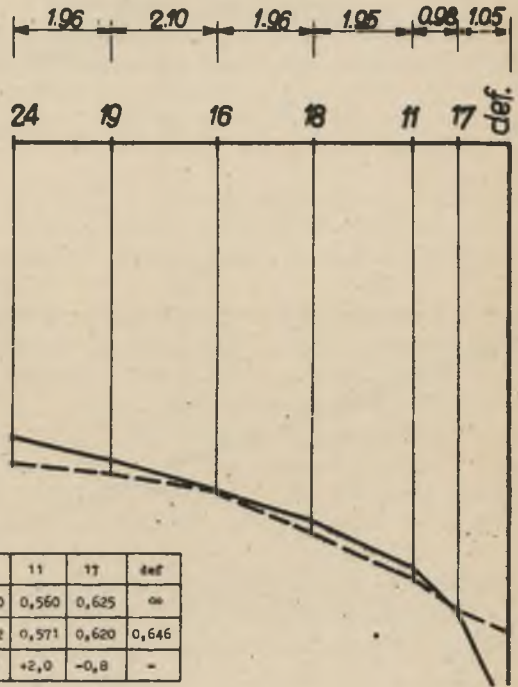
Obliczenie powierzchni

$2 \cdot (0,421 + 0,441) \cdot 0,5 \cdot 1,96 = 1,690$
 $2 \cdot (0,441 + 0,448) \cdot 0,5 \cdot 2,10 = 1,868$
 $2 \cdot (0,448 + 0,522) \cdot 0,5 \cdot 1,96 = 1,902$
 $2 \cdot (0,522 + 0,571) \cdot 0,5 \cdot 1,95 = 2,130$
 $2 \cdot (0,571 + 0,620) \cdot 0,5 \cdot 0,98 = 1,170$
 $2 \cdot (0,620 + 0,646) \cdot 0,5 \cdot 1,05 = 1,330$

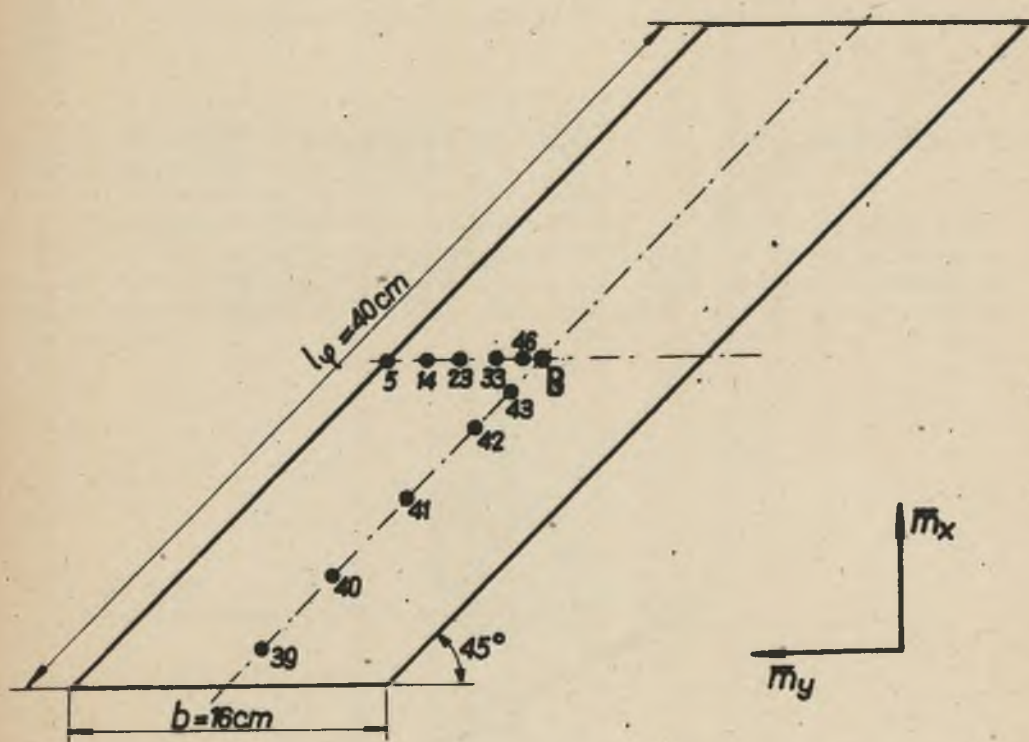
P = 10,090

$\frac{1}{4} = 10,000$

różnica 0,9%

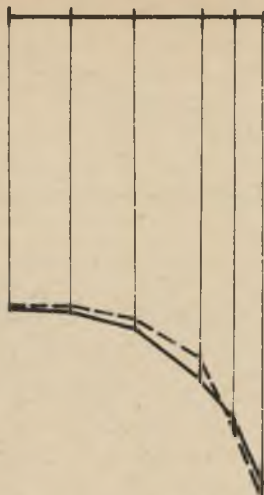


Rys. 50



Rys. 51

5 14 23 39 46 B

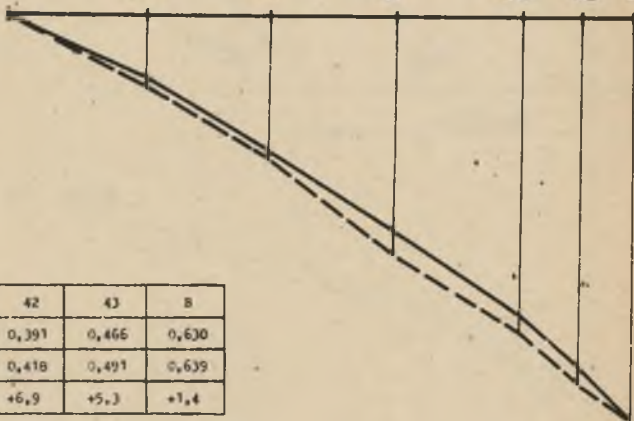


Pkt	5	14	23	33	46	B
Rüsch	0,384	0,389	0,410	0,478	0,528	0,630
Model al.	0,389	0,384	0,400	0,431	0,530	0,639
Różn. %	+1,3	-1,3	-2,4	-10,0	+0,4	+1,4

Pole przekroju teoretyczne 7,070
 " " wg badań Rüsch 7,084 (różn. +0,2%)
 " " " autora 7,006 (różn. -0,9%)

Rys. 52

39 40 41 42 43 B



— Rüsch
 - - - autor

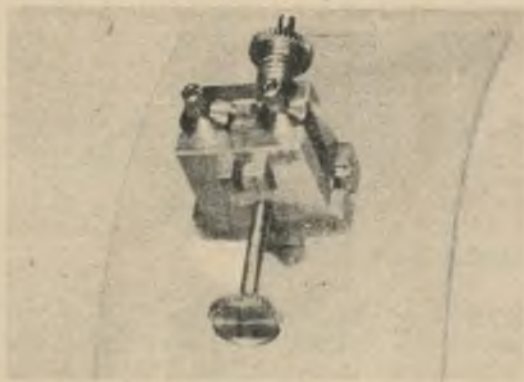
Pkt	39	40	41	42	43	B
Rüsch	0,082	0,178	0,281	0,391	0,466	0,630
Autor	0,092	0,187	0,319	0,418	0,491	0,639
Różn. %	+12,2	+6,2	+13,5	+6,9	+5,3	+1,4

Rys. 53

nikają z różności współczynnika Poissona, który dla gipsu równa się 0,215, a dla aluminium 0,340. Przeliczenie rzędnych otrzymanych na modelu z gipsu na rzędne ważne dla materiału o innej wartości współczynnika Poissona jest w przypadku wyznaczenia momentu zginającego niemożliwe. Różnice są jednak niewielkie, a niektóre rzędne powierzchni wpływowej dla modelu aluminiowego powinny być nieco większe od rzędnych dla modelu gipsowego. Kierunek odchylenia linii wyznaczonej przez autora (rys. 53) jest zatem prawidłowy.

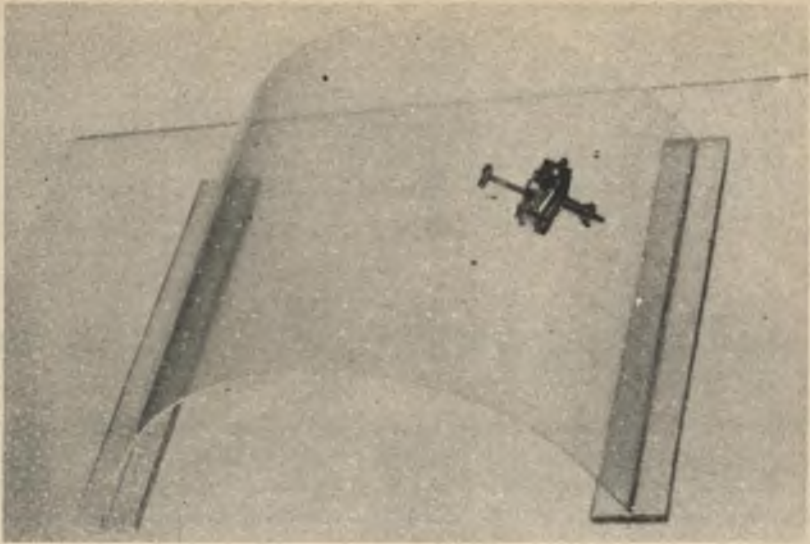
19. Deformator powierzchniowy podłużny i problem wyznaczenia sił podłużnych

Wyznaczenie powierzchni wpływowej siły podłużnej, zgodnie z zasadą ogólną, powinno się odbyć drogą wymuszenia w badanym przekroju przesunięcia podłużnego. W przekroju zatem przeciętym szczeliną sąsiednie płaszczyzny powinny się równolegle zbliżyć lub oddalić od siebie.



Rys. 54

Do wymuszenia przesunięcia podłużnego zbudowano specjalny de-
formator, przedstawiony na rys. 54. Próby wyznaczenia powierzchni
wpływowej siły podłużnej, wykonywane między innymi na powłoce po-
kazanej na rysunku 55, nie powiodły się, gdyż nie udało się wymu-
sić przesunięcia podłużnego. Na realizację tego rodzaju przesunię-
cia nie pozwala jednolite otoczenie szczeliny.



Rys. 55

V. INNE METODY I PORÓWNANIE Z NIMI
METODY PRZEMIESZCZEŃ WYMUSZONYCH

20. Metoda pomiaru kąta [6],[12]

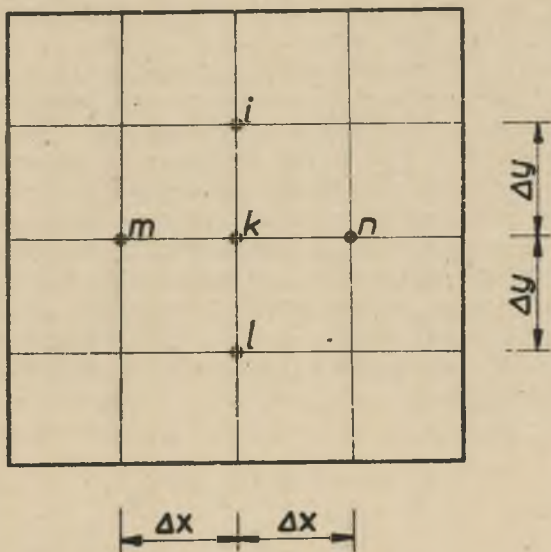
Przy stosowaniu tej metody można wyznaczyć powierzchnie wpływowe momentu zginającego i momentu skręcającego. Punktem wyjścia są następujące wzory na momenty zginające i skręcające:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Korzystając przy rozwiązywaniu płyty z rachunku różnic skończonych i zakładając $v = 0$, można dla punktu "k" płyty otrzymać następujące wyrażenie (rys. 56):



Rys. 56

$$\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \approx \frac{\varphi_{vl} - \varphi_{vi}}{2\Delta y} = \frac{\Delta \varphi_{yk}}{2\Delta y} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \approx -\frac{m_y}{EJ}$$

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{xm} - \varphi_{xn}}{2\Delta x} = \frac{\Delta \varphi_{xk}}{2\Delta x} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx -\frac{m_x}{EJ}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \approx \frac{\varphi_{xl} - \varphi_{xi}}{2\Delta y} \approx \frac{\varphi_{ym} - \varphi_{yn}}{2\Delta x} \approx -\frac{m_{xy}}{EJ}$$

A więc:

$$m_x = -EJ \frac{\varphi_{xm} - \varphi_{xn}}{2\Delta x}, \quad m_y = -EJ \frac{\varphi_{vl} - \varphi_{vi}}{2\Delta y},$$

$$m_{xy} = -EJ \frac{\varphi_{xl} - \varphi_{xi}}{2\Delta y}$$

Aby otrzymać na modelu dla punktu k momenty zginające lub skręcające należy w odpowiednich punktach odległych od niego o Δx i Δy (rys. 56) pomierzyć kąty φ i podzielić je przez $2\Delta x$ lub $2\Delta y$. Wynika stąd, że na modelu otrzymuje się średnią wartość momentów na odcinku długości $2\Delta x$ lub $2\Delta y$.

Przy stosowaniu tej metody model wykonuje się z reguły z gipsu. Na górnej powierzchni płyty przymocowuje się podstawki, na których opierają się lusterka. Podstawki rozmieszczone są w regularnej siatce na całym modelu, lub tylko w otoczeniu punktu, dla którego wyznacza się powierzchnie wpływowe momentów. Kąty mierzy się przy pomocy lunety autokolimacyjnej przy każdorazowym zmieniającym się położeniu siły skupionej. Aby z pomierzonych kątów przejść do wartości momentów należy wyznaczyć dla materiału modelu współczynnik sprężystości E . Wzory, podane wyżej, pozwalają na wyznaczenie na modelu momentów przy założeniu $\nu = 0$. Jeśli współczynnik Poissona dla materiału modelu zostanie wyznaczony, to wpływ jego można uwzględnić następująco:

$$\bar{m}_x = \frac{1}{1 - \nu^2} (m_x + \nu m_y),$$

$$\bar{m}_y = \frac{1}{1 - \nu^2} (m_y + \nu m_x),$$

$$\bar{m}_{xy} = \frac{1}{1 - \nu^2} (1 - \nu) m_{xy}.$$

Dla wyznaczenia jednej rzędnej powierzchni wpływowej trzeba więc pomierzyć dwa kąty w przypadku nieuwzględnienia ν , lub cztery kąty, gdy współczynnik ν zostanie uwzględniony. Najczęściej jednak przyjmuje się przy stosowaniu tej metody $\nu = 0$. Odległość między lusterkami wynosi zazwyczaj około 3 cm. A zatem na modelu wyznacza się momenty średnie na tej długości. Korzystanie z przedstawionej metody wymaga wyznaczenia E lub także ν .

21. Metoda pomiaru wydłużeń

21.1. Sposób tensometrii pneumatycznej [17]

Modelę stosowane w tej metodzie są wykonywane z reguły z gipsu. Sposób polega na pomiarze w rozpatrywanym przekroju wydłużeń przy pomocy tensometru mechanicznego o bazie 20 mm. Tensometr jest połączony z rurką i dyszą, z której wypływający strumień powietrza o stałym nadciśnieniu działa na płytkę oporową umieszczoną na ru-

chonym ramieniu tensometru w pewnej odległości od dyszy. Zmiana odległości między wylotem dyszy a płytką oporową, powstała na skutek odkształcenia modelu, powoduje zmianę ciśnienia proporcjonalną do wydłużenia w badanym miejscu. Zmianę ciśnienia odczytuje się na kolumnie wskaźnikowej połączonej z tensometrem gumowymi przewodami. Przy tego rodzaju pomiarach uzyskuje się powiększenie 40 000 razy. Tensometr można umieścić na modelu zarówno od góry, jak i od dołu. Przymocowanie tensometru do modelu wymaga dużej dokładności i specjalnych przyrządów. Przed przystąpieniem do badań wyznacza się stałe parametry charakteryzujące aparaturę i materiał modelu. Parametry te otrzymuje się przez pomiary na beleczkach próbnych i na modelu płyty posiadającej znane rozwiązanie.

Przy pomocy tej metody, na podstawie znajomości wydłużeń, przy zmieniającym się położeniu obciążenia jednostkowego można otrzymać powierzchnie wpływowe naprężeń, a znając naprężenia można obliczyć również momenty. Obliczenie tych wielkości na podstawie znajomości wydłużeń nie jest zasadniczo trudne. Jednak przy dużej liczbie mierzonych rzędnych obliczenia stają się bardzo pracochłonne.

Również w tej metodzie wymagana jest znajomość E i ν materiału modelu.

21.2. Sposób tensometrii oporowej

Zasada tej metody jest ta sama jak przy tensometrii pneumatycznej, a różnica polega przede wszystkim na rodzaju stosowanych tensometrów. Metoda tensometrii oporowej jest dziś stosowana dość często. Przy pomocy tej metody zostały wyznaczone powierzchnie wpływowe momentów zginających i skręcających przez RUSCHA i HERGENRÜDERA w publikacji [16], o czym w niniejszej pracy już wspomniano.

Momenty wyznacza się na podstawie znajomości wydłużeń górnych lub dolnych włókien płyty lub powłoki. Wydłużenia te mierzy się przy pomocy tensometrów elektrooporowych, naklejanych na model. Najczęściej nakleja się trzy lub cztery tensometry w formie rozety. Trzy tensometry, tworzące między sobą kąty 45° (lub inne znane kąty), pozwalają na wyznaczenie m_x , m_y i m_{xy} . Czwarty tensometr służy do ewentualnej kontroli. Praktycznie najmniejsza długość tensometru wynosi około 6 mm. Rozetę można utworzyć naklejając w badanym punkcie pojedyncze tensometry jeden na drugim. Gotowe rozety tensometryczne produkowane są przez firmę PHILIPS, o długościach pojedynczych tensometrów 4 mm. Mankamentem ich jest jednak to, że końcowe krawędzie tensometrów są oddalone od ich punktu przecięcia się o 7 mm. W tym przypadku więc ścisłe umieszczenie rozety pod danym punktem nie jest możliwe, a stan odkształcenia jest odniesiony wtedy do otoczenia tego punktu.

Wyznaczenie momentów na podstawie znajomości wydłużeń wymaga znajomości modułu sprężystości E , współczynnika Poissona ν oraz grubości modelu. Ustalenie tych wielkości można czasem pominąć przez wstępne badanie np. płyty, dla której rozwiązanie ściśle jest znane. Można wtedy otrzymać wprost dla badanego modelu związki między wydłużeniami a momentami.

Wyznaczenie powierzchni wpływowej odbywa się w ten sposób, że w badanym przekroju nakleja się rozetę tensometryczną i przy zmieniającym się położeniu obciążenia jednostkowego, zgodnie z siatką obciążeń, każdorazowo odczytuje się na mostku elektrycznym wydłużenie jednostkowe.

Stosowanie opisanej metody wymaga dobrze wyposażonego laboratorium, gdzie jest możliwe precyzyjne wykonanie modelu płyty, łożysk obciążenia itp. Nakład pracy jest znaczny (p. także [14] str. 77). a przeprowadzenie badań wymaga stosunkowo długiego czasu.

Jako materiał modelu można, obok najczęściej stosowanego gipsu, użyć również aluminium, celuloиду lub pleksiglasu. Zaletą gipsu polega na wartości współczynnika Poissona, która jest bliska wartości tego współczynnika dla betonu.

22. Metoda pomiaru krzywizny

Metoda służy do wyznaczania momentów zginających i skręcających. Uzasadnienie teoretyczne opiera się na równaniach momentów zginających w płycie ([4] i [11]):

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

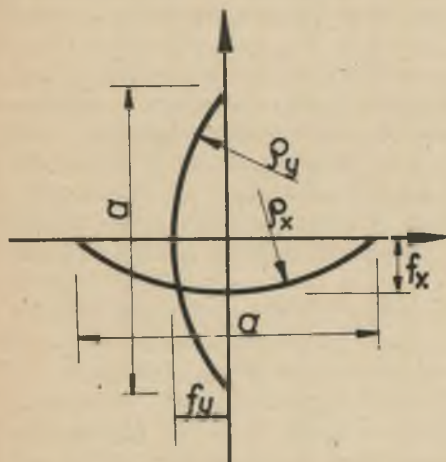
Równania te można również zapisać następująco (rys. 57):

$$m_x = -D \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right),$$

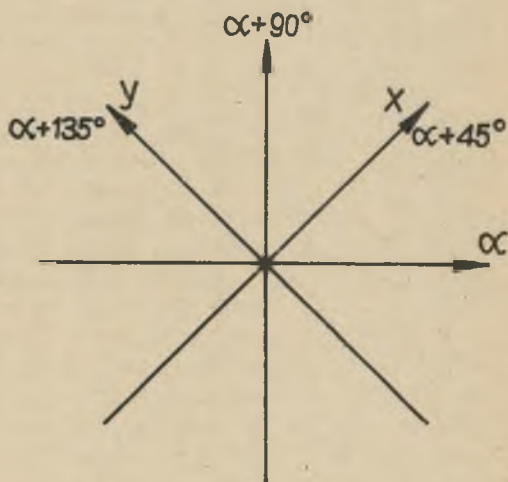
$$m_y = -D \left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{1}{\rho_x} \right).$$

Na podstawie znajomości momentów zginających w odpowiednich kierunkach (rys. 58) można wyznaczyć moment skrecający następująco:

$$m_{xy} = m_{45^\circ} - \frac{m_{0^\circ} + m_{90^\circ}}{2}$$



Rys. 57



Rys. 58

Badanie modelowe polega na wyznaczaniu promieni krzywizny dla dwóch kierunków do siebie prostopadłych. Przyjmuje się, że w zakresie ba zy pomiarowej "a" (rys. 57) ugięcie przyjmie postać paraboli. Wtedy

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{8f_x}{a^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = \frac{8f_y}{y^2}$$

Równania momentów zginających można teraz napisać:

$$m_x = K(f_x + \nu f_y),$$

$$m_y = K(f_y + \nu f_x),$$

gdzie

$$K = -\frac{2}{3} \frac{Ea^3}{(1 - \nu^2)a^2}$$

Przyrząd do pomiaru f_x i f_y , zwany krzywiznomierzem, posiada dwie nóżki stałe, rozstawione na długości "a", stanowiącej bazę pomiarową. W środku między nimi umieszczona jest igła czujnika, mierzącego ugięcia f_x i f_y (rys. 57). Krzywiznomierz ustawia się w przekroju, dla którego ma byćznaczona powierzchnia wpływowa. Przy zmieniającym się położeniu siły skupionej mierzy się f_x i f_y . HOMBERG i MARX [4]. posługiwali się w swych badaniach modelowych płyt krzywiznomierzem z czujnikiem mechanicznym, mierzącym ugięcia z dokładnością do 1/1000 mm. Używano krzywiznomierzy o bazach pomiarowych 5 cm, 4 cm i 3 cm.

LEONHARDT i ANDRÁ [11], po kilkuletnich pracach doświadczalnych ulepszyli ten przyrząd, dając czujnik indukcyjny, zamiast mechanicznego. Konstrukcja ulepszanego krzywiznomierza jest taka, że możliwa jest rejestracja ugięć w dwóch prostopadłych do siebie kierunkach z jednoczesnym uwzględnieniem współczynnika Poissona. Przed przystąpieniem do badań właściwych konieczne jest cechowanie przyrządu na tzw. pasmie pomiarowym, wykonanym z tego samego materiału i o tej samej grubości co model.

Wymienieni wyżej autorzy wyznaczali powierzchnie wpływowe na modelach z blachy aluminiowej grubości 3 do 6 mm. Umocowanie na modelu krzywiznomierza ulepszanego wymaga przewiercenia otworu i przyśrubowania od dołu do płyty. Wielkość bazy pomiarowej w krzywiznomierzu ulepszonym Leonhardta wynosi również 3 cm, a zatem przy pomocy tej metody zostają wyznaczone wartości średnie momentów na długości tej bazy.

23. Porównanie metody przemieszczeń wymuszonych z innymi metodami

Spośród przedstawionych wyżej metod badań modelowych, przy wyznaczaniu powierzchni wpływowych momentów zginających i skręcających, najszybciej prowadzi do celu i jest stosunkowo łatwa w stosowaniu metoda pomiaru krzywizny przy pomocy ulepszanego przez Leonhardta krzywiznomierza z czujnikiem indukcyjnym Philipsa. Najbardziej zaś uciążliwa jest metoda pomiaru kąta. Wszystkie te metody posiadają jedną wspólną cechę, mianowicie w celu wyznaczenia w określonym punkcie jednej rzędnej powierzchni wpływowej trzeba obciążyć model w tym punkcie siłą i wykonać pomiar kąta, wydłużenia lub krzywizny. W metodzie pomiaru kąta, jeśli chce się uwzględnić współczynnik Poissona, dla otrzymania jednej rzędnej trzeba wykonać cztery pomiary. Również cztery pomiary są niezbędne w tej metodzie gdy wyznacza się jedną rzędną powierzchni wpływowej momentu skręcającego.

Ta wspólna cecha nie towarzyszy metodzie przemieszczeń wymuszonych. Istota jej polega na wymuszaniu odpowiednich przemieszczeń, które powodują powstanie powierzchni odkształconej, proporcjonalnej

do powierzchni wpływowej szukanej siły uogólnionej. Można powiedzieć inaczej, że na skutek wymuszenia przemieszczenia otrzymuje się na modelu wprost, za jednym ruchem deformatora, powierzchnię wpływową szukanej wielkości w skali określonej przemieszczeniem wymuszonym. Mechanizm więc otrzymywania powierzchni wpływowej tą metodą stanowi już, zdaniem autora, poważną zaletę w porównaniu z metodami dotychczasowymi. Jako kryterium lepszej lub gorszej metody można przyjąć: 1) sposób pomiarów i potrzebna liczba tych pomiarów 2) czas potrzebny na przeprowadzenie pomiarów, 3) czas i koszt potrzebne do wykonania i przygotowania modelu do badań, 4) dokładność wyników. Najlepsza z metod dotychczasowych jest metoda pomiaru krzywizny krzywiznomierzem Leonhardta, gdyż pomiar ugięć (krzywizn) jest szybki, a przygotowanie modelu z blachy aluminiowej, stosowanej w tej metodzie jest proste. Przygotowanie natomiast modelu z gipsu, w metodach pomiaru kąta i tensometrycznej, jest uciążliwe i kosztowne. Dokładność otrzymywanych wyników we wszystkich metodach jest tego samego rzędu, jeśli oczywiście uwzględni się współczynnik Poissona.

W metodzie przemieszczeń wymuszonych najodpowiedniejszym materiałem jest aluminium, z którego wykonanie modelu jest bardzo proste. Łatwość i szybkość przeprowadzania pomiarów ugięć zależna jest od jakości i ilości odpowiednich urządzeń pomiarowych. Jeśli zastosowałoby się do pomiaru ugięć kilka czujników indukcyjnych Philipsa, umieszczonych w różnych punktach płyty lub powłoki, to przy jednorazowym wymuszeniu przemieszczenia można by otrzymać tyle rzędnych powierzchni wpływowej ile jest czujników. Przy stosowaniu tej metody istnieje więc możliwość znacznego skrócenia czasu pomiarów. Optimum byłoby wtedy, gdyby na skutek jednego wymuszonego przemieszczenia można było otrzymać wszystkie rzędne powierzchni wpływowej. Taka możliwość istnieje. W ostatnim czasie został zbudowany w Anglii przyrząd, zwany interferometrem, pozwalający otrzymać wprost warstwice odkształconej powierzchni z dokładnością do około 0,3 mikrona. Zasada działania tego przyrządu i opis jego budowy podane są w pracy J.P. DUNCANA i O. MICHEJDY [3]. A zatem w celu otrzymania warstwicy powierzchni wpływowej przy pomocy interferometru wystarczyłoby jednorazowe wymuszenie deformatorem odpowiedniego przemieszczenia. Zastosowanie interferometru w innych metodach nie jest możliwe.

Problemem, dyskutowanym obecnie, jest kontrola poprawności wyników otrzymanych na drodze badania modelowego. Sprawdzenie wyników obliczeń statycznych jest możliwe w razie potrzeby w każdej chwili. Podobne sprawdzenie wyników badań modelowych jest dotąd niemożliwe. Na Politechnice Wrocławskiej jest obecnie opracowywana przez B. GALASĄ i znacznie zaawansowana metoda pomiaru bardzo małych przemieszczeń (rzędu mikronów) drogą fotografii stereoskopowej. Na takiej fotografii specjalnym wodzikiem wyznaczają się warstwice jednakowych wysokości. Zastosowanie fotografii stereoskopowej

wej przy badaniu modelu zredukowałoby czynności tylko do wymuszenia jednego przemieszczenia i wykonania zdjęć (przy pomocy dwóch aparatów fotograficznych umieszczonych w różnych miejscach). Wyznaczenie warstwicy odbyłoby się przy pomocy fotografii. Można by równocześnie zmierzyć wielkość (znanego) wymuszonego przemieszczenia, sprawdzić wymiary płyty lub powłoki, poprawność ustawienia przyrządu i in., czyli cały mechanizm badania modelowego. Fotografia taka, wolna od błędów subiektywnych obserwatora, mogłaby więc rozwiązać problem kontroli przeprowadzonego badania i stanowić załącznik (podobnie jak obliczenia statyczne) do projektu. Sposób ten w badaniach modelowych nie został jeszcze wypróbowany. Stosowanie go jednak możliwe jest tylko w metodzie przemieszczeń wymuszonych.

Dokładność otrzymanych na modelu wyników zależy może od wielu czynników, jak właściwe przygotowanie modelu, jednorodność i cechy sprężyste materiału modelu, precyzyjność aparatury i metod pomiarowych. W przytoczonych metodach badań modelowych rząd wielkości błędów jest podobny. Taki sam rząd wielkości błędu otrzymuje się przy stosowaniu metody przemieszczeń wymuszonych. Przy badaniach modeli krzywiznomierzem Leonhardta z czujnikiem indukcyjnym, a więc sposobem dotąd najbardziej precyzyjnym, różnice między rzędnymi modelowymi i teoretycznymi, wyznaczonymi dla płyty kwadratowej, miały następujące wartości (wg publikacji [14]): 0,0%, 3,3%, 5%, 1,7%, 8,4%, 4,5%, 10%, 5%, 1,7%, 13,3%, 9,4%, 8,5%, 6,2%, 0,0%. Porównanie zaś powierzchni przekrojów wykazało różnice 6%, 5%, 65%, 3,1%. W przeprowadzonych przez autora badaniach modeli wykazano, że różnice między wynikami teoretycznymi i modelowymi są mniejsze od przytoczonych wyżej.

We wszystkich metodach badań modelowych wyznacza się momenty średnie na pewnej długości, zwanej bazą. W metodzie pomiaru kąta długość bazy jest równa odstępowi lusterek i wynosi około 30 mm, przy stosowaniu tensometru pneumatycznego 20 mm, tensometru oporowego najczęściej więcej niż 10 mm, krzywiznomierza Leonhardta 30 mm. W metodzie przemieszczeń wymuszonych bazie odpowiada długość rozłożenia wymuszonego przemieszczenia. Ta długość, jak wykazano, jest zależna od rodzaju wymuszonego przemieszczenia, grubości modelu i cech sprężystych materiału modelu. Przykładowo dla blachy aluminiowej grubości 2 mm długość ta wynosi: przy wyznaczaniu momentu zginającego 14,4 mm, momentu skręcającego 18 mm. Przy wyznaczaniu zaś siły poprzecznej na modelu z płyty celuloidowej grub. 2 mm długość rozłożenia w przekroju wymuszonego przesunięcia wynosiła 5,8 mm. Jest oczywiste, że im mniejsza długość bazy tym dokładniejsze są wyznaczone wielkości. W metodzie przemieszczeń wymuszonych "baza" jest zmienna, lecz stosunkowo niewielka.

Na pewien mankament metody przemieszczeń wymuszonych można uważać konieczność wykonania w modelu szczeliny. Przy stosowaniu jednak najnowszego krzywiznomierza Leonhardta należy również wykonać w modelu otwór, aby umożliwić przykręcenie przyrządu do modelu. Szcze

linę w modelu z celuloиду lub pleksiglasu łatwo jest zakleić. Płytę aluminiową trzeba raczej wymienić na inną. Wielkość modeli może być jednak stosunkowo mała, a więc zużycie aluminium przy grubości blachy 2 mm może nie wpłynąć wyraźniej na ogólny koszt badań.

Obecnie autor prowadzi badania nad sposobem wyznaczania powierzchni wpływowej momentu zginającego przy pomocy metody przemieszczeń wymuszonych bez konieczności wykonywania szczeliny. Opisanie tego sposobu będzie tematem oddzielnej pracy.

Zaletą metody przemieszczeń wymuszonych jest wreszcie fakt, że można po raz pierwszy przy pomocy tej metody wyznaczyć powierzchnie wpływowe siły poprzecznej na modelu bezpośrednio. Inne dotychczas znane metody nie pozwalają na bezpośrednie wyznaczenie takiej powierzchni.

VI. ZAKOŃCZENIE

Pomysł zastosowania metody przemieszczeń wymuszonych do badań modelowych układów powierzchniowych powstał w 1960 r., kiedy autor stosował tę metodę przy opracowaniu badań modelowych układów przestrzennych prętowych, o czym wspomniano już w pracy [7]. Ideę tego pomysłu przedstawiłem wówczas w Katedrze Mechaniki Budowlanej Politechniki Wrocławskiej. Prace nad wykonaniem aparatury, jej udoskonaleniem i stosowaniem praktycznym trwały ponad 2,5 roku. Celem niniejszej pracy było opracowanie nowego sposobu badań układów powierzchniowych, który wniósłby do statyki modelowej pewien postęp. W p.23 starałem się udowodnić, że cel ten został osiągnięty. Ponieważ, jak już zaznaczono, celem pracy była sama metoda i wykazanie, że jej zastosowanie daje wyniki poprawne, ograniczono się do badania takich modeli, które pozwoliły udowodnić poprawność zasady przeprowadzania badań, jak również sprawność wykonanej prototypowej aparatury. Z tego też względu pominięto przykład wyznaczenia powierzchni wpływowych dla powłok, dla których trudno znaleźć rozwiązanie w literaturze, tak aby można było je porównać z wynikami na modelu. Pominięto również przykład wyznaczania momentów podporowych, gdyż ich wyznaczenie na modelu wymaga tylko odpowiedniego zamocowania deformatora na podporze, reszta czynności pozostaje bez zmian. Wyznaczanie zaś oddziaływań w układach powierzchniowych przy pomocy metody przemieszczeń wymuszonych opisał autor w swej pracy [7]. Zajmowali się tym problemem także inni autorzy, np. VOGT [19]. Przykłady badań modeli, podane w niniejszej pracy, wykonane zostały w końcowej fazie prac nad metodą, przy pomocy trzeciej wersji deformatorów, których działanie jest już poprawne. Wyniki badania przytoczonych przykładów są rezultatem prze-

przewodzenia około 1000 pomiarów. Wszystkie zapisy tych pomiarów są w posiadaniu autora, modele zaś znajdują się w laboratorium Katedry Mechaniki Budowli. Przy pomocy metody przemieszczeń wymuszonych nie udało się jednak wyznaczyć powierzchni wpływowych sił podłużnych w powłokach, gdyż nie jest możliwe wymuszenie przesunięcia podłużnego. Do wyznaczenia tych sił w powłokach najlepsze są metody tensometryczne.

W r. 1961 i 1962 ukazały się dwa artykuły KOWALEWA [8] i [9], w których przedstawiono próbę wyznaczenia powierzchni wpływowej momentu zginającego również przy pomocy wymuszenia kąta deformatorem, który jednak posiada inną konstrukcję od deformatora zaprojektowanego przez autora. KOWALEW przeprowadza badanie na modelu z pleksiglasu, grub. 3 mm, wprowadzając długość szczeliny jako długość rozłożenia kąta w badanym przekroju. W przytoczonych w niniejszej pracy badaniach wykazałem, że długość "e" rozłożenia kąta jest większa od długości szczeliny i przy długości szczeliny 10 mm (jak u Kowalewa) długość "e" wynosi dla blachy aluminiowej 14,4 mm i jest większa dla celulozoidu i pleksiglasu. Wyznaczenie dokładne "e" jest sprawą zasadniczą dla otrzymania poprawnych wielkości liczbowych. Sprawa ta budzi więc w wymienionych publikacjach zastrzeżenia, aczkolwiek wg Kowalewa wyniki badań pewnej płyty z otworem różnią się niewiele od wyników teoretycznych dla takiej płyty obliczonej przez GALERKINA. Weryfikacja metody i aparatury winna być przeprowadzona na modelach prostych, dla których również znane rozwiązania teoretyczne nie budzą zastrzeżeń. W ten sposób postępował Leonhardt weryfikując działanie krzywiznomierza przez porównanie wyników badania płyty kwadratowej z rozwiązaniami teoretycznymi.

Najlepszym materiałem na modele przy stosowaniu opisanej metody jest aluminium, przede wszystkim z powodu jego małej wrażliwości na zmianę temperatury i większą wartość modułu sprężystości E. Celulozoid i pleksiglas są tak wrażliwe na zmiany termiczne, że niekiedy badanie modelowe staje się niemożliwe. Pleksiglas cechuje ponadto opóźnienie sprężyste. Ze względu na wielkość i sztywność deformatorów nie należy używać blachy grubszej od 2 mm, a długość szczeliny przyjmować stałą, równą 10 mm. Do wniosków tych doszedłem po przeprowadzeniu licznych badań próbnych. Przytoczone w pracy wyniki końcowe badań świadczą o dużej dokładności metody i deformatorów, mimo że badania prowadzone były w warunkach raczej nie korzystnych i przy pomocy jednego niewykwalifikowanego laboranta.

Praktyczne stosowanie metody przemieszczeń wymuszonych może doprowadzić jeszcze do jej udoskonalenia. Zdaniem autora, dalsze prace nad usprawnieniem badań powinny zmierzać do odpowiedniego przystosowania metod i urządzeń pomiarowych, przede wszystkim do zastosowania interferometru i stereofotogrametrii.

LITERATURA

- [1] Beggs G.E.: The use of Models in the Solution of Indeterminate Structures, Journal Franklin Inst. 1927, vol. 203, p.375.
- [2] Drobot S.: O analizie wymiarowej. Zastosowania matematyki, Warszawa-Wrocław 1954, I, Zeszyt 4, s.233-272.
- [3] Duszkan J.P. i Michejda O.: Gridwork rigidity determined by interferometry, Proceedings of the institution of mechanical engineers, vol.176, 1962.
- [4] Homberg, Marx: Schiefe Stabe u. Platten, Düsseldorf 1958.
- [5] Janusz M.: Teoria badań modelowych ustrojów statycznie niewyznaczalnych, Wrocławskie Towarzystwo Naukowe, Wrocław 1952.
- [6] Kmita J.: Powierzchnie wpływowe momentów płyt ukośnych, Inżynieria i Budownictwo nr 8, 1959.
- [7] Kolendowicz T.: Statyka modelowa przestrzennych układów prętowych, praca doktorska 1960.
- [8] Kowalew K.B.: Prímienienije eksperimentalnogo ili mekhaniczeskogo metoda k modelirowaniju powierhnostiej wlijanija dla płastinok, Rasczet prostranstwiennykh konstrukcji VI, Moskwa 1961.
- [9] Kowalew K.B.: Eksperimentalnyj metod rasczieta płastin i obołoczek pri pomoszczii modelei, Teorija płastin i obołoczek, Kijew 1962.
- [10] Kurdjumow A.A.: Procznost korablja, Sudpromgiz, 1956.
- [11] Leonhardt F., Andrä W., Kriger R.: Vereinfachtes Verfahren zur Messung von Momenteneinflussflächen bei Platten, Der Bauingenieur, nr 11/58.
- [12] Mitzel A., Suwalski L.: Badania modelowe jako podstawa wymiarowania konstrukcji żelbetowych, Inżynieria i Budownictwo, nr 12/1955.
- [13] Olsen H., Reinitzhuber F.: Die zweiseitig gelagerte Platte, W. Ernst u. Sohn, Berlin, 1 Bd.1950, 2 Aufl., 2 Bd. 1951.
- [14] Pietrzykowski J.: O nowej metodzie pomiarów powierzchni wpływowych płyt ortotropowych, Inżynieria i Budownictwo nr 2/1959.
- [15] Pucher A.: Einflussfelder elastischer Platten, Springer-Verlag, Wien 1958.
- [16] Rusch H., Hergenröder A.: Einflussfelder der Momente schiefwinkliger Platten, München 1961.

- [17] Schleicher C.: Badania modelowe ukośnego mostu w przekroju skrzynkowym, Inżynieria i Budownictwo, nr 7/1962.
- [18] Timoszenko S., Woinowsky - Krieger S.: Teoria płyt i powłok, Arkady 1962.
- [19] Vogt: Auflagerkräfte von zweiseitig aufgelagerten schiefwinkligen Einfeldplatten, Beton- u. Stahlbetonbau 1956, Heft 8.

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

ukazują się w następujących seriach:

- A. AUTOMATYKA
- B. BUDOWNICTWO
- Ch. CHEMIA
- E. ELEKTRYKA
- En. ENERGETYKA
- G. GÓRNICTWO
- IS. INŻYNIERIA SANITARNA
- MF. MATEMATYKA-FIZYKA
- M. MECHANIKA
- NS. NAUKI SPOŁECZNE

Dotychczas ukazały się następujące zeszyty
serii B:

- Budownictwo z. 1, 1956 r., s. 84, zł 13,50
- Budownictwo z. 2,
- Budownictwo z. 3, 1960 r., s. 104, zł 28,50
- Budownictwo z. 4, 1961 r., s. 107, zł 18,75
- Budownictwo z. 5, 1962 r., s. 156, zł 12,90
- Budownictwo z. 6, 1962 r., s. 111, zł 8,90
- Budownictwo z. 7, 1961 r., s. 118, zł 9,20
- Budownictwo z. 8, 1962 r., s. 86, zł 6,25
- Budownictwo z. S, 1962 r., s. 128, zł 8,85
- Budownictwo z. 9, 1963 r., s. 80, zł 4,40
- Budownictwo z. 10, 1964 r., s. 81, zł 6,—

