

EWA KAJRUNAJTYS

O UPROSZCZENIU METODY RÓWNOWAŻENIA MOMENTÓW POPRZEZ REDUKCJĘ LICZBY WĘZŁÓW

Streszczenie. Autorka wskazuje na uproszczenie, jakie wprowadzić można do jednoetapowego sposobu wyrównywania momentów, przez przyjęcie jako elementów podstawowych układu nie tylko prętów prostych, lecz również ram kolanowych i portalowych.

1. Wstęp

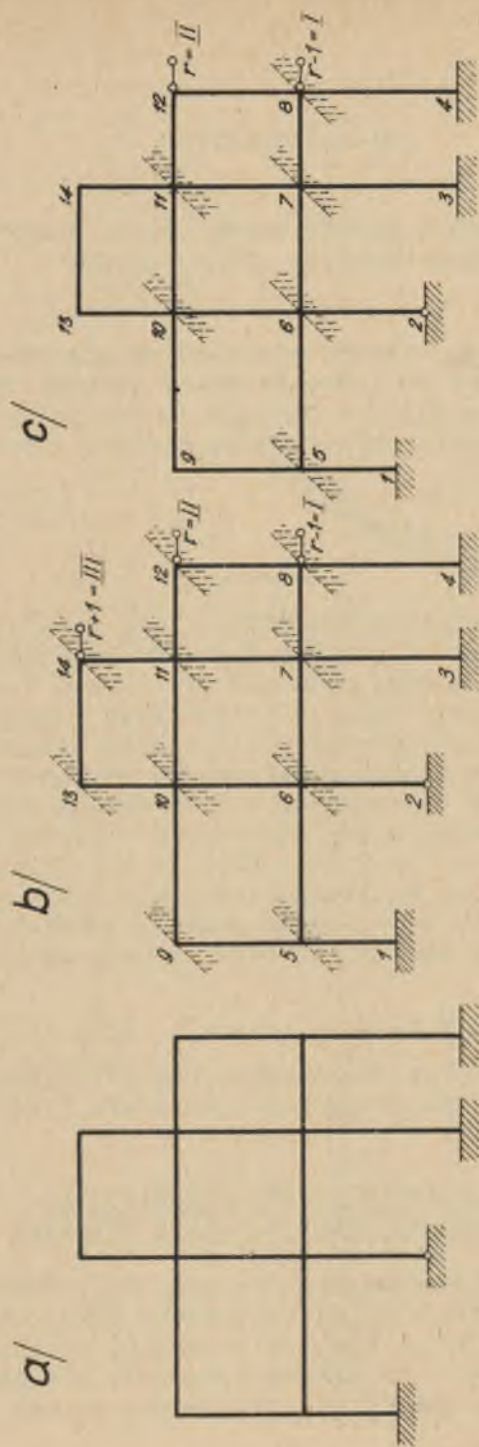
W metodzie równoważenia momentów [1][2] jako układ podstawowy przyjmuje się układ złożony z prętów prostych, których przekroje końcowe nie mogą doznawać przesunięć i obrotów (z wyjątkiem przekrojów przy węzłach podporowych przegubowych).

Punktem wyjściowym rozważań w niniejszym artykule jest propozycja wprowadzenia układu podstawowego złożonego z prętów prostych oraz prętów załamanych, o tych samych warunkach podporowych. Wprowadzenie prętów załamanych w planie wyłącza z iteracji część węzłów. Daje to w efekcie nie tylko zmniejszenie liczby kolumn tablicy iteracyjnej, ale także skrócenie przebiegu samej iteracji. Zastosowana poniżej skrócona iteracja operująca momentami i siłami węzłowymi wymaga określenia przekazników:

- a) wykorzystanych w trakcie iteracji (tab. II),
- b) wykorzystanych przy obliczaniu momentów występujących w przywęzłowych przekrojach prętów (tab. III).

2. Określenie układu podstawowego i wyznaczenie współczynników przekazu

Rozpatrzmy ramę przedstawioną na rys. 1a. Równoważenie momentów węzłowych zgodnie z [4] należałoby przeprowadzić dla układu podstawowego jak na rys. 1b w tablicy składającej się z 13 kolumn (10 węzłów, 3 dodatkowe podpory). Dla układu podstawowego zredukowanego jak na rys. 1c liczba kolumn mniejszy



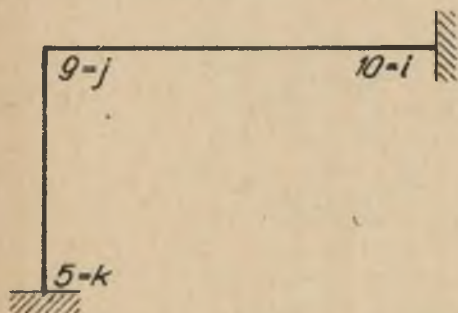
Rys. 1

się do 8, wyłączmy bowiem z iteracji węzły 9, 12, 13, 14, i dodatkową podporę III. Schemat podstawowy (rys. 1c) składać się będzie z prostych prętów 5-6, 6-10, 6-7, 10-11, 7-11, 1-5, 2-6, 3-7, 4-8 oraz z prętów załamanych 5-10, 10-11, 11-8*.)

Szttywności suwne i obrotowe prętów prostych określono jak w [1] [2].

2.1. Wyznaczenie współczynników przekazu dla pręta $\widehat{i-k}$

Wyodrębnijmy zespół prętów 5-9-10. Pod wpływem zadanego obciążenia po zrównoważeniu momentów w węźle "j", w węzłach "k" oraz "i" powstaną momenty M'_{kj} , M'_{ij} , które wraz z momentami od obciążenia pozostałych prętów zbiegających się w węzłach "i" oraz "k" nie pozostają w równowadze. Musimy więc dodatkowo w węzłach tych zacząć momenty:



Rys. 2

$$M'_k = - \sum M'_k \quad (2.1.1)$$

$$M'_i = - \sum M'_i$$

które w węzłach sąsiednich wywołają momenty:

a) moment M'_i w węźle "i" wywoła w węźle "k" moment:

$$M_{ki} = - M'_i \cdot \mu^2 \cdot \frac{k_{kj} \cdot k_{ji}}{k_j \cdot k_i} \quad (2.1.2)$$

*) Dla prętów załamanych celem odróżnienia ich od prętów prostych przyjęto oznaczenia:

$\widehat{i-k}$ - dla pręta jednokrotnie załamane go jak w (2.1)

$\widehat{i-k}$ - dla pręta dwukrotnie załamane go jak w (2.2)

oraz siłę w dodatkowej podporze uniemożliwiającej przesunięcie piętra "r":

$$H_{ri} = -M'_i \cdot \left[\frac{\mathcal{H}_{i(i-1)}}{K_i} - \mu \cdot \frac{k_{ji} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_i \cdot K_j} \right] \quad (2.1.3)$$

b) moment M'_k w węźle "k" wywoła w węźle "i" moment:

$$M_{ik} = -M'_k \cdot \mu^2 \cdot \frac{k_{kj} \cdot k_{ji}}{K_k \cdot K_j} \quad (2.1.4)$$

oraz siły w dodatkowych podporach uniemożliwiających przesunięcie pięter "r" oraz "(r-1)"

$$H_{rk} = -M'_k \cdot \left[\frac{\mathcal{H}_{kj}}{K_k} - \mu \cdot \frac{k_{kj} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_k \cdot K_j} \right] \quad (2.1.5)$$

$$H_{(r-1)k} = -M'_k \cdot \frac{\mathcal{H}_{k(k-1)}}{K_k} \quad (2.1.5)$$

Współczynnikami przekazania będą więc wartości

$$P_{ik} = -\mu^2 \cdot \frac{k_{kj} \cdot k_{ji}}{K_k \cdot K_j} \quad (2.1.6)$$

$$P_{ki} = -\mu^2 \cdot \frac{k_{kj} \cdot k_{ji}}{K_i \cdot K_j}$$

$$Q_{ri} = -\left[\frac{\mathcal{H}_{i(i-1)}}{K_i} - \mu \cdot \frac{k_{ji} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_i \cdot K_j} \right]$$

$$Q_{(r-1)k} = -\frac{\mathcal{H}_{k(k-1)}}{K_k}$$

$$Q_{rk} = -\left[\frac{\mathcal{H}_{kj}}{K_k} - \mu \cdot \frac{k_{kj} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_k \cdot K_j} \right]$$

Wartości momentów występujących w przywęzłowych przekrojach prętów "j-k" oraz "j-i" obliczamy po zrównoważeniu momentów w węzłach "k" oraz "i" (przykł. tab.III)

$$M_{j-k}^k = M_k \cdot \frac{k_{kj}}{K_k} \cdot \mu \cdot \left[1 - \frac{k_{jk}}{K_j} \right] = M_k \cdot P_{j-k}^k \quad (2.1.7)$$

$$M_{j-i}^i = M_i \cdot \frac{k_{ji}}{K_i} \cdot \mu \cdot \left[1 - \frac{k_{ji}}{K_j} \right] = M_i \cdot P_{j-i}^i$$

gdzie:

$$P_{j-k}^k = \frac{k_{kj}}{K_k} \cdot \mu \cdot \left[1 - \frac{k_{jk}}{K_j} \right] = - P_{j-i}^k \quad (2.1.7')$$

$$P_{j-i}^i = \frac{k_{ji}}{K_i} \cdot \mu \cdot \left[1 - \frac{k_{ji}}{K_j} \right] = - P_{j-k}^i$$

P_{j-k}^k , P_{j-i}^k , P_{j-k}^i , P_{j-i}^i - wsp. przekazu

Momenty M_{ik} i M_{ki} powstające w węzłach "i" oraz "k" określiliśmy po zrównoważeniu momentów w pośrednim węźle "j". Zaczepienie więc momentu M_i' w węźle "i" wywoła nie tylko moment M_{ki} w węźle "k", ale również w węźle "i" moment M_{ii} , gdzie:

$$M_{ii} = - M_i' \cdot \mu^2 \cdot \frac{(k_{ij})^2}{K_i \cdot K_j} \quad (2.1.8)$$

$$P_{ii} = - \mu^2 \cdot \frac{(k_{ij})^2}{K_i \cdot K_j}$$

$$P_{kk} = - \mu^2 \cdot \frac{(k_{kj})^2}{K_k \cdot K_j} \quad (2.1.9)$$

P_{ii} , P_{kk} - wsp. przekazania (powrotu) momentu równoważającego w węźle "i" lub "k" na moment w tym samym węźle.

Pod wpływem obciążenia zewnętrznego i równoważenia momentów w węzłach ramy, w dodatkowych podporach (rys. 1c) uniemożliwiających przesunięcie pięter "(r-1)", "r", "r+1" powstaną siły:

$$H_{r-1} = \sum H_{r-1}^0 + \sum H_{(r-1)i}$$

$$H_r = \sum H_r^0 + \sum H_{ri} \quad (2.1.10)$$

$$H_{r+1} = \sum H_{r+1}^0 + \sum H_{(r+1)i}$$

Ponieważ rzeczywisty układ (rys. 1a) nie posiada dodatkowych podpór, musi więc być:

$$H_{r-1} = 0$$

$$H_r = 0$$

$$H_{r+1} = 0$$

Dla spełnienia tego warunku w miejscu i kierunku działania sił H_{r-1} , H_r , H_{r+1} , musimy układ podstawowy (rys. 1c) kolejno obciążyć siłami:

$$H'_{r-1} = -H_{r-1}$$

$$H'_r = -H_r \quad (2.1.11)$$

$$H'_{r+1} = -H_{r+1}$$

Siły te spowodują powstanie momentów w węzłach "i" (głowicowych i stopowych skupów)

$$M_i^H = -H'_r \cdot \frac{\mathcal{H}_{ik}}{\sum_n \frac{\mathcal{H}_{ik}}{l_{ik}}} = -H'_r \cdot \frac{\mathcal{H}_{ik}}{\mathcal{H}_r} \quad (2.1.12)$$

\mathcal{H}_r - sztywność sumna piętra "r".

W wyłączonej z iteracji węźle "j" powstanie moment:

$$M_j^H = -H'_r \cdot \frac{\mathcal{H}_{jk}}{\eta_r} \quad (2.1.12)$$

który równoważymy i rozprowadzamy. W rezultacie w węzłach "i" oraz "k" pod wpływem siły H'_r powstają momenty:

$$M_i^H = H'_r \left[-\frac{\mathcal{H}_{i(k-1)}}{\eta_r} + \mu \cdot \frac{k_{ij} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_j \cdot \eta_r} \right] \quad (2.1.13)$$

$$M_k^H = H'_r \left[-\frac{\mathcal{H}_{kj}}{\eta_r} + \mu \cdot \frac{k_{kj} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_j \cdot \eta_r} \right]$$

a w miejscu dodatkowego podparcia "r" (rys. 1c) siła:

$$H_r^H = H'_r \left[-\frac{\mathcal{H}_{jk}^p}{\eta_r} \cdot \frac{\mathcal{H}_{jk}}{K_j} \right] \quad (2.1.14)$$

gdzie:

$$F_i^H = -\frac{\mathcal{H}_{ik}}{\eta_r}$$

$$F_k^H = \left[-\frac{\mathcal{H}_{kj}}{\eta_r} + \mu \cdot \frac{k_{kj} \cdot \mathcal{H}_{kj}}{K_j \cdot \eta_r} \right] \quad (2.1.15)$$

$$Q_r^H = -\frac{\mathcal{H}_{jk}}{\eta_r} \cdot \frac{\mathcal{H}_{jk}}{K_j}$$

Momenty, które powstaną w przywęzłowych przekrojach prętów "j-i" oraz "j-k" pod wpływem siły H'_r będą miały wartości:

$$M_{j-i}^H = -H'_r \cdot \frac{\mathcal{H}_{jk}}{\eta_r} \cdot \frac{k_{ji}}{K_j} = H'_r \cdot P_{j-i}^H \quad (2.1.16)$$

$$M_{j-k}^H = H'_r \cdot \frac{\mathcal{H}_{jk}}{\eta_r} \cdot \left[1 - \frac{k_{jk}}{K_j} \right] = H'_r \cdot P_{j-k}^H$$

gdzie:

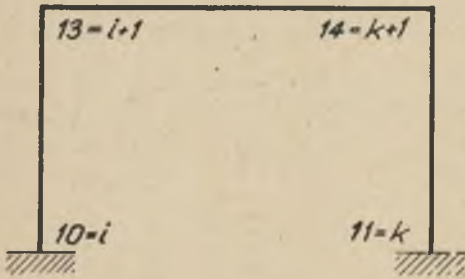
$$P_{j-1}^H = - \frac{\alpha_{jk}}{\eta_r} \cdot \frac{k_{ji}}{K_j} \quad (2.1.16)$$

$$P_{j-k}^H = \frac{\alpha_{jk}}{\eta_r} \cdot \left[1 - \frac{k_{jk}}{K_j} \right] = - P_{j-1}^H$$

P_{j-1}^H, P_{j-k}^H - wsp. przekazu

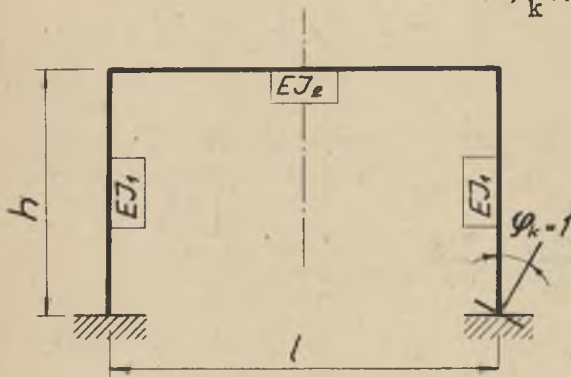
2.2. Wyznaczenie współczynników przekazu dla prętów $\overline{i-k}$

Rozważmy obecnie zespół prętów $\overline{10-13-14-11}$. W układzie podstawowym (rys. 1c) pręt $\overline{i-k}$ stanowi sztywno utwierdzoną ramę. Pod wpływem zadanego obciążenia zewnętrznego, w węzłach "i" oraz "k" powstaną oddziaływania M_k^0, M_i^0 , a w dodatkowej podporze uniemożliwiającej przesunięcie piętra "r" powstanie siła H_r^0 . Wartość M_i^0, M_k^0, H_r^0 łatwo można obliczyć w oparciu



Rys. 3

o tablice Kleinogela [3]. Współczynniki przekazu oraz sztywność pręta $\overline{i-k}$ wyznaczamy wymuszając obrót węzła "i" lub "k" o kąt $\varphi_i=1$ lub $\varphi_k=1$.



Rys. 4

Obrót węzła "k" wywoła momenty M_i oraz M_k , których wartość obliczymy metodą odkształceń, korzystając z uproszczeń w obliczeniach wynikających z symetrii i antysymetrii de formacji układu. Niech

$$\frac{J_2}{J_1} \cdot \frac{h}{l} = \dots \quad e + 2 = N_1$$

$$6e + 1 = N_2$$

a) Symetria

$$M'_{i(i+1)} = \frac{2EJ_1}{h} \cdot \left[-1 + \varphi'_{(i+1)} \right]$$

$$M'_{(i+1)i} = \frac{2EJ_1}{h} \cdot \left[2\varphi'_{(i+1)} - \frac{1}{2} \right]$$

$$M_{(i+1)(k+1)} = \frac{2EJ_2}{1} \cdot \left[2\varphi'_{(i+1)} - \varphi'_{(i+1)} \right], \quad \sum M_{(i+1)} = 0$$

$$\varphi'_{(i+1)} = \frac{1}{2(e+2)} = \frac{1}{2N_1}$$

b) Antymetria

$$M''_{i(i+1)} = \frac{2EJ_1}{h} \cdot \left[1 + \varphi''_{(i+1)} - 3\vartheta'' \right]$$

$$\sum M_{(i+1)} = 0$$

$$M''_{(i+1)i} = \frac{2EJ_1}{h} \cdot \left[2\varphi''_{(i+1)} + \frac{1}{2} - 3\vartheta'' \right]$$

$$\sum H_{(i+1)} = 0$$

$$M''_{(i+1)(k+1)} = \frac{2EJ_2}{1} \cdot \left[2\varphi''_{(i+1)} + \varphi''_{(i+1)} \right]$$

$$\varphi''_{(i+1)} = \frac{1}{2(6e+1)} = \frac{1}{2N_2} \quad \vartheta'' = \frac{1+3e}{2N_2}$$

Momenty w "i", "(i+1)", "(k+1)", "k" wynoszą wówczas:

$$M_i = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[-\frac{2e+3}{e \cdot N_1} + \frac{3}{N_2} \right]$$

$$M_{(i+1)i} = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[-\frac{1}{N_1} - \frac{3}{N_2} \right]$$

$$M_{(i+1)(k+1)} = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[\frac{1}{N_1} + \frac{3}{N_2} \right] \quad (2.2.1)$$

$$M_{(k+1)(i+1)} = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[\frac{1}{N_1} + \frac{3}{N_2} \right]$$

$$M_{(k+1)k} = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[\frac{1}{N_1} - \frac{3}{N_2} \right] \quad (2.2.1)$$

$$M_k = \frac{EJ_2}{1} \cdot \left[\frac{2e+3}{e \cdot N_1} + \frac{3}{N_2} \right]$$

Obliczony moment M_k stanowi sztywność pręta $\overline{i-k}$

$$M_k = + \frac{k-1}{k_i} \quad (2.2.2)$$

Suma sztywności prętów zbiegających się w węzle "k" określa sztywność węzła "k"

$$\sum k_{ki} = K_k \quad (2.2.3)$$

Wartość współczynnika przekazania momentu M_k w węzle "k" na moment M_i w węzle "i" otrzymamy obliczając

$$P_{ik} = \frac{M_i}{K_k} \quad (2.2.4)$$

Przy założeniu $EJ_2 = EJ_1$ współczynnik P_{ik} przyjmuje wartość:

$$P_{ik} = \frac{1}{K_k \cdot 1} \cdot \left[-\frac{2e+3}{e \cdot N_1} + \frac{3}{N_2} \right]$$

Współczynniki przekazania momentu M_k na przywęzłowe przekroje prętów $(i+1)-(k+1)$, $(i+1)-i$, $(k+1)-(i+1)$, $(k+1)-k$, otrzymamy z odpowiednich stosunków momentów występujących w tych przekrojach, wywołanych obrotem węzła "k" o kąt $\varphi_k = 1$, do sztywności węzła "k" (2.2.3)

$$P_{(i+1)i}^k = \frac{M_{(i+1)i}}{K_k} = \frac{1}{K_k \cdot 1} \cdot \left[-\frac{1}{N_1} - \frac{3}{N_2} \right] \quad (2.2.5)$$

$$P_{(i+1)(k+1)}^k = \frac{M_{(i+1)(k+1)}}{K_k} = \frac{1}{K_k \cdot 1} \cdot \left[\frac{1}{N_1} + \frac{3}{N_2} \right]$$

$$P_{(k+1)(i+1)}^k = \frac{M_{(k+1)(i+1)}}{K_k} = \frac{1}{K_k \cdot 1} \cdot \left[-\frac{1}{N_1} + \frac{3}{N_2} \right] \quad (2.2.5)$$

$$P_{(k+1)k}^k = \frac{M_{(k+1)k}}{K_k} = \frac{1}{K_k \cdot 1} \cdot \left[\frac{1}{N_1} - \frac{3}{N_2} \right]$$

Ponieważ zgodnie z schematem statycznym ramy (rys. 1a) z węzła "k" na węzeł "i" moment przekazuje się również poprzez prosty pręt k - i, przekazy dodajemy do siebie i w iteracji rozprowadzamy momenty równoważące łącznie. Po zrównoważeniu oddziaływań dodatkowych więzów i podpór uniemożliwiających przesuw pięter, obliczamy wielkości sił wewnętrznych w oddzielnej tablicy.

3. Tok rozwiązywania - przykład liczbowy

Zaproponowany powyżej sposób obliczeń zilustrujemy przykładem liczbowym dla ramy podanej na rys. 5a.

Pozbawiając węzły 5 i 6 swobody obrotu oraz piętro I swobody przesuwu otrzymamy układ podstawowy (rys. 5b) złożony z prostych prętów 5-2, 6-3, 5-6 i prętów załamanych 5-1, 5-6

Przy założeniu $EJ=1$ w tabl. I obliczamy wartości sztywności obrotowych i suwnych prętów prostych i załamanych. Na podstawie (2.1.6) (2.1.15) (2.2.5) obliczamy wartości współczynników przekazu i wpisujemy w odpowiedni wiersz i kolumnę tabl. II i tabl. III, jak w [4].

Np.: współczynnik przekazu momentu równoważącego M'_5 w węźle 5 na węzeł 6 obliczamy

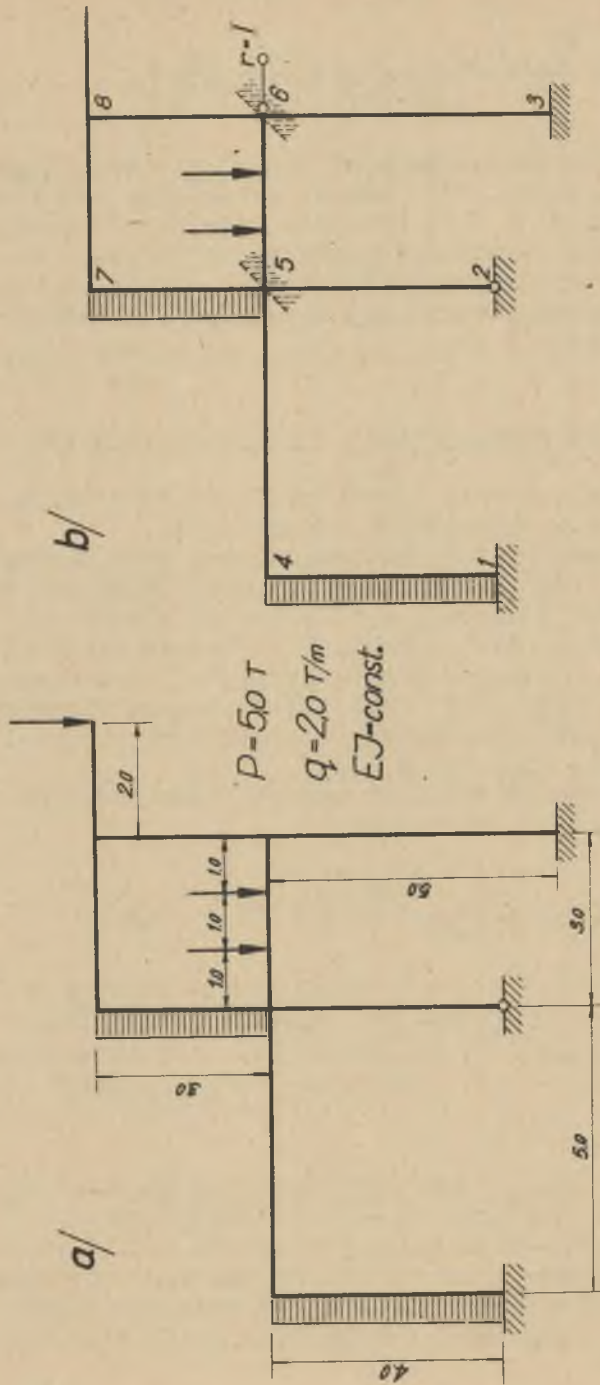
$$P_{56}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 3,58} \cdot \left[-\frac{5}{3} + \frac{3}{7} \right] = -0,115$$

$$P_{56}^0 = \frac{0,5 \cdot 1,333}{3,58} = +0,186$$

$$P_{56} = +0,071$$

Wartość $0,071 = P_{56}$ jest sumą przekazu momentu M'_5 na węzeł 6 poprzez załamany pręt 5-6 i prosty pręt 5-6.

Momenty wyjściowe obliczamy w oparciu o tablice momentów wyjściowych dla prętów prostych oraz w oparciu o tablice Kleinogela dla prętów załamanych. Iterację przeprowadzamy w tabl. II w sposób identyczny jak w przykładzie podanym w [4].



Rys. 5

Obliczenie wielkości momentów w przywęzłowych przekrojach prętów przeprowadzamy w tabl. III rozdzielając i przekazując wartości zrównoważonych momentów i sił. Współczynniki rozciału momentów na przekroje przywęzłowe określamy jak w [1] [2]. Współczynniki przekazu momentów na przekroje przy węzłach wyłączonych z iteracji obliczamy zgodnie z (2.2.5). Sumy kolumn tabl. III dadzą poszukiwane wartości momentów w przywęzłowych przekrojach prętów prostych.

Porównując zaproponowany powyżej sposób obliczeń statycznych ram płaskich przesuwnych z klasycznym ujęciem metody Crossa zauważamy, iż proces równoważenia momentów i sił ulega tak poważnemu uproszczeniu i skróceniu, że mimo wzrostu pracochłonności obliczeń sztywności i przekazów czyni przedstawiony sposób bardziej operatywnym w zastosowaniu niż sposób klasyczny. Opracowanie tablic z zestawionymi wartościami sztywności prętów załamanych najczęściej spotykanych w praktyce uprościłoby jeszcze bardziej obliczenia statyczne ram według powyższego sposobu.

LITERATURA

- [1] BŁASZKOWIAK St., KACZKOWSKI Z.: Metoda Crossa. Warszawa, 1959 r.
- [2] GIERSZEWSKI M.: Ramy - obliczenia statyczne. Warszawa, 1955 r.
- [3] KLEINLOGEL H.; Rahmenformeln. Berlin, 1958 r.
- [4] KAJRUNAJTYS E.: Rozwiązywanie ram przesuwnych poprzez jednoetapową iterację momentów i sił węzłowych. Zesz. N. Pol. Śl. - Nr 9.

O УПРОЩЕНИИ МЕТОДА УРАВНОВЕШИВАНИЯ МОМЕНТОВ ПУТЕМ РЕДУКЦИИ ЧИСЛА УЗЛОВ

С о д е р ж а н и е

Статья представляет собой попытку упрощения статических расчётов плоских рам с передвижными узлами методом уравновешивания узловых сил и моментов. Предлагается принимать основную систему составленную из стержней, оси которых прямые или ломаны в плоскости действия сил; краевые сечения стержней не могут передвигаться или поворачиваться.

Для стержней ось которых является плоской ломаной линией (для последовательности прямых стержней) вычислены коэффициенты жёсткости, коэффициенты переказа и исходные моменты, используя известные характеристики прямых стержней. Итерацию неуравновешенных узловых величин (моментов и сил) проведено одноступенным способом.

ÜBER DIE VEREINFACHUNG DES MOMENTENAUSGLEICHVERFAHRENS
DURCH REDUKTION DER KNOTEN-ZAHL

Z u s a m m e n f a s s u n g

Der Aufsatz bildet eine Probe der Vereinfachung der statischen Berechnung der verschieblichen ebenen Rahmentragwerken mit Hilfe des Momenten- und Knotenkräftenausgleichsverfahrens. Inhalt der vorgeschlagener Vereinfachung der Berechnung ist die Annahme des Grund-Systems zusammengesetzt aus geraden Stäben und aus im Plane durchbrochenen Stäben, welcher Enddurchschnitte keine Drehwinkeln und Verschiebungen nicht empfinden können. Zu den im Plane durchbrochenen Stäben (Zug der gerader Stäben) wurden die Steifigkeitszahlen, Überleitungszahlen sowie die Volleinspannmomente berechnet, gestützt auf die bekannte Charakteristik der geraden Stäben. Die Iteration der ungleichwertiggestellten Knoten-Größen (Momente und Kräfte) wurde einetappige Methode durchgeführt.