ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: BUDOWNICTWO z. 13 Nr kol. 125

WOJCIECH SITKO

KILKA UWAG O OBLICZANIU BELEK NA PODPORACH SPRĘŻYSTYCH SPOSOBEM MACIERZOWYM

Streszczenie. W niniejszej pracy przedstawiony jest macierzowy sposób obliczania belki na podporach sprężystych poddanej działaniu dowolnego obciążenia. W pracy przeanalizowano pręt o licznych pośrednich podwieszeniach spełniających rolę podparć sprężystych. Prócz krótkiego wprowadzenia w zagadnienie, wyprowadzenia podstawowych równań i wzorów podane są tablice zestawiające wyniki (do pięciu przęseł włącznie) dla przypadku pręta o EJ=const., stałym rozstawie podpór i dla obciążenia równomiernie rozłożonego. Przytoczone są również wzory umożliwiające rozszerzenie wyników na dowolną dalszą ilość przęseł.

1. UWAGI WSTĘPNE

Na przestrzeni ostatnich kilkunastu lat zaznaczył się wyraźny wzrost zainteresowania macierzowymi formami obliczeń. Jedną z przyczyn, jest m.in. łatwość ułożenia programów dla maszyn cyfrowych w zagadnieniach ujętych w taką formę zapisu. Z autorów, którzy współcześnie interesowali się zastosowaniem macierzowych sposobów obliczeń w statyce wymienić należy przede wszystkim J.A. ARGYRISA (cykl jego prac do tej pory stanowi jedną z najobszerniejszych omówień problemu) oraz S. KELSEYA, K. MARGVERRE'A, K.K. PONOMARIOWA, S. FALKA i in.

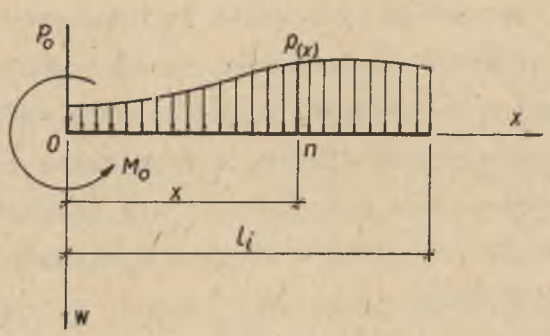
W niniejszym artykule przedstawiony jest macierzowy sposób obliczania belki na podporach sprężystych poddanej działaniu dowolnego obciążenia.

W pracy przeanalizowano pręt o licznych pośrednich podwieszeniach spełniających rolę podparć sprężystych. Prócz krótkiego wprowadzenia w zagadnienie, wyprowadzenia podstawowych równań i wzorów podane są tablice zestawiające wyniki (do pięciu przęseł włącznie) dla przypadku pręta o EJ = const stałym rozstawie podpór i dla obciążenia równomiernie rozłożonego. Przytoczone są również wzory umożliwiające rozszerzenie wyników na dowolną dalszą ilość przęseł. Ilustrację omówionych zagadnień stanowi przykład liczbowy.

2. KRÓTKIE WPROWADZENIE W ZAGADNIENIE

Całkując równanie różniczkowe zginania 2.1. dla odcinka pręta (rys. 1)

$$w^{IV} = \frac{p(x)}{EJ} \quad (EJ = \text{const na długości } l_i) \qquad (2.1)$$



Rys. 1

i podstawiając dla $x = 0$:

$$EJw^{IV} = P_o; \quad EJ\,w^{II} = M_o; \quad w^{I} = \varphi_o; \quad w = w_o \qquad (2.2)$$

otrzymymy układ równań 2.3:

$$\begin{aligned} P &= L^{(1)}\,p + P_o \\ M &= L^{(2)}\,p + P_o x + M_o \\ EJ\,\varphi &= L^{(3)}\,p + P_o \frac{x^2}{2!} + M_o x + EJ\,\varphi_o \\ EJ\,w &= L^{(4)}\,p + P_o \frac{x^3}{3!} + M_o \frac{x^2}{2!} + EJ\,\varphi_o x + EJ\,w_o \end{aligned} \qquad (2.3)$$

gdzie $L^{(n)}\,p \overset{\text{det}}{\underset{1}{=}} \underbrace{\int\cdots\int}_{n\ \text{razy}} p(x)\,dx^n$

W zapisie macierzowym relacja przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P \\ M \\ \varphi \\ w \end{bmatrix}_n = [S]_i \begin{bmatrix} 1 \\ P \\ M \\ \varphi \\ w \end{bmatrix}_o \qquad (2.4)$$

S_i jest tzw. macierzą przęsła (5 x 5). Jedność w 2.4. wprowadzona jest celem ułatwienia dalszych obliczeń.

Elementy macierzy przęsła są wielkościami o różnych mianach; dla ich ujednolicenia PONOMARIOW [7] np. wyraża wielkości obliczeniowe przez tzw. umowne jednostki porównawcze (np. $l = 2$ m dla długości $P = 100$ T dla sił) MARGUERRE [5] sprowadza wszystkie wielkości do jednej porównawczej przez odpowiednie przemnożenie przez l i EJ, otrzymując macierz przęsła (transmisji) składającą się z elementów niemianowanych. MARGURRE zastosował tę modyfikację przy obliczaniu drgań belek (zagadnienie jednorodne)

3. PODSTAWOWE RÓWNANIA I WZORY MACIERZOWEGO SPOSOBU OBLICZEŃ

Sprowadzając wszystkie wielkości układu równań 2.3 do jednej porównawczej oraz po wprowadzeniu wielkości $\xi = \frac{x}{l}$ otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi l \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2!}\xi^2 & \xi & 1 & 0 \\ \frac{1}{3!}\xi^3 & \frac{1}{2!}\xi^2 & \xi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi l \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{l}\bar{L}^{(1)}{}_p \\ \frac{1}{l^2}\bar{L}^{(2)}{}_p \\ \frac{1}{l^3}\bar{L}^{(3)}{}_p \\ \frac{1}{l^4}\bar{L}^{(4)}{}_p \end{bmatrix} \cdot \frac{pl^4}{EJ} \tag{3.1}$$

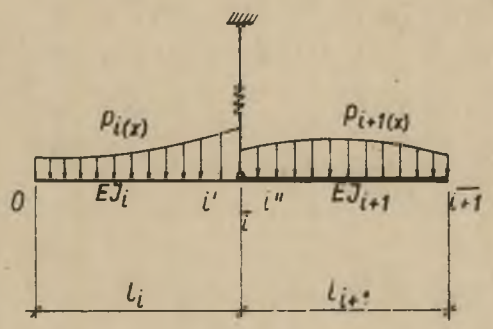
gdzie $\bar{L}^{(n)}{}_p$ - operacja n - krotnego całkowania funkcji obciążenia dla $p = 1$.

W relacji 3.1 trójkątną macierz (4 x 4) nazywać będziemy m a c i e r z ą t r a n s m i s j i T, a kolumnę - k o l u m n ą o b c i ą ż e n i a $\{q\}$. Dla uproszczenia dalszych zapisów kolumny zawierające wielkości P, M, φ i w w przekrojach n i o nazywać będziemy w e k t o r a m i

$$\{W\}_n \quad i \quad \{W\}_o$$

$$\{W\}_n = T\,\{W\}_o + \{q\} \tag{3.2}$$

Przy podparciu pośrednim relacja 3.2 ulegnie rozszerzeniu.



Rys. 2

Porównując $\{W\}_{i'}$ i $\{W\}_{i''}$ otrzymamy:

$$W_{i''} = W_{i'}$$

$$\varphi_{i''} = \varphi_{i'} \tag{3.3}$$

$$M_{i''} = M_{i'}$$

$$P_{i''} = P_{i'} - \Delta P_i$$

gdzie $P_i = C \cdot W_i$; C - jest współczynnikiem charakteryzującym sprężystą podporę

Aby uczynić zadość warunkom 3.3 wystarczy pomnożyć prawą stronę 3.1. (mnożenie z lewej) przez macierz zwaną dalej m a c i e r z ą p r z e j ś c i a R

$$R = \begin{bmatrix} \gamma_i & 0 & 0 & \alpha_i & \beta_i \\ 0 & \gamma_i & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

gdzie

$$\alpha_i = -\frac{C_i\, l^3}{EJ}; \quad \beta_i = \frac{EJ}{EJ_{i+1}}; \quad \gamma_i = \frac{EJ_i}{EJ_{i+1}}$$

EJ - przyjęta sztywność porównawcza

Związek pomiędzy $\{W\}_{i+1}$ i $\{W\}_o$ przyjmie postać (kolejno wyprowadzając)

$$\{W\}_{i'} = T_i \{W\}_o + \{q\}_i$$

$$\{w\}_{i''} = R_i\ T_i\ \{w\}_o + R_i\ \{q\}_i$$

$$\{w\}_{i+1} = T_{i+1}\ R_i\ T_i\ \{w\}_o + T_{i+1}\ R_i\ \{q\}_i + \{q\}_{i+1} \quad (3.5)$$

Dla belki n - przesłowej otrzymamy:

$$\{w\}_n = \left(Tn \prod_{i=n-1}^{i=1} R_i\ T_i\right)\{w\}_o + \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\prod_{j=n}^{j=i+1} T_j\ R_{j-1}\right)\{q\}_i + \{q\}_n \quad (3.6)$$

T_i, T_2 ... T_n określamy przyjmując odpowiednio układy współrzędnych x, w, dla każdego przęsła oddzielnie. (W przytoczonych obliczeniach za początek układu współrzędnych obrano lewy skrajny punkt przęsła).

Przedstawiona zależność (3.6) umożliwia nam po wykorzystaniu warunków brzegowych (jeżeli n i o są przekrojami przy skrajnych podporach) określić $\{w\}_o$ a następnie wyznaczyć w dowolnym przekroju $\{w\}$. Określając $\{w\}_o$ <u>niezależnie od stopnia statycznej niewyznaczalności układu</u> otrzymamy do rozwiązania układ dwóch równań liniowych o dwóch niewiadomych (por. [2], [3], [7]). Przyczyną tego jest odpowiednio zazębiający się układ równań dzięki czemu następuje kolejna eliminacja niewiadomych.

Dla układu o l = const; p = const zestawiono tablice współczynników (jako funkcji α) a_{ij} i b_{i1} macierzy A i kolumny B, które otrzymujemy z wymnożenia (3.6) dla belek dwu, trój, cztero i pięcioprzęsłowej.

Analizując wartości poszczególnych a_{ij} i b_{i1} można wykazać prawidłowość ich budowy (3.7) w przypadku zmiany ilości

przęseł belki. Prawidłowość ta jest słuszna poczynając od przejścia z belki pięcio do sześcioprzęsłowej. Przyjmując za podstawę wartości ${}_5a_{ij}$ i ${}_5b_{i1}$ (belka pięcioprzęsłowa) współczynniki dla belki n - przęsłowej można zapisać ($n \geqslant 5$)

$$ {}_na_{ij} = {}_5a_{ij} \left[\frac{48+\alpha}{6} - \frac{1}{\frac{\alpha}{6.37} + \frac{440}{37.37}} \right]^{n-5} \tag{3.7} $$

$$ {}_nb_{i1} = {}_5b_{i1} \left[\frac{48+\alpha}{6} - \frac{1}{\frac{\alpha}{6.37} + \frac{440}{37.37}} \right]^{n-5} $$

Pomimo pewnego przybliżenia otrzymywane wartości ${}_na_{ij}$ i ${}_nb_{i1}$ są wystarczająco dokładne dla praktycznego stosowania.

4. UWAGI KOŃCOWE I WNIOSKI

1. Rozdzielenie macierzy przęsła na macierz transmisji i kolumnę obciążenia umożliwiło przedstawienie operacji obliczeniowych w schematycznym i przejrzystym ujęciu. Pierwszy człon (3.6) ilustruje zagadnienie jednorodne pozostałe zależne są od obciążenia przęsłowego.

2. Operacja obliczania sprowadza się do prostych w działaniu dodawania i mnożenia macierzy.

3. Przy symetrii układu, macierz $T_n \prod_{i=n-1}^{i=1} R_i T_i$ jest symetryczna.

4. W układach w których $\alpha \geqslant 40 \div 50$ (podparcia sprężyste o bardzo małej podatności) należy prowadzić obliczenia na maszynie z możliwie dużą ilością miejsc znaczących.

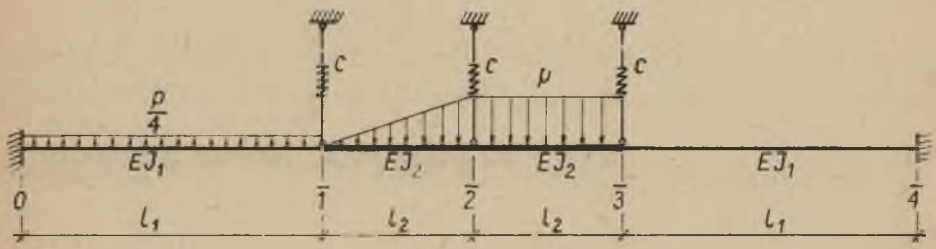
5. Operując symbolem α aż do momentu uzyskania końcowych wyników istnieje możliwość analizy granicznych przypadków współczynnika sprężystego podparcia ($\alpha \to \infty$ podpory niepodatne $\alpha \to 0$ belka bez podparć pośrednich).

Przykład 1

Wyznaczyć oddziaływania, obliczyć wartości momentów gnących i sił tnących a następnie określić przemieszczenia i kąty obrotu w charakterystycznych punktach podanego schematu statycznego belki (rys. 3).

Dane: $l_1 = l_4 = 6{,}0$ m; $l_2 = l_3 = 3{,}0$ m; $p = 4{,}0$ T/mb; $E = 2{,}1 \cdot 10^6$ KG/cm^2; $J_1 = 7590$ cm^4; $c = 2361{,}33$ kG/cm; $\alpha = -\frac{c\, l_2^3}{EJ_1} = -4{,}0$; $\frac{J_2}{J_1} = 2{,}0$

Jako wielkości porównawcze przyjęto: $l = l_2$; $EJ = EJ_1$



Rys. 3

Macierze transmisji (3.1)

$$T_2=T_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1\end{bmatrix};\quad T_1=T_4=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

dla $\xi=1$ dla $\xi=\frac{l_1}{l_2}=2$

Macierze przejścia (wg 3.4)

$$R_1=\begin{bmatrix}0{,}5 & 0 & 0 & \alpha\cdot 0{,}5\\ 0 & 0{,}5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad R_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \alpha\cdot 0{,}5\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad R_3=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & \alpha\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Kolumny obciążenia (wg 3.1):

$$\{q\}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}\cdot\frac{p\,l^4}{EJ};\quad \{q\}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{1}{12}\\ \frac{1}{48}\end{bmatrix}\cdot\frac{p\,l^4}{EJ};\quad \{q\}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{12}\\ \frac{1}{48}\\ \frac{1}{240}\end{bmatrix}\cdot\frac{p\,l^4}{EJ}$$

Relacja podstawowa (wg 3.6)

$$\{w\}_4 = T_4 R_3 T_3 R_2 T_2 R_1 T_1 \{w\}_o + T_4 R_3 T_3 R_2 T_2 R_1 T_1 \{q\}_1 +$$

$$+ T_4 R_3 T_3 R_2 \{q\}_2 + T_4 R_3 \{q\}_3$$

otrzymany związek przedstawia zależność pomiędzy wielkościami w przekroju początkowym 0 i końcowym 4. Wartości współczynników zestawione są jako funkcja α oraz (niżej) dla $\alpha = -4$

Podstawiając warunki brzegowe:

na podporze 0: $w_o = 0$; $\varphi_o = 0$

" " 4: $w_4 = 0$;, $\varphi_4 = 0$

do relacji jw. otrzymamy

$$P_o = -4{,}0817 \text{ T}; \quad M_o = 7{,}2504 \text{ Tm}$$

$$P_4 = +0{,}9476 \text{ T}; \quad M_4 = +4{,}1091 \text{ Tm}$$

(P_4 i M_4 są wielkościami w przekroju przypodporowym z lewej strony)x)

x) Przeprowadzono również analizę przypadku dla $\alpha \to \infty$ otrzymując $P_o = -3{,}097$ T; $M_o = +3{,}2736$ Tm a więc wartości jak dla belki czteroprzęsłowej o podporach niepodatnych.

$$
\begin{bmatrix} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}_4
=
\begin{bmatrix}
1 + \frac{159}{12}\alpha + \frac{191}{144}\alpha^2 + \frac{1}{108}\alpha^3 & \frac{53}{4}\alpha + \frac{89}{48}\alpha^2 + \frac{1}{72}\alpha^3 & 9\alpha + \frac{7}{4}\alpha^2 + \frac{1}{72}\alpha^3 & 3\alpha + \frac{5}{8}\alpha^2 + \frac{1}{144}\alpha^3 \\
-31,3704 & -24,2222 & -8,8889 & 0,8889 \\
6 + \frac{197}{12}\alpha + \frac{199}{72}\alpha^2 + \frac{1}{54}\alpha^3 & 1 + \frac{119}{4}\alpha + \frac{93}{24}\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 & 25\alpha + \frac{11}{3}\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 & \cdot \\
-83,2963 & -77,7778 & -43,1111 & \\
\frac{15}{2} + \frac{2215}{48}\alpha + \frac{209}{72}\alpha^2 + \frac{1}{54}\alpha^3 & 5 + \frac{737}{16}\alpha + \frac{49}{12}\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 & \cdot & \cdot \\
-107,6574 & -115,6944 & & \\
\frac{52}{3} + \frac{5261}{144}\alpha + \frac{37}{18}\alpha^2 + \frac{1}{27}\alpha^3 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-87,2623 & & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \alpha^3} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \\ \varphi \\ \varphi \end{bmatrix}_0
+
\begin{bmatrix}
2 + \frac{79}{30}\alpha + \frac{521}{2880}\alpha^2 + \frac{1}{864}\alpha^3 \\
-5,7130 \\
\frac{20}{3} + \frac{301}{48}\alpha + \frac{241}{1440}\alpha^2 + \frac{1}{432}\alpha^3 \\
-12,5557 \\
\frac{267}{40} + \frac{487}{64}\alpha + \frac{283}{720}\alpha^2 + \frac{1}{432}\alpha^3 \\
-13,3176 \\
\frac{1062}{80} + \frac{6101}{960}\alpha + \frac{733}{480}\alpha^2 + \frac{1}{648}\alpha^3 \\
-7,9991
\end{bmatrix}
\frac{\Delta\alpha^4}{4!}
$$

Wielkości w przekroju 1 (z lewej strony podpory 1)

$$\{W\}_{1'} = T_1 \{W\}_0 + \{q\}_1$$

$P_1 = +1{,}9183$ T; $M_1 = +0{,}7603$ Tm

$EJ\varphi_1 = +6{,}0324$; $W_1 = +2{,}3570$ cm

Siła w zawieszeniu sprężystym:

$$P_1 = S_1 = C \cdot W_1 = 0{,}4633 \text{ T}$$

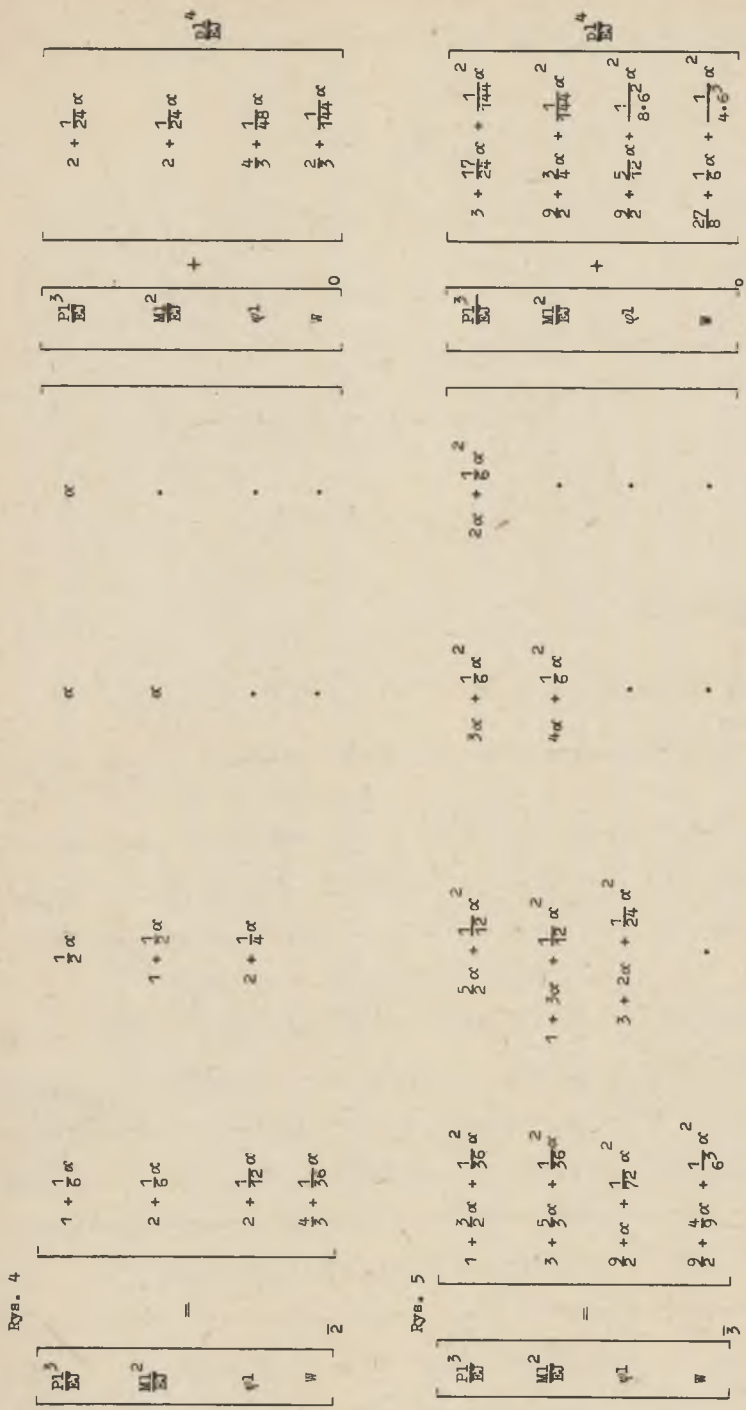
a stąd:

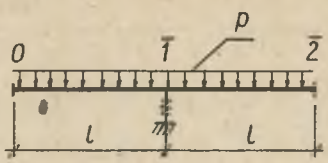
$$P_1 = P_1 = S_1 = -3{,}6473 \text{ T}$$

podobnie obliczamy $\{W_2\}$, i $\{W_3\}$,

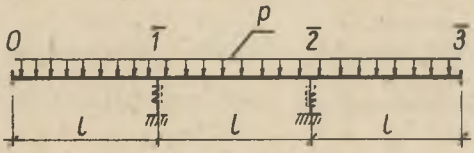
Zestawienie wyników:

	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
S_i T	-4,0817	-5,5656	-7,4844	-5,9207	-0,9476
P_i' T	-	+1,9183	+2,3527	+6,8683	-
P_i' T	-4,0817	-3,6473	-5,1317	+0,9476	+0,9476
M_i Tm	+7,2505	+0,7603	-4,1816	-1,5766	+4,1091
φ_i rad	0	+0,003784	+0,000763	-0,00442	0
W cm	0	+2,3570	+3,1696	+2,5074	0

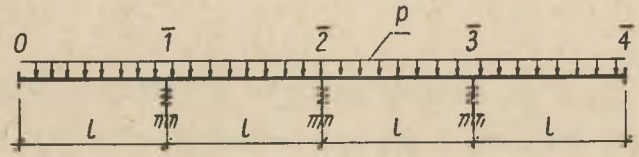

Rys. 4
Rys. 5



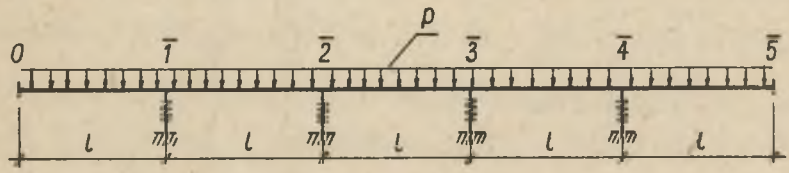
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Wyr. 6

$$
\begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi_l \\ w \end{bmatrix}_4
=
\begin{bmatrix}
1 + 6\alpha + \frac{17}{36}\alpha^2 + \frac{1}{6^3}\alpha^3 & 7\alpha + \frac{13}{12}\alpha^2 + \frac{1}{72}\alpha^3 & 6\alpha + \frac{11}{6}\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 & 3\alpha + \frac{5}{3}\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 \\
4 + \frac{23}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{6^3}\alpha^3 & 1 + 10\alpha + \frac{7}{6}\alpha^2 + \frac{1}{72}\alpha^3 & 10\alpha + 2\alpha^2 + \frac{1}{36}\alpha^3 & \cdot \\
8 + \frac{17}{3}\alpha + \frac{5}{18}\alpha^2 + \frac{1}{2\cdot 6^3}\alpha^3 & 4 + \frac{17}{2}\alpha + \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{144}\alpha^3 & \cdot & \cdot \\
\frac{32}{3} + \frac{59}{18}\alpha + \frac{1}{9}\alpha^2 + \frac{1}{6^4}\alpha^3 & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi_l \\ w \end{bmatrix}_0
+
\begin{bmatrix}
4 + \frac{49}{12}\alpha + \frac{25}{144}\alpha^2 + \frac{1}{4\cdot 6^3}\alpha^3 \\
8 + \frac{29}{6}\alpha + \frac{11}{72}\alpha^2 + \frac{1}{4\cdot 6^3}\alpha^3 \\
\frac{32}{3} + \frac{77}{24}\alpha + \frac{7}{72}\alpha^2 + \frac{1}{8\cdot 6^3}\alpha^3 \\
\frac{32}{3} + \frac{59}{36}\alpha + \frac{1}{27}\alpha^2 + \frac{1}{4\cdot 6^4}\alpha^3
\end{bmatrix}
\frac{Pl^4}{EJ}
$$

Wyr. 7

$$
\begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi_l \\ w \end{bmatrix}_5
=
\begin{bmatrix}
1 + \frac{50}{3}\alpha + \frac{15}{4}\alpha^2 + \frac{25}{6^3}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^4} & 15\alpha + \frac{27}{4}\alpha^2 + \frac{7}{36}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{2\cdot 6^3} & 10\alpha + \frac{19}{2}\alpha^2 + \frac{19}{36}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^3} & 4\alpha + \frac{23}{3}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^3} \\
5 + \frac{73}{3}\alpha + \frac{17}{4}\alpha^2 + \frac{13}{108}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^4} & 1 + 25\alpha + \frac{95}{12}\alpha^2 + \frac{11}{36}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{2\cdot 6^3} & 20\alpha + \frac{23}{2}\alpha^2 + \frac{5}{9}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^3} & \cdot \\
\frac{22}{2} + \frac{65}{3}\alpha + \frac{191}{72}\alpha^2 + \frac{7}{108}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{2\cdot 6^4} & 5 + \frac{69}{2}\alpha + \frac{125}{24}\alpha^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{4\cdot 6^3} & \cdot & \cdot \\
\frac{125}{6} + \frac{140}{9}\alpha + \frac{91}{72}\alpha^2 + \frac{2}{81}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6^5} & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \frac{Pl^3}{EJ} \\ \frac{Ml^2}{EJ} \\ \varphi_l \\ w \end{bmatrix}_0
+
\begin{bmatrix}
5 + \frac{53}{4}\alpha + \frac{29}{16}\alpha^2 + \frac{11}{8\cdot 6^2}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{4\cdot 6^4} \\
\frac{25}{2} + \frac{235}{12}\alpha + \frac{287}{144}\alpha^2 + \frac{17}{2\cdot 6^3}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{4\cdot 6^4} \\
\frac{125}{6} + \frac{185}{12}\alpha + \frac{341}{288}\alpha^2 + \frac{18}{4\cdot 6^3}\alpha^3 + \frac{\alpha^4}{6\cdot 6^4} \\
\frac{625}{24} + \frac{409}{36}\alpha + \frac{455}{4\cdot 6^3}\alpha^2 + \frac{5}{3\cdot 6^3}\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{4\cdot 6^3}
\end{bmatrix}
\frac{Pl^4}{EJ}
$$

LITERATURA

[1] ARGYRIS J.H.: Die Matrizentheorie die Statik, Ingenieur Archiv, XXVI 1958, str. 95-109.

[2] FALK S.: Die Berechnung von Rahmentragwerken mit Hilfe von Übertragungsmatrizen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 37, Nr 7/8 - 1957.

[3] FALK S.: Die Berechnung offener Rahmentragwerke nach den Reduktionsverfahren, Ingenieur Arch, XXVI 1958. Str. 61-80.

[4] FALK S.: Die Berechnung geschlossener Rahmentragwerke nach dem Reduktionsverfahren, Ingenieur Arch, XXVI 1958. Str. 95-109.

[5] MARGUERRE Ł.: Matrices of Transmission in Beam Problems. Progress in Solid Mechanics-Volume I str. 61-82; I.N. Sneddon and R. Hill Editors North - Holland Publishing Company, 1960.

[6] PESTEL E.: Andwendung der Deltamatrizen auf inhomagene Probleme. Ingenieur Archiw., XXVII - 1959 str. 250-254.

[7] PONOMARIOW K.K.: Obliczanie belek ciągłych metodą macierzową. Inżynieria i Budownictwo XVII - 1960, Nr 1 i 2.

[8] ГАНТМАХЕР Ф.Р.: Теория матриц.

Praca złożona została w redakcji 6.1.1964 r.

ПРИМЕНЕНИЯ КАСАЮЩИЕСЯ РАСЧЁТА МАТРИЧНЫМ СПОСОБОМ БАЛОК НА УПРУГИХ ОПОРАХ

Р е з ю м е

Статья занимаемся матричным способом расчёта балок на упругих опорах под действием произбольной нагрузки. Проанализировано стержень с многими промежуточными подвесками, исполняющими роль упругих опор. Кроме краткого введения в вопрос, вывода основных уравнений и формул, составлено результаты расчёта (до пяти пролётов включительно) для случая EJ = const одинаковых пролётов и равномерно распределённой нагрузки. Приведено формулы позваляющие обобщить результаты на произвольное число пролётов.

ZUR BERECHNUNG DES BALKEN AUF ELASTISCHEN STÜTZEN MIT HILFE DER MATRIZEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Diese Arbeit betrachtet über der Berechnung des beliebig mechanisch belasteten Balken auf elastischen Stützen mit Hilfe des Matrizenkalküls. Nach der Einleitung folgen die theoretischen Grundlagen, Gleichungen und Gesetze, zunächst die Tabellen, in den die Resultate für durch eine Streckenlast belasteten Träger auf 2, 3, 4, 5 und 6 Stützen, mit konstanter Biegefestigkeit EI und konstanter Feldlänge zusammengestellt sind. Die Resultate kann man zur Lösungen beliebigen Durchlaufträger auf elastischen Stützen benutzen.