ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 113 Budownictwo z. 12 1964

JERZY BOBLEWSKI

O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH LICZB WPŁYWOWYCH

Streszczenie. W pracy przeprowadzono analizę warunków, przy spełnieniu których nieosobliwa macierz symetryczna może być macierzą liczb wpływowych. Wyciągnięto wnioski praktyczne.

1. Obliczenia statyczne, układu prętowego statycznie niewyznaczalnego składają się z dwu niezależnych od siebie następujących części:

a) ułożenie układu równań kanonicznych,

b) rozwiązanie tego układu.

Przy rozwiązywaniu układu równań istnieje możliwość skontrolowania prawidłowości przeprowadzonych operacji bez względu na to czy rozwiązujemy dany układ przy pomocy algorytmu Gausa, iteracji, czy też odwracając macierz.

Natomiast w znanej mi literaturze przedmiotu nie spotkałem się z jakimkolwiek sposobem kontroli prawidłowości układu równań, pomijając oczywiście powtórne obliczanie współczynników.

W artykule niniejszym przedstawiono sposób częściowej kontroli poprawności ułożonych równań.

2. Dla układu liniowo-sprężystego (niech nim będzie rama przedstawiona na rys. 1) zachodzi związek zw. twierdzeniem Clapeyrona, wg którego energia sprężysta wyraża się wzorem

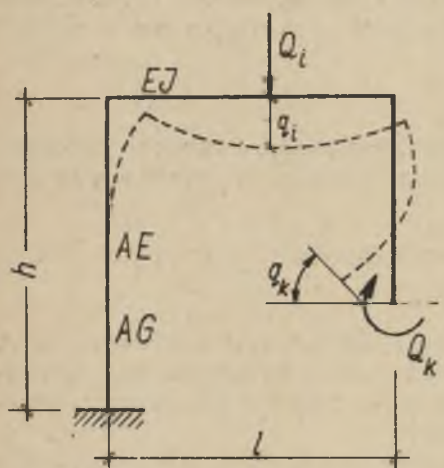
$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i q_i \tag{1}$$

gdzie Q_i jest uogólnioną siłą, a q_i jest uogólnionym przemieszczeniem w miejscu i kierunku działania siły Q_i (patrz rys. 1).

Pomiędzy uogólnioną siłą Q_i a uogólnionym przemieszczeniem q_i zachodzi związek

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} Q_k \tag{2}$$

gdzie δ_{ik} – wielkość zależna od danych geometrycznych układu l,h, wielkości geometrycznych przekroju poprzecznego A i J oraz od stałych materiałowych G i E.



Rys. 1

Wielkość δ_{ik} nazywa się liczbą wpływową. Liczbę wpływową definiujemy jako przemieszczenie wywołane w miejscu i kierunku działania siły Q_i przez siłę Q=1 przyłożoną w miejscu i kierunku działania siły Q_k δ_{ik} jest oczywiście zawsze liczbą rzeczywistą.

Podstawiając prawą stronę (2) do (1) otrzymujemy formę kwadratową

$$U_{(QQ)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} Q_i Q_k \tag{3}$$

Energia sprężysta nie może być wielkością ujemną $U \geqslant 0$ przy czym $U = 0$ jest przypadkiem trywialnym ponieważ opisuje układ nieobciążony.

W związku z powyższym w dalszym ciągu będziemy zajmowali się tylko przypadkiem gdy

$$U > 0 \tag{4}$$

Z wzoru (3) i (4) otrzymujemy

$$\sum_{i}^{n} \sum_{k}^{n} \delta_{ik} Q_i Q_k > 0 \tag{5}$$

nierówność (5) oznacza iż forma kwadratowa $U_{(QQ)}$ musi być dodatnio określona.

Ażeby nierówność (5) była spełniona potrzeba i wystarczy, aby wielkości wpływowe δ_{ik} spełniały kryteria dodatniej określoności macierzy $[A]$.

gdzie $$[A] \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdot & \delta_{1k} & \cdot\cdot & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdot & \delta_{2k} & \cdot\cdot & \delta_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdot & \delta_{ik} & \cdot\cdot & \delta_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdot & \delta_{nk} & \cdot\cdot & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

Kryteria te są znane w algebrze liniowej pod nazwą kryteriów Silwestra (patrz (1) str. 181 oraz (2) str. 249) Kryteria te stanowią warunki konieczne aby dana macierz symetryczna mogła być macierzą liczb wpływowych.

Kryteria Silwestra: Warunkiem koniecznym i dostatecznym aby forma kwadratowa (3) była dodatnio określona jest by wszystkie narożne minory D_k macierzy $[A]$ liczb wpływowych były dodatnie.

$$D_k > 0$$

gdzie $$D_k \overset{def}{=} \left| A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k \\ 1 & 2 & \ldots & k \end{pmatrix} \right| \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

Minorem narożnym nazywamy minor utworzony z k pierwszych wyrazów i pierwszych kolumn macierzy $[A]$.

Z powyższego kryterium wynika, iż wszystkie minory główne macierzy $[A]$ muszą być dodatnie, a tym samym wszystkie wyrazy leżące na głównej przekątnej tejże macierzy muszą być dodatnie

$$\delta_{kk} > 0 \qquad k = 1, 2 \ldots n$$

Dodatnią określoność formy (3) można ustalić również na podstawie wartości charakterystycznych macierzy $[A]$.

Aby forma kwadratowa była dodatnio określona, potrzeba i wystarczy, aby wszystkie liczby charakterystyczne macierzy [A] były dodatnie. (Liczbą charakterystyczną macierzy [A] nazywamy miejsca zerowe (pierwiastki) wielomianu charakterystycznego formy (3).
Poza w/w. ścisłymi metodami określenia formy (3) istnieją jeszcze pewne sposoby tzw. empiryczne które z uwagi na łatwość zastosowania oddają duże usługi przy badaniu dodatniej określoności macierzy [A].

Poniżej przytoczono dwa empiryczne kryteria,których uzasadnienie czytelnik może znaleźć w pracy M. Parodi [3].

1° Macierz [A] rzędu n będzie dodatnio określona, jeżeli tylko można znaleźć n dodatnich liczb $k_1; k_2, k_n$ spełniających nierówności

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i+1} \leqslant 1 \qquad a_i > k_i m_i$$

2° W większości przypadków macierz [A] będzie dodatnio określona jeżeli będą spełnione poniższe warunki

$$a_{kk} > 0 \qquad k = 1,2,\ldots n$$

$$a_{kk} \cdot a_{ii} > m_k m_i \qquad k = 1,2,\ldots n$$

W obu wypadkach m_i - maksymalna bezwzględna wartość wyrazów i - tego rzędu lub i - tej kolumny macierzy [A] nie leżących jednak na głównej przekątnej.

3. W naszej Katedrze przeprowadzono obliczenia statyczne rurociągu parowego wysokoprężnego dla elektrowni Konin. Kształt rurociągu jak wynika z przytoczonego szkicu był dosyć skomplikowany.

Między innymi, sprawdzenie poprawnego wyznaczenia wielkości wpływowych przeprowadzono przy pomocy przytoczonego kryterium Silwestra.

Liczby wpływowe obliczone dla przytoczonego rurociągu zostały ułożone w trzy macierze 6 x 6 przy czym macierze te zgodnie z zasadą Bettiego były macierzami symetrycznymi $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

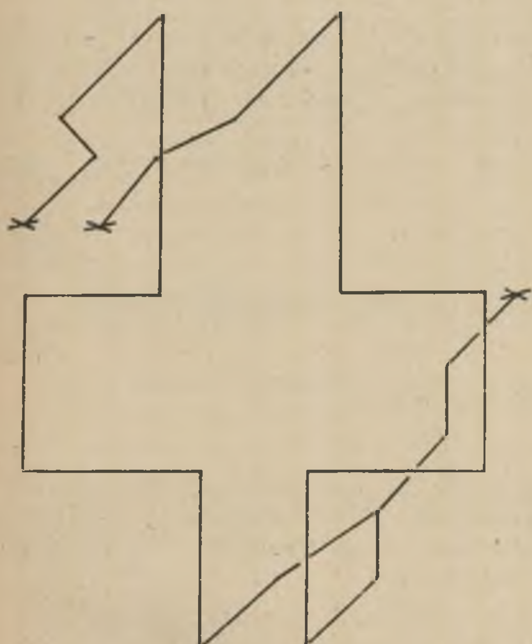
Poniżej przytoczono macierz, w której podczas sprawdzania kryterium Silwestra odkryto pomyłkę.

$$[A] = \begin{bmatrix} \underline{+3{,}5356} & +0{,}1179 & 0{,}0 & 0{,}0 & +1{,}8014 & -5{,}7646 \\ +0{,}1179 & \underline{+3.1980} & 0{,}0 & -1{,}014 & 0{,}0 & +18{,}85 \\ 0{,}0 & 0{,}0 & \underline{+3.3935} & +85{,}50 & -21{,}66 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & -1{,}8014 & +85{,}50 & \underline{+6{,}15} & -49{,}23 & -18{,}4 \\ +1{,}8014 & 0{,}0 & -21{,}66 & -49{,}23 & \underline{+186.0} & -4{,}40 \\ -5{,}7646 & +18{,}8500 & 0{,}0 & -18{,}40 & -4{,}40 & \underline{+220{,}5} \end{bmatrix}$$

(Wyrazy δ_{kk} leżące na głównej przekątnej podkreślono). Łatwo się przekonać iż dwa pierwsze minory główne 2 x 2 są dodatnie natomiast trzeci też 2 x 2 jest ujemny

$$|D| = \begin{vmatrix} +3{,}3935 & +85{,}50 \\ +85{,}50 & +6{,}15 \end{vmatrix} =$$

$$= 3{,}3935 \times 6{,}15 - (85{,}5)^2 < 0$$



Rys. 2

Ponieważ warunkom kryterium Silwestra macierz powyżej przytoczona nie odpowiada, nie może przedstawiać sobą tablicy liczb wpływowych.

Po dokładnym sprawdzeniu wartości $\delta = 85{,}5$ oraz $\delta = 6{,}15$ okazało się, że wielkości te zostały po prostu przestawione miejscami.

Przy szukaniu pomyłki wystarczyło sprawdzić obliczenia tylko dwu podanych δ z dwudziestu jeden różnych wartości ponieważ właśnie te dwie wartości miały wpływ na minor

$$D = \left| A \begin{pmatrix} 3,4 \\ 3,4 \end{pmatrix} \right|$$

LITERATURA

[1] GANTMACHER F.R.: Teoria matric Gostechizdat 1953.

[2] KUROSZ A.G.: Kurs wyższej algebry Fizmatgiz 1953.

[3] PARODI M.: La localisation des valeurs caracteristiques des matrices et ses applications. Paris, 1959.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЧИСЕЛ ВЛИЯНИЯ

Содержания

В статье описываются некоторые способы контроля правильности составления канонических уравнений метода сил. Для контроля использовано критерия Сильвестера и приближённые методы определения положительной определенности матрицы чисел влияния.

Контроль проведено используя факт, что энергия упругости всегда должна быть положительной.

ON THE CERTAIN PROPERTIES OF THE INFLUENCE NUMBERS

Summary

In the paper the analysis the correctness of the square influence matrix has been presented. The Silvester criterions and some approximate methods have been applyed, according to positive definite of such matrices.