ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: BUDOWNICTWO z. 13 Nr kol. 125

JÓZEF ŚLIWA

ANALIZA STATYCZNA KONSTRUKCJI SMUKŁYCH O PRZEKROJU PEŁNYM W CHWILI SWOBODNEGO WYWROTU

1. WSTĘP

Swobodnym wywrotem konstrukcji, nazywamy wychylenie jej z pionowego położenia równowagi wokół punktu podparcia, który znajduje się w dolnym końcu. Wywrót ten wywołany jest tylko siłą ciężkości. Ogólną teorię mechaniki konstrukcji smukłych w chwili swobodnego wywrotu przedstawiono w poprzedniej pracy[x)].

Wyprowadzone tam zależności i wzory analityczne zostaną tu zastosowane i wykorzystane do analizy mechaniki słupów o przekroju pełnym, a mianowicie słupa o przekroju poprzecznym prostokątnym oraz słupa o przekroju kołowym jednostajnie zbieżnym. Przyjęto, że słupy do chwili złamania są sztywne również w płaszczyźnie wywrotu.

---

x) J. Śliwa: Z mechaniki swobodnego wywrotu konstrukcji smukłych. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Budownictwo z. 8, 1962.

2. SŁUP PEŁNY O PRZEKROJU POPRZECZNYM PROSTOKĄTNYM

Układ słupa i wymiary przyjęto zgodnie z rysunkiem 2-1. $a = const, b = const$ - przekrój poprzeczny słupa, h - wysokość słupa.

Charakterystyki ustroju będą wynosiły:

Moment bezwładności względem osi wywrotu O

$$J = \frac{1}{3} a b h^3$$

Promień bezwładności

$$k = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Rzędna środka ciężkości słupa

$$d = \frac{1}{2} h$$

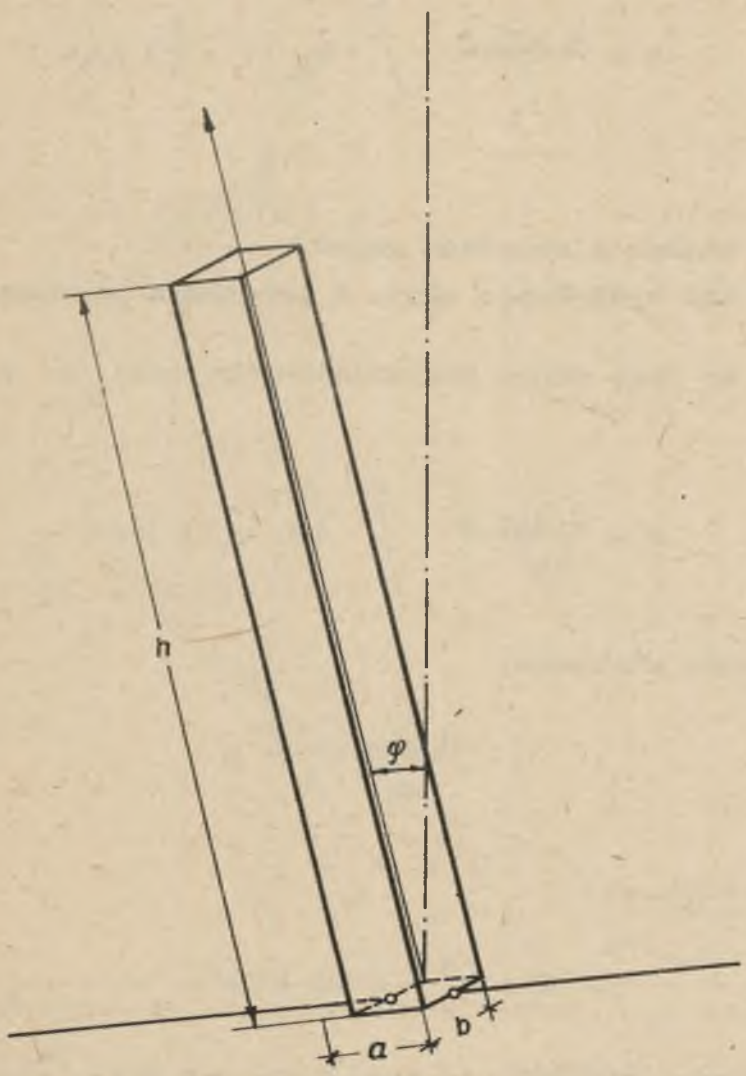
Rzędna środka uderzenia:

$$l = \frac{2}{3} h$$

Powierzchnia przekroju poprzecznego słupa oraz moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej są wielkościami stałymi i wynoszą odpowiednio:

$$F_z = a b = const$$

$$I_z = \frac{1}{12} a b^3 = const$$



Rys. 2-1. Słup pełny o przekroju prostokątnym

Siłę poprzeczną wyraża wzór ogólny:

$$Q = \frac{G \sin\varphi}{V} \int_z^h F_z \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi \qquad (2.1)$$

gdzie

G, V - ciężar i objętość słupa,

φ - kąt wychylenia słupa z położenia pionowego.

Wstawiając do tego wzoru przynależne wartości na F_z, V i l otrzymamy

$$Q = \frac{G \sin\varphi}{2h^2} \int_z^h (2h - 3\xi)\, d\xi \qquad (2.2)$$

Po scałkowaniu otrzymamy

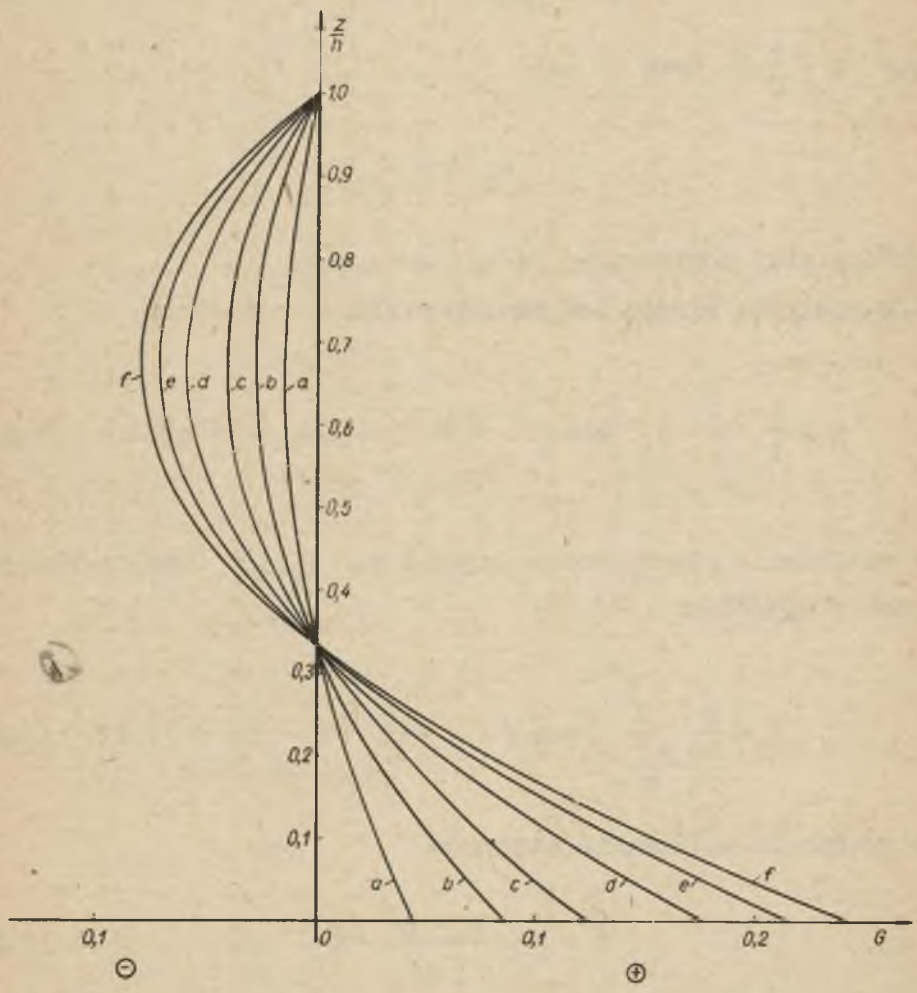
$$Q = \frac{G \sin\varphi}{4h^2} \cdot H \qquad (2.3)$$

gdzie oznaczono

$$H = h^2 - 4\,hz + 3z^2$$

Siła poprzeczna przyjmie wartość maksimum przy $z = 0$, gdzie wynosi

$$Q_{z=0} = \frac{1}{4}\, G \sin\varphi$$



Rys. 2-2. Wykresy sił poprzecznych słupa podczas swobodnego wywrotu a - dla $\varphi = 10^o$, b - dla $\varphi = 20^o$, c - dla $\varphi = 30^o$ d - dla = 45°, e - dla $\varphi = 60^o$, f - dla $\varphi = 75^o$

Przy $z = \frac{2}{3} h$ siła poprzeczna osiąga minimum i wynosi

$$Q_{(z = \frac{2}{3} h)} = - \frac{1}{12} G \sin \varphi$$

Przy $z = \frac{1}{3} h$ oraz $z = h$

$$Q_z = 0$$

Wykresy siły poprzecznej podaje rys. 2-2.
Siłę podłużną wyraża zaś wzór postaci

$$N = \frac{G}{V} \int_z^h F_z \left[\cos \varphi - \frac{2\xi}{l} (1 - \cos \varphi)\right] d\xi \qquad (2.4)$$

Po wstawieniu odpowiednich wyrażeń na F_z i V wzór ten można napisać w postaci

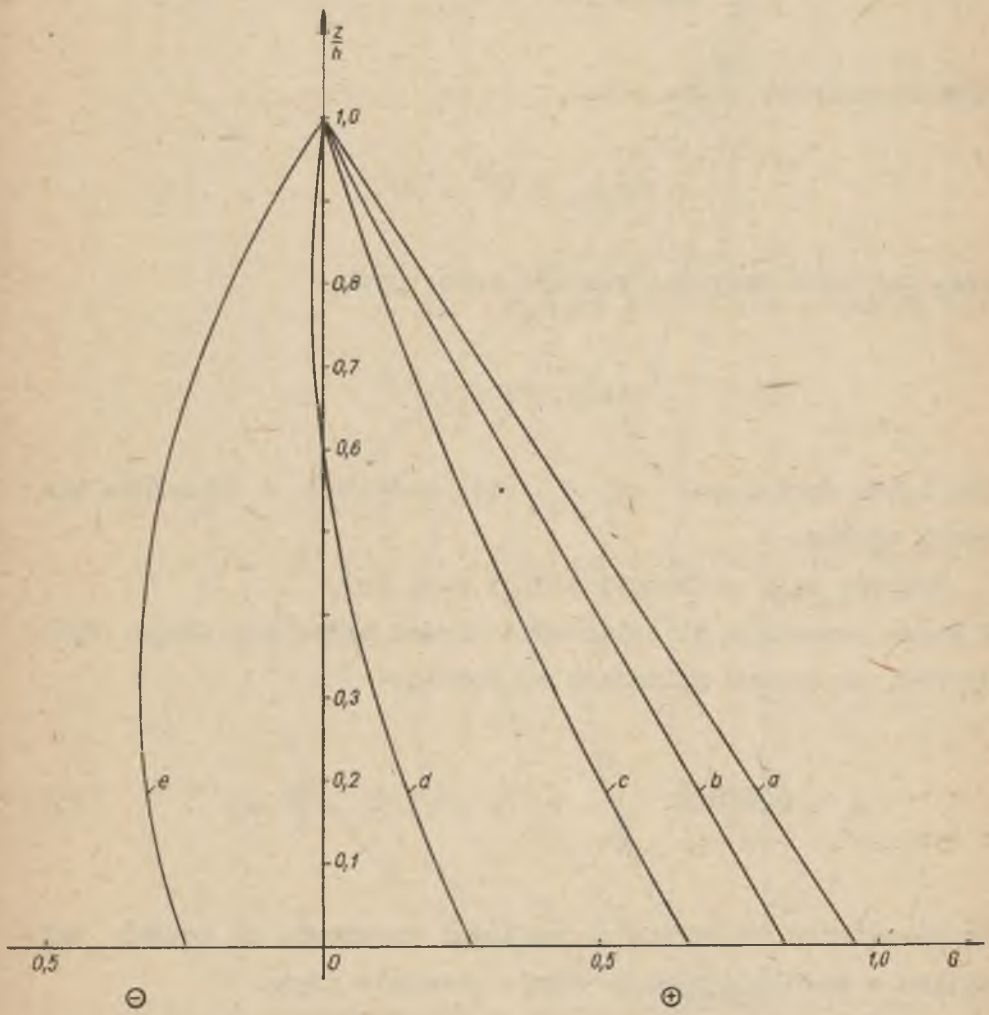
$$N = \frac{G}{h} \int_z^h \left[\cos \varphi - 3 \frac{\xi}{h} (1 - \cos \varphi)\right] d\xi \qquad (2.5)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymamy

$$N = G \cdot \frac{h - z}{2 h^2} \cdot \Phi \qquad (2.6)$$

gdzie

$$\Phi = (5h + 3z) \cos \varphi - 3 (h + z)$$



Rys. 2-3. Wykresy sił podłużnych słupa podczas swobodnego wywrotu a - dla $\varphi = 10^{o}$, b - dla $\varphi = 20^{o}$, c - dla $\varphi = 30^{o}$, d - dla $\varphi = 45^{o}$, e - dla $\varphi = 60^{o}$

W podstawie słupa siła podłużna wynosi

$$N_{z=0} = \frac{G}{2h} (5h \cos\varphi - 3h)$$

Przy wychyleniu słupa o kąt

$$\varphi = \varphi_o = 53^o\ 7'30''$$

siła podłużna przyjmie wartość zero, czyli

$$N_{(z=0,\ \varphi = \varphi_o)} = 0$$

Dla kątów wychylenia $\varphi > \varphi_o$ siła podłużna N przyjmie wartości ujemne.

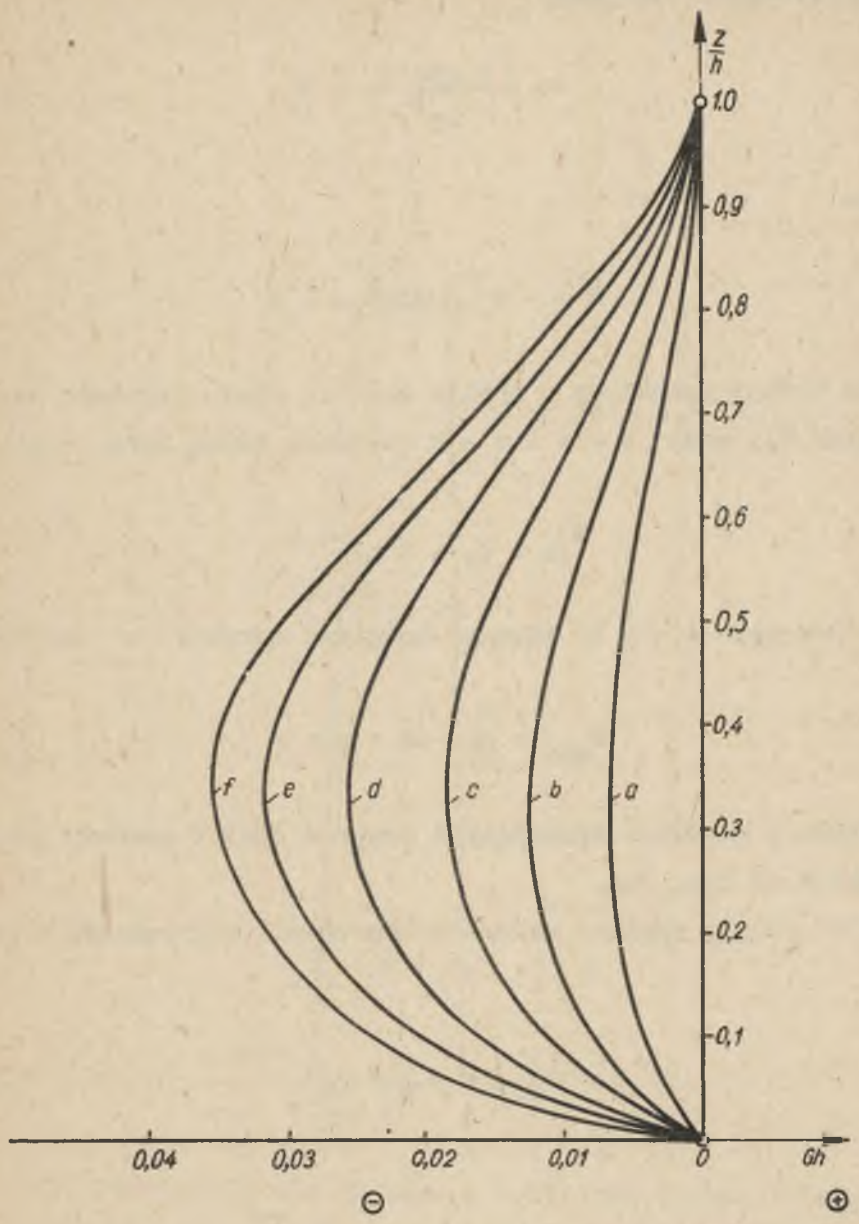
Wykresy siły podłużnej podaje rys. 2-3.

W końcu pozostaje do obliczenia moment zginający słupa. Ogólny wzór na moment zginający ma postać:

$$M_z = \frac{G \sin\varphi}{V} \int_x^h F_z (z - \xi) \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) d\xi \qquad (2.7)$$

Po wstawieniu odpowiednich wartości wyrażenie na moment zginający w dowolnym punkcie słupa przyjmie zapis

$$M = \frac{G \sin\varphi}{2h^2} \int_z^h \left[2h (z - \xi) - 3 z (z - \xi)\right] d\xi \qquad (2.8)$$



Rys. 2-4. Wykresy momentów zginających słupa podczas swobodnego wywrotu a - dla $\varphi = 10^o$, b - dla $\varphi = 20^o$, c - dla $\varphi = 30^o$, d - dla $\varphi = 45^o$, e - dla $\varphi = 60^o$, f - dla $\varphi = 75^o$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$M = \frac{G \sin \varphi}{4h^2} \cdot H^* \tag{2.9}$$

gdzie

$$H^* = - z^3 + 2hz^2 - h^2 z$$

Zatem moment zginający w chwili wywrotu słupa przyjmie na obu końcach tj. przy $z = 0$ i $z = h$ wartość równą zero, czyli

$$M_{(z = 0,\ z = h)} = 0$$

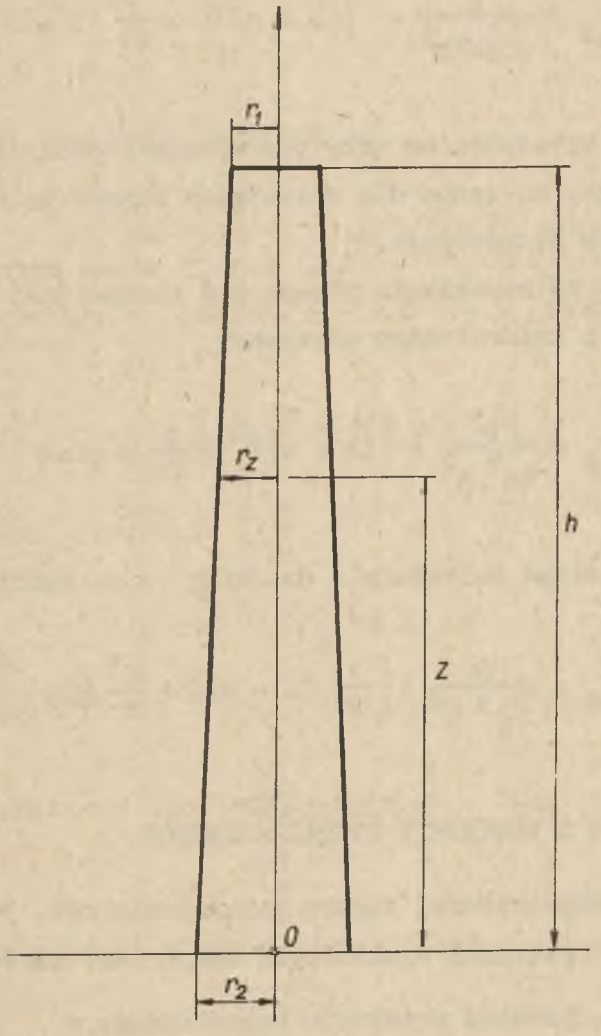
Przy rzędnej $z = \frac{1}{3} h$ wystąpi maksimum momentu, o wartości

$$M_{max} = \frac{1}{27} Gh \cdot \sin \varphi \tag{2.10}$$

Wykresy momentów zginających słupa w chwili wywrotu przedstawione na rys. 2-4.

Z kolei możemy napisać wzory na naprężenia w przekroju z relacji

$$\sigma_{1,2} = \sigma_N + \sigma_M \tag{2.11}$$



Rys. 3-1. Przekrój słupa pełnego w kształcie stożka ściętego

W przypadku rozpatrywanego słupa w przekroju prostokątnym otrzymamy

$$\sigma_{1,2} = \frac{G}{2\,ab\,h^2} \cdot \left[(h - z)\Phi + \frac{3}{2b} H^* \sin\varphi\right] \qquad (2.12)$$

Napisane wyrażenia na siły poprzeczne i podłużne oraz moment zginający są ważne dla wszystkich słupów pełnych o stałym przekroju poprzecznym.

Wyrażenia na naprężenia ulegną zaś nieznacznej modyfikacji np. dla słupa kwadratowego otrzymamy

$$\sigma_{1,2} = \frac{G}{2a^2\,h^2} \cdot \left[(h - z)\Phi \mp \frac{3}{2a} H^* \sin\varphi\right] \qquad (2.13)$$

W przypadku słupa walcowego o średnicy 2 r będzie

$$\sigma_{1,2} = \frac{G}{\pi r^2\,h^2} \cdot \left[\frac{1}{2}\,(h - z)\Phi + \frac{H^*}{r} \sin\varphi\right] \qquad (2.14)$$

3. SŁUP PEŁNY O KSZTAŁCIE STOŻKA ŚCIĘTEGO

Wymiary tu rozpatrywanej figury przedstawia rys. 3-1. Charakterystyka wielkości wymiarowych słupa jest następująca:

r_1 - promień przekroju poprzecznego w wierzchołku słupa,

$r_2 = nr_1$ - promień podstawy,

h - wysokość.

Promień przekroju poprzecznego na wysokości z od podstawy wynosi

$$r_z = r_1 \left[n + (1 - n) \cdot \frac{z}{h} \right] \tag{3.1}$$

Powierzchnia przekroju poprzecznego:

$$F_z = \pi r_1^2 \left[n^2 + 2n (1 - n) \cdot \frac{z}{h} + (1 - n)^2 \cdot \frac{z^2}{h^2} \right] \tag{3.2}$$

Objętość słupa:

$$V = \frac{1}{3} \pi r_1^2 h (1 + n + n^2) \tag{3.3}$$

Rzędna środka ciężkości:

$$d = \frac{1}{4} h L$$

gdzie

$$L = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + n + 1}$$

Moment bezwładności słupa o gęstości masy γ względem osi wywrotu wynosi

$$J = \frac{1}{30} \pi r_1^2 h^3 \gamma (n^2 + 3n + 6) \tag{3.4}$$

Promień bezwładności słupa:

$$k^2 = \frac{1}{10} h^2 \cdot \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + n + 1}$$

Skąd dalej

$$l = \frac{k^2}{d} =$$

$$\frac{2h}{5} \cdot \frac{n^2 + 3n + 6}{n^2 + 2n + 3}$$

Obecnie możemy przystąpić do obliczenia wielkości statycznych scharakteryzowanego słupa w chwili swobodnego wywrotu.

Korzystając z wyrażeń (2.1), (3.2) i (3.3) wzór wyznaczający wartość siły poprzecznej przyjmie zapis

$$Q = \frac{3\,G \sin\varphi}{h\,W} \cdot \int_z^h \left[n^2 + 2n\,(1-n) \cdot \frac{\xi}{h} + (1-n)^2 \cdot \frac{\xi^2}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5n^2 R}{2h} \cdot \xi - \frac{5n(1-n)W}{h^2} \cdot \xi^2 - \frac{5(1-n)^2 R}{2h^3} \cdot \xi^3 \right] d\xi \qquad (3.5)$$

gdzie oznaczono

$$R = \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 + 3n + 6}$$

$$W = n^2 + n + 1$$

Po scałkowaniu oraz wprowadzeniu dalszych oznaczeń jak:

$$A = \frac{1 - n}{h}$$

$$B = n^2 + 2n + 3$$

wyrażenie przyjmie postać

$$Q = \frac{G \sin\varphi}{W} \cdot \left\{ W - \frac{5}{8} R B - \frac{3}{h} \left[n^2 z + \right.\right.$$

$$+ \left(n A - \frac{5h^2}{4h} \cdot R\right) \cdot z^2 + \left(\frac{1}{3} A^2 - \frac{5n}{H} A R\right) z^3 -$$

$$\left.\left. - \frac{5}{8h} A^2 R z^4 \right]\right\} \qquad (3.6)$$

Siłę podłużną wyraża wzór ogólny postaci (2.4).

Podstawiając do tego wzoru odpowiednie charakterystyki słupa otrzymamy

$$N = \frac{3 G \cos\varphi}{h W} \cdot \int_z^h (n^2 + 2nA\xi + A^2 \xi^2)\, d\xi +$$

$$+ \frac{15 G (1 - \cos\varphi)}{h^2 \cdot W} R \cdot \int_z^h (n^2 \xi + 2nA \xi^2 + A^2 \xi^3)\, d\xi$$

(3.7)

Po wykonaniu całkowania wzór na siłę podłużną przyjmie zapis

$$N = \frac{3\,G\cos\varphi}{h\cdot W}\left(\frac{1}{3}h\,W - n^2 z + nAz^2 - \frac{1}{3}A^2 z^2\right) +$$

$$- \frac{15\,G\,(1-\cos\varphi)}{h^2\,W}\cdot R\cdot\left(\frac{1}{12}h^2 B - \frac{1}{2}n^2 z^2 - \frac{2}{3}nAz^3 +\right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}A^2 z^4\right) \tag{3.8}$$

Moment zginający uwzględniając wzór (2.7) można zapisać w postaci

$$M_z = \frac{3\,G\sin\varphi}{h\,W}\int_z^h \left[\left(n^2 + 2nA\xi + A^2\xi^2 - \frac{5n^2}{2h}\xi^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{5n}{h}AR\xi^2\right)\cdot(z-\xi)\right]d\xi$$

Wykonując całkowanie otrzymamy

$$M_z = \frac{3\,G\sin\varphi}{h\,W}\left\{\frac{1}{3}h\left(\frac{5}{8}B\,R - W\right)\cdot z + \frac{1}{2}n^2 z^2 +\right.$$

$$+ \frac{1}{3h}\left[n(1-n) - \frac{5}{4}n^2 R\right]z^3 + \frac{1}{12\,h^2}\left[(1-n)^2 - 5n\,(1-n)\,R\cdot\right]z^4 +$$

$$\left. - \frac{1}{8h^3}\cdot(1-n)^2 R\,z^5\right\}$$

Wartości naprężeń obliczymy wg wzoru (2.11) uwzględniając odpowiednie charakterystyki słupa.

СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГИБКИХ КОНСТРУКЦИЙ ПОЛНОГО СЕЧЕНИЯ В МОМЕНТЕ СВОБОДНОГО ОПРИКИДЫВАНИЯ

Р е з ю м е

На основе общей теорий механики гибких конструкций представленней раньше[1], подано статический анализ колонны в моменте свободного оприкидывания: Приводится решения для колонны прямоугольного и круглого сечения.

STATICAL ANALYSIS OF SLENDER STRUCTURES OF PLAIN CROSS SECTION AT THE MOMENT OF FREE FALLING

S u m m a r y

On behalf of the general theory of mechanics of slender struktures presented in the previous paper[1], the statical analysis of freely falling solid columns of uniform cross section is given.

The detailed analysis for the column of rectangular and circular cross section is presented.