ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 113 Budownictwo z. 12 1964

SZCZEPAN WYRA

PRZYBLIŻONY SPOSÓB WYZNACZANIA MACIERZY ODWROTNYCH DLA PEWNEJ KLASY MACIERZY SYMETRYCZNYCH

Streszczenie. Praca z algebry liniowej, mogąca mieć duże znaczenie przy obliczaniu pewnego typu układów prętowych. Stanowi pierwszy etap większego opracowania, przygotowywanego przez autora.

1. Niech będzie dany układ równań liniowych, który w zapisie macierzowym można przedstawić w postaci:

$$A \cdot Q = q \tag{1.1}$$

Q jest kolumną "n" niewiadomych, q jest kolumną danych "n" wyrazów wolnych, macierz A jest daną nieosobliwą macierzą kwadratową n-tego stopnia.
Układem (1.1) może być np. układ równań kanonicznych metody sił lub metody odkształceń, gdzie niewiadomymi są wielkości "nadliczbowe". Rozwiązanie Q układu równań (1.1) można otrzymać - mnożąc ten układ lewostronnie przez macierz A^{-1} tj. macierz odwrotną do macierzy A; $A \cdot A^{-1} = I$ (I - macierz jednostkowa). Otrzymamy związek

$$Q = A^{-1} \cdot q \tag{1.2}$$

Znajomość macierzy A^{-1} pozwala uzyskać kolumnę niewiadomych Q przy różnych kolumnach wyrazów wolnych q. Jest to użyteczne np. w statyce, przy obliczaniu jednego schematu statycznego dla różnych obciążeń, z których każde określone jest inną kolumną q. Macierzą odwrotną posługujemy się np. przy obliczaniu rzędnych linii wpływowych wielkości wewnętrznych (momentów lub sił) w statycznie niewyznaczalnych ustrojach prętowych lub przy układaniu nagłówków tablic iteracyjnych [8].

Również w rachunku krakowianów([3] str. 42-44) zwraca się uwagę na użyteczność znajomości krakowianu A^{-1}, która jest równoznaczna ze znajomością tzw. "rozwiązania nieoznaczonego".

Podręczniki z algebry liniowej [1], [2], [4] podają wiele sposobów obliczania macierzy odwrotnych. Dla dużych macierzy wymaga to znacznej ilości działań rachunkowych i konieczności prowadzenia obliczeń z dużą dokładnością.

W artykule tym przedstawimy przybliżony sposób obliczania macierzy odwrotnych dla pewnych szczególnych postaci macierzy, które oznaczać będziemy symbolem A.

Zakładamy

1) macierz A jest macierzą dodatnio określoną i symetryczną (co w zagadnieniach statycznych zawsze zachodzi),

2) wyrazy leżące na przekątnej głównej macierzy są wielokrotnie większe od wyrazów pozostałych,

3) stosunki wyrazów niediagonalnych do różnic wyrazów leżących na przekątnej głównej są znacznie mniejsze od jedności $\left(\frac{A_{ik}}{A_{ii}-A_{kk}} \ll 1\right)$.

Kryterium 2) będziemy na razie traktowali jako kryterium o charakterze empirycznym. Dokładniejsze sprecyzowanie tego kryterium będzie podane w dalszym ciągu pracy.

2. Niech dana będzie dowolna symetryczna macierz nieosobliwa A. Istnieje taka macierz ortogonalna, przy pomocy której można sprowadzić macierz A do postaci diagonalnej ([5] str. 289). Oznaczmy tę macierz diagonalną przez D. Wyrazami leżącymi na przekątnej głównej macierzy D są wartości własne macierzy A, które oznaczymy przez λ_i. Jeśli O^{-1} będzie macierzą odwrotną do macierzy O (przy czym O^{-1} jest równocześnie macierzą transponowaną względem O, czyli $O^{-1} = O_T$), to

$$A = O^{-1} . D . O \tag{2.1}$$

skąd następnie:

$$A^{-1} = (O^{-1}.D.O)^{-1} = O^{-1}.D^{-1}.O \tag{2.2}$$

Macierz ortogonalną O, dla której Det. O = +1, $|O| \neq 0$ można przedstawić w postaci szeregu macierzowego: ([6] str.21)

$$O = \exp \Phi = I + \Phi + \frac{1}{2!}\Phi^2 + \frac{1}{3!}\Phi^3 + \dots \tag{2.3}$$

oraz macierz odwrotną

$$O^{-1} = \exp(-\Phi) = I - \Phi + \frac{1}{2!}\Phi^2 - \frac{1}{3!}\Phi^3 + \dots \tag{2.4}$$

gdzie:

Φ - macierz skośno-symetryczna,
I - macierz jednostkowa.

Dowodzi się ([7] - str. 97), że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\Phi^n$ jest zbieżny dla dowolnej macierzy Φ. Relacje zatem (2.1) i (2.2) można napisać w postaci

$$A = \exp(-\Phi) . D . \exp \Phi \tag{2.5}$$

$$A^{-1} = \exp(-\Phi) . D^{-1} . \exp \Phi \tag{2.6}$$

3. Przejdźmy teraz do rozpatrywania macierzy A określonych w punkcie 1. Wykażemy, że macierz A może być napisana w postaci

$$A = D - \Phi D + D\Phi \tag{3.1}$$

gdzie D jest pewną macierzą diagonalną, zaś Φ jest macierzą skośno-symetryczną,

Oznaczmy wyrazy macierzy A przez A_{ik}
macierzy D przez λ_i
macierzy Φ przez φ_{ik} ($\varphi_{ik} = 0$ dla $i = k$, $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$)

Przyjmujemy, że macierz A jest postaci

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdot & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

macierz D

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

macierz Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{12} & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & 0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Równanie (3.1) prowadzi do równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ A_{n1} & & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & (\lambda_1-\lambda_2)\varphi_{12} & \dots & (\lambda_1-\lambda_n)\varphi_{1n} \\ (\lambda_2-\lambda_1)\varphi_{21} & \lambda_2 & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ (\lambda_n-\lambda_1)\varphi_{n1} & \cdot & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie równania (3.5) sprowadza się do rozwiązania układu równań

$$\begin{aligned} A_{ii} &= \lambda_i \\ A_{ik} &= (\lambda_i - \lambda_k)\varphi_{ik} \\ A_{ki} &= (\lambda_k - \lambda_i)\varphi_{ki} = A_{ik} \end{aligned} \tag{3.6}$$

skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lambda_i &= A_{ii} \\ \varphi_{ik} &= \frac{A_{ik}}{\lambda_i-\lambda_k} = \frac{A_{ik}}{A_{ii}-A_{kk}} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Stwierdzamy zatem, że macierz symetryczna A daje się zawsze przedstawić w postaci (3.1) i to w sposób jednoznaczny. Z założenia dla macierzy A wynika, że elementy φ_{ik} są znacznie mniejsze od jedności. Tego rodzaju macierze często występują w zagadnieniach statyki.

Oznaczmy przez M macierz symetryczną, której wartościami własnymi są $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ (n^2 - ilość wyrazów macierzy).

Macierz tę przedstawimy w postaci (2.1) przyjmując macierz ortogonalną w postaci (2.3), gdzie ϕ jest macierzą utworzoną z elementów φ_{ik}.

Macierz M można więc przedstawić w postaci (2.5). Przy $\varphi_{ik} \ll 1$ z pewnym przybliżeniem można przyjąć

$$\begin{aligned} \exp(-\Phi) &\cong I - \Phi \\ \exp \Phi &\cong I + \Phi \end{aligned} \tag{3.8}$$

Podstawiając do (2.5) i pomijając kwadraty elementów wobec jedności otrzymujemy

$$M \cong (I-\Phi)D(I+\Phi) \cong D-\Phi D+D\Phi = A \tag{3.9}$$

Wobec powyższego można również napisać

$$A^{-1} \cong M^{-1} \tag{3.10}$$

Przedstawiając prawą stronę (3.10) zgodnie z (2.6) otrzymujemy w ramach przyjętego przybliżenia

$$A^{-1} \cong (I-\Phi)D^{-1}(I+\Phi) \cong D^{-1}-\Phi D^{-1}+D^{-1}\Phi \tag{3.11}$$

Połóżmy

$$A_p^{-1} \overset{df}{=} D^{-1} - \Phi D^{-1} + D^{-1}\Phi \tag{3.12}$$

definiując A_p^{-1} jako przybliżoną postać macierzy odwrotnej do macierzy A.

Ze wzoru (3.12), przyrównując do siebie odpowiednie wyrazy macierzy otrzymujemy

$$\begin{aligned} A_{pii}^{-1} &= \frac{1}{\lambda_i} \\ A_{pik}^{-1} &= \left(\frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_k}\right)\varphi_{ik} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Podstawiając prawe strony równań (3.7) do (3.1) otrzymujemy ostatecznie przybliżone wartości elementów macierzy odwrotnej

$$
\begin{aligned}
A^{-1}_{pii} &= \frac{1}{A_{ii}} \\
A^{-1}_{pik} &= -\frac{A_{ik}}{A_{ii} \cdot A_{kk}} \qquad (\text{dla} \quad i \neq k)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

4. Celem oceny dokładności przybliżenia macierzy A^{-1} macierzą A_p^{-1} utwórzmy iloczyn

$$
A \cdot A_p^{-1} = I + \Delta \tag{4.1}
$$

w którym wyrazy macierzy Δ mają postać

$$
\Delta_{ii} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ik}^2}{A_{ii} \cdot A_{kk}} = -\frac{1}{A_{ii}} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{ik}^2}{A_{kk}} \quad \text{dla } i \neq k
$$

$$
\Delta_{ik} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^{n} \frac{A_{ik} \cdot A_{kj}}{A_{kk} \cdot A_{jj}} = -\frac{1}{A_{jj}} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}}^{n} \frac{A_{ik} \cdot A_{kj}}{A_{kk}} \quad \text{dla } i \neq j
$$

Jeżeli $A^{-1} \equiv A_p^{-1}$ wówczas $\Delta = 0$. Wynika stąd, że macierz określa odchyłkę jaką popełniamy zastępując macierz A^{-1} przez A_p^{-1}.

Celem jej oszacowania połóżmy

$$
\begin{aligned}
\nu_1 &= \max \left| \frac{A_{ik} \cdot A_{kj}}{A_{ii} \cdot A_{jj}} \right| \quad \binom{k \neq i}{k \neq j} \\
\nu_2 &= \max \frac{A_{ik}^2}{A_{ii} \cdot A_{kk}} \quad (i \neq k)
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

oraz oznaczmy przez ν większą z dwóch z powyższych wartości.

Oznaczmy następnie

$$k = n^2 \nu \tag{4.3}$$

gdzie n^2 jest ilością wyrazów macierzy A.
Wprowadźmy normę macierzy Δ ([1] str. 85) kładąc

$$\|\Delta\| = \max_i \sum_{k=1}^{n} |\Delta_{ik}| \tag{4.4}$$

Zgodnie z (4.2) i (4.3) zachodzi

$$\|\Delta\| < k \tag{4.5}$$

przy czym niech $k < 1$.
W oparciu o (4.1) i (4.5) możemy teraz oszacować normę różnicy macierzy A_p^{-1} i A^{-1}

$$\begin{gathered} \left\| A_p^{-1} - A^{-1} \right\| = \left\| -A^{-1} \cdot \Delta \right\| = \left\| -A_p^{-1} (I-\Delta)^{-1} \cdot \Delta \right\| \leqslant \\ \leqslant \left\| A_p^{-1} \right\| \cdot \left\| (I-\Delta)^{-1} \right\| \cdot \|\Delta\| \leqslant \left\| A_p^{-1} \right\| \frac{k}{1-k} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Oznaczając symbolem δ wielkości błędu dopuszczalnego napiszemy

$$\left\| A_p^{-1} \right\| \frac{n^2 \nu}{1 - n^2 \nu} \leqslant \delta \tag{4.7}$$

przyjmując jako normę macierzy A_p^{-1} ([1] str. 53), wielkość

$$\left\| A_p^{-1} \right\| = \max_i \sum_{k=1}^{n} \left| A_{pik}^{-1} \right|$$

Rozpatrywane macierze A muszą spełniać nierówność

$$n^2 \nu < 1. \tag{4.8}$$

Z (4.8) wynika, że $\nu < \frac{1}{n^2}$

co jest warunkiem koniecznym przynależności macierzy do klasy A.

5. Jeśli warunek (4.7) nie będzie spełniony, należy obliczyć elementy macierzy A^{-1} z żądaną dokładnością, sposobem iteracyjnym. Proces ten, to proces "k o r y g o w a n i a" ele mentów macierzy odwrotnych ([1] str. 84-87).

Przekształcając bowiem (4.1) otrzymujemy:

$$A^{-1} = A_p^{-1}(I+\Delta)^{-1} = A_p^{-1}(I-\Delta+\Delta^2-\Delta^3 + \ldots) \tag{5.1}$$

Szereg powyższy jest zbieżny, gdyż zgodnie z (4.5) $\|\Delta\| < 1$ Gdy $\|\Delta\| \ll 1$ proces iteracyjny jest szybkozbieżny i często praktycznie wystarczy wziąć:

$$A^{-1} \cong A_p^{-1} (I - \Delta) \tag{5.2}$$

Ponieważ elementy macierzy $(I - \Delta)$ obliczyć można zgodnie z (4.1) wg schematu

$$I - \Delta = 2I - A.A_p^{-1} \tag{5.3}$$

więc (5.2) można napisać w postaci

$$A^{-1} \cong A_p^{-1} (2I - A.A_p^{-1}) \tag{5.4}$$

gdzie wyrażenie po prawej stronie uznać można za drugie przybliżenie macierzy A^{-1}.

6. Przykład. Obliczyć macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A podanym wyżej sposobem. Błąd dopuszczalny $\delta = 6\%$

$$A = \begin{bmatrix} 8,97 & -1,88 & 0,41 & -0,43 \\ -1,88 & 21,74 & -0,23 & -0,55 \\ 0,41 & -0,23 & 8,68 & -0,61 \\ -0,43 & -0,53 & -0,61 & 11,61 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując wzory (3.14) otrzymujemy

$$A_p^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1115 & 0,0097 & -0,0052 & 0,0041 \\ 0,0097 & 0,0460 & 0,0012 & 0,0025 \\ -0,0052 & 0,0012 & 0,1152 & 0,0061 \\ 0,0041 & 0,0025 & 0,0061 & 0,0861 \end{bmatrix}$$

Szacujemy błąd wg relacji w punkcie 4.

$$\vartheta = \frac{1.88^2}{8,97 \cdot 21,74} = 0,0181$$

$$k = 4^2 \cdot 0,0181 = 0,29 < 1,0$$

$$\left\| A_p^{-1} \right\| = \max_i \sum_{k=1}^{4} \left| A_{pik}^{-1} \right| = 0,1305$$

$$0,1305 \frac{0,29}{1 - 0,29} = 0,0535 < \delta = 0,06$$

Gdybyśmy żądali większej dokładności, należałoby skorygować elementy macierzy odwrotnej.
Np. biorąc drugie przybliżenie otrzymujemy wg wzoru (5.3)

$$I - \Delta = \begin{bmatrix} 1,0208 & 0,0062 & 0,0042 & 0,0014 \\ 0,0062 & 1,0202 & -0,0060 & 0,0086 \\ 0,0042 & -0,0060 & 1,0061 & -0,0016 \\ 0,0014 & 0,0086 & -0,0016 & 1,0067 \end{bmatrix}$$

i ostatecznie wg (5.4)

$$A^{-1} \cong \begin{bmatrix} 0,1139 & 0,0099 & -0,0047 & 0,0044 \\ 0,0099 & 0,0470 & 0,0009 & 0,0027 \\ -0,0047 & 0,0009 & 0,1159 & 0,0059 \\ 0,0044 & 0,0027 & 0,0059 & 0,0867 \end{bmatrix}$$

Wg schematu jedynego dzielenia uzyskano

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1140 & 0,0099 & -0,0048 & 0,0044 \\ 0,0099 & 0,0469 & 0,0010 & 0,0026 \\ -0,0048 & 0,0010 & 0,1159 & 0,0060 \\ 0,0044 & 0,0026 & 0,0060 & 0,0867 \end{bmatrix}$$

LITERATURA

[1] FADDIEJEWA L.N.: Metody numeryczne algebry liniowej (tłum. z rosyjsk.) PWN-Warszawa 1955.

[2] ЕФИМОВ Н.В.: Квадратичные формы и матрицы физматгиз, Москва 1962.

[3] DOWGIRD Z.: Krakowiany. PWN Warszawa 1955.

[4] BECKENBACH F.: Nowoczesna matematyka dla inżynierów (tłum. z ang.) PWN-Warszawa 1962.

[5] BIRKHOFF G., MAC LANE S.: Przegląd algebry współczesnej (tłum. z ang.) PWN-Warszawa 1960.

[6] DUDLEY E. Littlewood, The theory of group characters and matrix representations of groups. Oxford 1950.

[7] ГАНТМАХЕР Ф.Р.: Теория матриц, москва 1954.

[8] WOŹNIAK Cz.: Statyka rozgałęzionych przestrzennych rurociągów samokompensacyjnych. Rozprawy Inżynierskie, 4.10(1962)

ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ НАХОЖДЕНИЯ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

Содержание

В статье представляется упрощенный способ обращения матриц. Предполагается что рассматриваемые матрицы симметричны, положительно определённые и что элементы главной диягонали в несколько раз больше остальных.

THE APPROXIMATE METHOD OF RECIEVING THE INVERSE FOR SOME CLASS OF SYMMETRICAL MATRICES

Summary

In the paper the approximate method of recieving the inverse of symmetrical matrix has been described. The positive definite matrices are considered, having the components on the main diagonal much greater then other ones.