

LESZEK LITWINOWICZ

W SPRAWIE NUMERYCZNEGO ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ
RÓWNOWAGI GRANICZNEJ OŚRODKA GRUNTOWEGO

Streszczenie. W pracy przedstawiono zastosowanie w mechanice gruntów, przy rozwiązywaniu równań równowagi granicznej ośrodka gruntowego, metody numerycznego całkowania quasiliniovych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego, opartej na aproksymacji nieliniowej. Rozwiązanie numeryczne tego zagadnienia podano dla pewnej formy równań równowagi granicznej płaskiego stanu odkształcenia.

1. WSTĘP

Szczególnie ważnym zagadnieniem teoretycznej mechaniki gruntów jest problematyka rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodków gruntowych. Dla przypadku płaskiego stanu odkształcenia są to równania składające się z dwu równań różniczkowych wyrażających warunek równowagi rozpatrywanego ośrodka

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\gamma,$$

(1)

oraz równania

$$\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}{(\sigma_x + \sigma_y + 2k \operatorname{ctg} \varrho)^2} = \sin^2 \varrho, \quad (2)$$

wyrażającego warunek równowagi granicznej tego ośrodka.

W równaniach (1), (2) przyjęto oznaczenia:

k - współczynnik spójności gruntu,

ϱ - kąt tarcia wewnętrznego,

γ - ciężar objętościowy gruntu.

Rozwiązanie układu równań (1) i (2) z uwzględnieniem odpowiednich warunków brzegowych jest rozwiązaniem, metodą teorii równowagi granicznej, odpowiedniego zagadnienia nośności granicznej półprzestrzeni gruntowej.

1.2. Równania wyjściowe

Rozwiązania układu równań (1) i (2) wygodnie jest poszukiwać w postaci [1], [3]:

$$\sigma_x = \sigma(1 + \sin \varrho \cos 2\theta) - k \operatorname{ctg} \varrho,$$

$$\sigma_y = \sigma(1 - \sin \varrho \cos 2\theta) - k \operatorname{ctg} \varrho, \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \sigma \sin \varrho \sin 2\theta$$

gdzie

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + k \operatorname{ctg} \varrho,$$

zaś

ϑ - kąt zawarty między kierunkiem głównym "1" a osią y .

Zarówno σ jak i ϑ są funkcjami zmiennych x, y .

Rozwiązując równania (1) i (2) z uwzględnieniem (3) oraz uwzględnieniem zależności

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2},$$

możemy otrzymać [1] następującą postać rozpatrywanego układu

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} \cos(\vartheta + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \cos(\vartheta + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} \sin(\vartheta + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \\ + \sin(\vartheta + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = - \frac{\gamma \cos(\vartheta - \mu)}{2\sigma \cos 2\mu}, \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} \cos(\vartheta - \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \cos(\vartheta - \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} \sin(\vartheta - \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \\ - \sin(\vartheta - \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\gamma \cos(\vartheta + \mu)}{2\sigma \cos 2\mu}. \end{aligned}$$

Układ równań (4) dalej będziemy nazywali układem wyjściowym.

Równania (4) charakteryzują się tym, że współczynniki przy pochodnych cząstkowych poszukiwanych funkcji są zależne od x , y, σ oraz θ . W literaturze tego typu równania nazywa się równaniami quasilineowymi.

W rozpatrywanym przypadku równania (4) są równaniami typu hiperbolicznego [3]. Rozwiązanie tych równań dla danego zagadnienia brzegowego uzyskuje się metodą charakterystyk [3]. Stosując tę metodę dla równań układu wyjściowego (4) otrzymujemy następujące równania charakterystyk [1]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta + \mu),$$

$$\operatorname{tg} 2\mu d\sigma + 2\sigma d\theta + \gamma dx + \gamma \operatorname{tg} 2\mu dy = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta - \mu),$$

$$\operatorname{tg} 2\mu d\sigma - 2\sigma d\theta - \gamma dx + \gamma \operatorname{tg} 2\mu dy = 0. \quad (5')$$

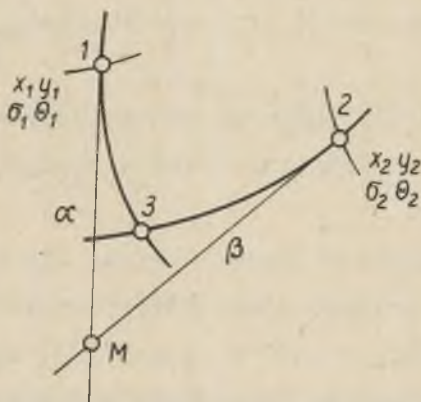
Pierwsze z równań (5) i (5') zwane są charakterystykami¹⁾ zaś drugie - zależnościami różniczkowymi zachodzącymi wzdłuż tych charakterystyk.

Dla odróżnienia pierwszą rodzinę charakterystyk będziemy znawali przez α , drugą - przez β .

¹⁾ Charakterystyki jak wiadomo [3] są liniami poślizgu w masie wie gruntowym.

1.3. Metoda pierwszego przybliżenia

Zastępując w równaniach (5) i (5') pochodne odpowiednimi ilorazami różnicowymi uzyskuje się następujące wzory rekurencyjne służące do numerycznego rozwiązywania układu wyjściowego (4) dla danych jak na rys. 1.



Rys. 1

$$x_M = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)},$$

$$y_M = y_2 + (x_M - x_2) \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu),$$

$$\sigma_M = \frac{2\sigma_1\sigma_2 \operatorname{tg}2\mu + \gamma\sigma_1[(x_M - x_2) - (y_M - y_2) \operatorname{tg}2\mu] - \gamma\sigma_2[(x_M - x_1) + (y_M - y_1) \operatorname{tg}2\mu]}{(\sigma_1 + \sigma_2) \operatorname{tg}2\mu},$$

$$\theta_M = \theta_1 + \frac{(\sigma_1 - \sigma_M) \operatorname{tg}2\mu - \gamma[(x_M - x_1) + (y_M - y_1) \operatorname{tg}2\mu]}{2\sigma_1}.$$

(6)

Wzory rekurencyjne (6) wynikają z aproksymacji linii charakterystyk ich stycznymi na odcinkach odpowiadających odległościom między węzłami tworzącymi siatkę.

Ponieważ na ogół linie charakterystyk są liniami krzywymi, w związku z tym metoda ta zwana metodą pierwszego przybliżenia [2], [3], daje często wyniki obarczone błędami (różnice we współrzędnych punktów S i M , patrz rys. 1). Błędy te nie zawsze są do uniknięcia nawet przy znacznym zagęszczeniu siatki charakterystyk.

W literaturze [1], [2] znane są metody poprawiania wyników obliczeń uzyskanych na podstawie wzorów analogicznych do wzorów rekurencyjnych (6).

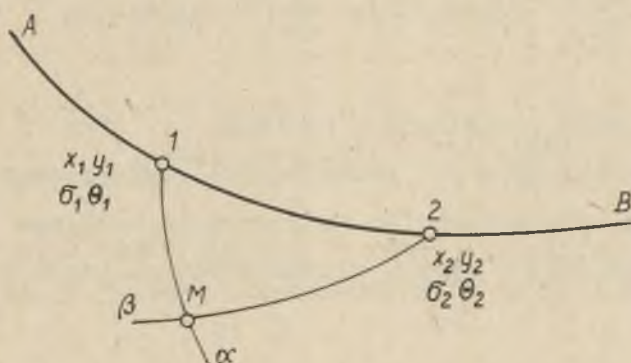
Poniżej w rozdziale 2 podane zostaną dla układu wyjściowego (4) inne wzory rekurencyjne, których wyprowadzenie uzyskano w oparciu o podaną w 1957 r. przez D.J. PANOWA [2] uogólnioną metodę numerycznego całkowania quasiliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego. Zastosowanie tej metody do równań równowagi granicznej gruntu, zapisanych w formie układu wyjściowego (4), w niniejszej pracy oparte zostało na aproksymacji charakterystyk wielomianem utworzonym przez trzy pierwsze człony szeregu TAYLORA.

2. METODA APROKSYMACJI NIELINIOWEJ

Rozpatrzmy zagadnienie brzegowe typu CAUCHY'EGO co oznacza, że warunki brzegowe w postaci funkcji σ oraz θ zadane są na pewnej niecharakterystycznej krzywej AB (rys. 2).

W związku ze specyfiką zastosowanej metody, konstrukcję siatki przedstawiamy w dwu etapach, z których pierwszy polega

na obliczeniu początkowych punktów siatki linii charakterystyk, drugi zaś na obliczeniu pozostałych punktów.



Rys. 2

2.1. Wzory do obliczania początkowych punktów siatki

Zastosowanie przyjętej aproksymacji, narzuca następujące podstawowe wzory do obliczania współrzędnych x oraz y dowolnego z początkowych punktów siatki charakterystyk, np. punktu M (patrz rys. 2):

$$y_M = y_1 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_1^{\alpha} (X_M - X_1) + \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_1^{\alpha} \frac{(X_M - X_1)^2}{2},$$

$$y_M = y_2 + \left. \frac{dy}{dx} \right|_2^{\beta} (X_M - X_2) + \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_2^{\beta} \frac{(X_M - X_2)^2}{2}.$$

(7)

We wzorach (7) wartości $\left. \frac{dy}{dx} \right|_1^\alpha$, $\left. \frac{dy}{dx} \right|_2^\beta$ są znane. Na podstawie (5) i (5') otrzymujemy

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_1^\alpha = \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu); \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_2^\beta = \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu). \quad (8)$$

Wartości drugich pochodnych w punktach 1 oraz 2 otrzymamy różniczkując względem x równania (8). Wykorzystując ponadto układ równań wyjściowych (4) oraz warunki brzegowe (zapisane w postaci ogólnej) w wyniku odpowiednich obliczeń otrzymujemy

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_1^\alpha = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \left\{ \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1^{AB} - \frac{\Delta_4^{(1)}}{D(1)} [\xi_1 - \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu)] \right\}}{\cos^2 \theta_1 (1 - \operatorname{tg} \theta_1 \operatorname{tg} \mu)^2}, \quad (9)$$

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_2^\beta = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu) \left\{ \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_2^{AB} - \frac{\Delta_4^{(2)}}{D(2)} [\xi_2 - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)] \right\}}{\cos^2 \theta_2 (1 + \operatorname{tg} \theta_2 \operatorname{tg} \mu)^2}.$$

W równaniach (9) przyjęto następujące oznaczenia:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} [\sin(\theta + \mu) - \xi \cos(\theta + \mu)] [\sin(\theta + \mu) - \xi \cos(\theta + \mu)] \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} [\sin(\theta - \mu) - \xi \cos(\theta - \mu)] [-\sin(\theta - \mu) + \xi \cos(\theta - \mu)] \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$\Delta_4 = \left| \begin{array}{l} \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} [\sin(\theta+\mu) - \xi \cos(\theta+\mu)] \left[-\frac{1}{2\sigma} \left\{ \frac{\gamma \cos(\theta-\mu)}{\cos 2\mu} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma} [\sin(\theta-\mu) - \xi \cos(\theta-\mu)] \left[\frac{1}{2\sigma} \left\{ \frac{\gamma \cos(\theta+\mu)}{\cos 2\mu} - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{d\sigma}{dx} \Big|_{AB} \operatorname{tg} 2\mu \cos(\theta+\mu) \right\} - \frac{d\theta}{dx} \Big|_{AB} \cos(\theta+\mu) \right] \\ \left. \left. - \frac{d\sigma}{dx} \Big|_{AB} \operatorname{tg} 2\mu \cos(\theta-\mu) \right\} + \frac{d\theta}{dx} \Big|_{AB} \cos(\theta-\mu) \right] \end{array} \right| \quad (10'')$$

Przez ξ w równaniach (9), (10), i (10'') oznaczono wartości pierwszej pochodnej względem x funkcji opisującej krzywą nie charakterystyczną (krzywa AB na rys. 2), przez $\frac{d\sigma}{dx} \Big|_{AB}$, $\frac{d\theta}{dx} \Big|_{\theta}$ oznaczono wartości odpowiednio pochodnych funkcji σ oraz θ zadanych na tej krzywej¹⁾.

Wyznaczniki (10) i (10'') należy obliczać dla każdego z przyjętych punktów podziałowych na krzywej AB. Dla rozpatrywanego punktu M (rys. 2) wartość D i Δ_4 obliczamy w punktach 1 oraz 2.

¹⁾ Indeksy przy oznaczeniach odpowiadają numerom rozpatrywanych punktów na krzywej AB (rys. 2).

Wykorzystując przy rozwiązywaniu układu (7) przybliżoną metodę NEWTONA otrzymujemy ostatecznie dla pierwszego przybliżenia wartości x_M wyrażenie

$$x_M^* = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - x_2 \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}{\operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu)}.$$

Drugie przybliżenie ma postać

$$x_M^{**} = x_M^* + \epsilon, \quad (11)$$

gdzie

$$\epsilon^* = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_2 (x_M^* - x_2)^2 - \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_1 (x_M^* - x_1)^2}{2 \left[\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_1^\alpha (x_M^* - x_1) - \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_2^\beta (x_M^* - x_2) + \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_2 - \mu) \right]}.$$

Z porównania zależności (11) z wzorami (6) wynika, że wyrażenie na ϵ^* jest pierwszym przybliżeniem członu uwzględniającego nieliniowość linii charakterystyk w wartości współrzędnej x_M . Określenie wielkości jego wpływu jest możliwe do wykonania, jedynie w nawiązaniu do konkretnych warunków brzegowych.

Wzór na drugą współrzędną punktu M otrzymujemy bez trudności z równań (7).

Konstrukcja początkowych punktów siatki charakterystyk wymaga również obliczenia w każdym z tych punktów wartości funkcji σ oraz θ .

Ponieważ funkcje te wzdłuż charakterystyk α i β można traktować jako funkcje zmiennej x w związku z tym, przy przyjętej aproksymacji szeregiem TAYLORA, dla punktu M (patrz rys. 2) słuszne są następujące zależności:

$$\sigma_M = \sigma_1 + \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_1^\alpha (x_M - x_1) + \left. \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right|_1^\alpha \frac{(x_M - x_1)^2}{2},$$

$$\theta_M = \theta_1 + \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1^\alpha (x_M - x_1) + \left. \frac{d^2\theta}{dx^2} \right|_1^\alpha \frac{(x_M - x_1)^2}{2}.$$

Obliczenie występujących w wypisanych zależnościach, pochodnych funkcji σ i θ , polega na wykorzystaniu odpowiednich związków różniczkowych zachodzących wzdłuż rozpatrywanej rodziny charakterystyk. Stąd też wynika konieczność rozwiązania układu równań powstającego ze zróźniczkowania (względem zmiennych niezależnych x i y) układu wyjściowego (4) i uwzględnienia zależności wynikających z warunków brzegowych.

Wykomując wszystkie te czynności uzyskano ostatecznie poszukiwane wzory numeryczne w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_M = \sigma_1 + & \left\{ 2 \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_1^{AB} + (x_M - x_1) \left. \frac{d^2\sigma}{dx^2} \right|_1^{AB} - \frac{\Delta_2}{D} \left[2 \left(\xi_1 - \left. \frac{dy}{dx} \right|_1^\alpha \right) + \right. \right. \\ & + (x_M - x_1) \left(\left. \frac{d\xi}{dx} \right|_1 - \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_1^\alpha \right) \left. \right] \frac{(x_M - x_1)}{2} + \left[\left. \frac{dy}{dx} \right|_1^\alpha - \xi_1 \right] \left\{ 2 \Delta'_1 + \right. \\ & \left. + \Delta'_3 \left(\left. \frac{dy}{dx} \right|_1^\alpha + \xi_1 \right) \right\} \frac{(x_M - y_1)^2}{2 D'} , \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \theta_M = \theta_1 + & \left\{ 2 \frac{d\theta}{dx} \Big|_1^{AB} + (x_M - x_1) \frac{d^2\theta}{dx^2} \Big|_1^{AB} - \frac{\Delta_4}{D} \left[2 \left(\xi_1 - \frac{dy}{dx} \Big|_1^\alpha \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (x_M - x_1) \left(\frac{d\xi}{dx} \Big|_1 - \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_1^\alpha \right) \right] \right\} \frac{(x_M - x_1)}{2} + \left[\frac{dy}{dx} \Big|_1^\alpha - \xi_1 \right] \left\{ 2 \Delta'_2 \right. \\ & \left. + \Delta'_4 \left(\frac{dy}{dx} \Big|_1^\alpha + \xi_1 \right) \right\} \frac{(x_M - x_1)^2}{2 D'} . \end{aligned}$$

Występujące we wzorach (12) wartości $\frac{dy}{dx} \Big|_1^\alpha$ oraz $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_1^\alpha$ są znane na podstawie zależności (8) i (9).

Wartości $\frac{d\sigma}{dx} \Big|_1^{AB}$, $\frac{d\theta}{dx} \Big|_1^{AB}$ oraz $\frac{d^2\sigma}{dx^2} \Big|_1^{AB}$, i $\frac{d^2\theta}{d^2x} \Big|_1^{AB}$, jak również ξ oraz $\frac{d\xi}{dx} \Big|_1$ wynikają z warunków brzegowych. Oznaczają one odpowiednio, pochodne funkcji σ i θ zadanych na krzywej niecharakterystycznej AB oraz pochodne funkcji opisującej tę krzywą.

Wszystkie te wartości, jak również pozostałe wartości występujące we wzorach (12), dotyczą punktu 1 i należy je przyjąć mować jak dla tego punktu.

Wartości pozostałych użytych symboli we wzorach (12) oznaczają

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} [\sin(\theta_1 + \mu) - 2\xi_1 \cos(\theta_1 + \mu)] & [\sin(\theta_1 + \mu) - 2\xi_1 \cos(\theta_1 + \mu)] \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} [\sin(\theta_1 - \mu) - 2\xi_1 \cos(\theta_1 - \mu)] & [-\sin(\theta_1 - \mu) + 2\xi_1 \cos(\theta_1 - \mu)] \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \cos(\theta_1 + \mu) & \cos(\theta_1 + \mu) \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \cos(\theta_1 - \mu) & -\cos(\theta_1 - \mu) \\ -\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \cos(\theta_1 + \mu) & -\cos(\theta_1 + \mu) \\ -\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \cos(\theta_1 - \mu) & \cos(\theta_1 - \mu) \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \sin(\theta_1 + \mu) & \sin(\theta_1 + \mu) \\ \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\delta_1} \sin(\theta_1 - \mu) & -\sin(\theta_1 - \mu) \end{vmatrix} \quad (13)$$

zaś Δ'_1 , Δ'_2 , Δ'_3 oraz Δ'_4 są to wyznaczniki, które otrzymujemy z wyznacznika D' przez zastąpienie w nim kolumny odpowiadającej numerowi indeksu danego wyznacznika, następującą kolumną

$$\frac{\gamma}{2\sigma_1^2 \cos 2\mu} \left[U_1 \cos(\theta_1 - \mu) + U_2 \sigma_1 \sin(\theta_1 - \mu) \right] - \cos(\theta_1 + \mu) \left[\frac{\text{tg} 2\mu (s_1 - \sigma_1 v_1)}{2\sigma_1^2} + U_2 \frac{\Delta_4}{D} + v_2 \right] + \sin(\theta_1 + \mu) \left[\frac{R_1 \text{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} + (U_2)^2 \right];$$

$$\frac{-\gamma}{2\sigma_1^2 \cos 2\mu} \left[U_1 \cos(\theta_1 + \mu) + U_2 \sigma_1 \sin(\theta_1 + \mu) \right] - \cos(\theta_1 - \mu) \left[\frac{\text{tg} 2\mu (s_1 + \sigma_1 v_1)}{2\sigma_1^2} - U_2 \frac{\Delta_4}{D} - v_2 \right] + \sin(\theta_1 - \mu) \left[\frac{R_1 \text{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} - (U_2)^2 \right];$$

(14)

$$\frac{\gamma}{2\sigma_1^2 D \cos 2\mu} \left[\Delta_2 \cos(\theta_1 - \mu) + \Delta_4 \sigma_1 \sin(\theta_1 - \mu) \right] - \cos(\theta_1 + \mu)$$

$$\left[\frac{s_2 \text{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} + \left(\frac{\Delta_4}{D} \right)^2 \right] + \sin(\theta_1 + \mu) \left[\frac{R_2 \text{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} + U_2 \frac{\Delta_4}{D} \right];$$

$$\frac{-\gamma}{2\sigma_1^2 D \cos 2\mu} \left[\Delta_2 \cos(\theta_1 + \mu) + \Delta_4 \sigma_1 \sin(\theta_1 + \mu) \right] - \cos(\theta_1 - \mu)$$

$$\left[\frac{S_2 \operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} - \left(\frac{\Delta_4}{D} \right)^2 \right] + \sin(\theta_1 - \mu) \left[\frac{R_2 \operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma_1^2} - U_2 \frac{\Delta_4}{D} \right];$$

Gdzie

$$U_1 = \frac{d\sigma}{dx} \Big|_1^{AB} - \frac{\Delta_2}{D} \xi_1,$$

$$U_2 = \frac{d\theta}{dx} \Big|_1^{AB} - \frac{\Delta_4}{D} \xi_1,$$

$$V_1 = \frac{d^2\sigma}{dx^2} \Big|_1^{AB} - \frac{\Delta_2}{D} \frac{d\xi}{dx} \Big|_1,$$

$$V_2 = \frac{d^2\theta}{dx^2} \Big|_1^{AB} - \frac{\Delta_4}{D} \frac{d\xi}{dx} \Big|_1,$$
(15)

oraz

$$S_1 = \frac{\Delta_2}{D} \sigma_1 - (\pi)^2,$$

$$R_1 = U_1 \left(\sigma_1 U_2 + \frac{\Delta_2}{D} \right),$$

$$S_2 = \frac{\Delta_2}{D} \left(\sigma_1 \frac{\Delta_4}{D} - U_1 \right),$$

$$R_2 = \frac{\Delta_4}{D} \left(\sigma_1 U_1 + \frac{\Delta_4}{D} \right).$$
(15')

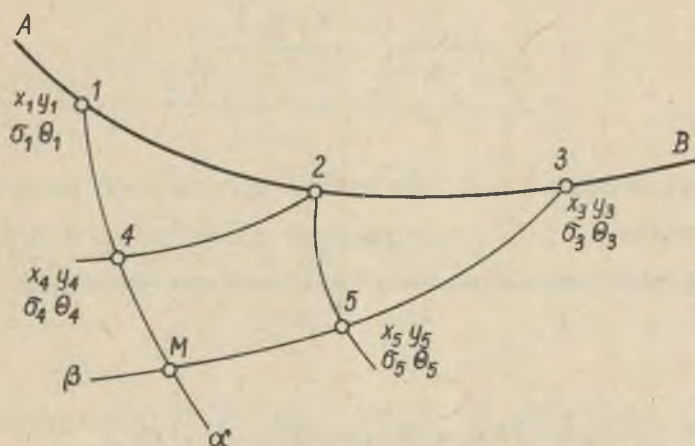
Wyznaczniki Δ_4 i D występujące w (12), (14), (15) i (15') oblicza się na podstawie (10) oraz (10'). Wyznacznik Δ_2 otrzymuje się przez wstawienie ostatniej kolumny wyznacznika (10') w miejsce pierwszej kolumny wyznacznika (10). Jak już nadmieniono wszystkie te wartości, dla sytuacji jak na rys. 2, dotyczą punktu 1 znajdującego się na krzywej niecharakterystycznej AB.

W uzasadnionych przypadkach wzory (7), (11) i (12) można zastąpić wzorami (6), mimo iż dalsze obliczenia będą oparte na aproksymacji wynikającej z zastosowania szeregu TAYLORA.

2.2. Obliczenie dalszych punktów siatki charakterystyk

W wyniku przeprowadzenia obliczeń, podanymi wyżej wzorami (7) (11) i (12) uzyskuje się początkowe punkty siatki charakterystyk np. punkty 4, 5 (rys. 3) z dokładnością odpowiadającą przyjętej aproksymacji.

Wobec znajomości w tych punktach wszystkich parametrów, obliczenie pozostałych punktów znacznie się upraszcza. Uproszczenie to wynika z możliwości wykorzystania analogicznych jak dla punktu M równań aproksymacyjnych, również w stosunku do punktów wyjściowych na krzywej AB.



Rys. 3

Dla współrzędnych x_M i y_M w nawiązaniu do sytuacji jak na rys. 3, równania te mają postać:

$$y_M = y_4 + (x_M - x_4) \operatorname{tg}(\theta_4 + \mu) + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_4 \frac{(x_M - x_4)^2}{2},$$

$$y_M = y_5 + (x_M - x_5) \operatorname{tg}(\theta_5 - \mu) + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_5 \frac{(x_M - x_5)^2}{2},$$

oraz

(16)

$$y_1 = y_4 + (x_1 - x_4) \operatorname{tg}(\theta_4 + \mu) + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_4 \frac{(x_1 - x_4)^2}{2},$$

$$y_3 = y_5 + (x_3 - x_5) \operatorname{tg}(\theta_5 - \mu) + \\ + \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_5 \frac{(x_3 - x_5)^2}{2}.$$

Stosując podobnie jak poprzednio przybliżoną metodę NEWTONA, na podstawie (16), otrzymujemy następujące wzory rekurencyjne na poszukiwane wartości współrzędnych dalszych punktów siatki:

$$x_M^* = \frac{y_5 - y_4 + x_4 \operatorname{tg}(\theta_4 + \mu) - x_5 \operatorname{tg}(\theta_5 - \mu)}{\operatorname{tg}(\theta_4 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_5 - \mu)},$$

zaś

$$x_M^{**} = x_M^* + \epsilon, \quad (17)$$

gdzie

$$\epsilon^* = \frac{(x_M^* - x_5)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_5 - (x_M^* - x_4)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_4}{(x_M^* - x_4) \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_4 - (x_M^* - x_5) \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_5 + \operatorname{tg}(\theta_4 + \mu) - \operatorname{tg}(\theta_5 - \mu)}.$$

(17')

Przy czym

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_4^\alpha = \frac{2 [y_1 - y_4 - (x_1 - x_4) \operatorname{tg} (\theta_4 + \mu)]}{(x_1 - x_4)^2},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_5^\beta = \frac{2 [y_3 - y_5 - (x_3 - x_5) \operatorname{tg} (\theta_5 - \mu)]}{(x_3 - x_5)^2}.$$

Wartość współrzędnej y_M wynika bezpośrednio z wzorów (16). W odniesieniu do wartości funkcji σ_M i θ_M podstawowy układ równań uzyskuje się, przy uwzględnieniu zależności (5) i (5') w sposób analogiczny jak równania (16). Jednakże w porównaniu z nimi posiada on bardziej złożoną budowę.

W niniejszej pracy wzory rekurencyjne do obliczania σ_M oraz θ_M (rys. 3), dotyczące wszystkich z wyjątkiem początkowych punktów siatki charakterystyk, wyprowadzono przy następujących przyjęciach:

$$L_1 = (x_M - x_4) - \frac{(x_M - x_4)^2}{(x_1 - x_4)},$$

$$L_2 = (x_M - x_5) - \frac{(x_M - x_5)^2}{(x_3 - x_5)},$$

$$K_1 = \frac{(x_M - x_4)^2}{(x_1 - x_4)^2},$$

$$K_2 = \frac{(x_M - x_5)^2}{(x_3 - x_5)^2},$$

(18)

oraz

$$\begin{aligned}
 N_1 &= (\sigma_3 - \sigma_5)K_2 - (\sigma_1 - \sigma_4)K_1 + (\sigma_5 - \sigma_4), \\
 N_2 &= (\theta_3 - \theta_5)K_2 - (\theta_1 - \theta_4)K_1 + (\theta_5 - \theta_4), \\
 N_3 &= -\gamma \left[1 + \operatorname{tg} 2\mu \operatorname{tg} (\theta_4 + \mu) \right], \\
 N_4 &= \gamma \left[1 - \operatorname{tg} 2\mu \operatorname{tg} (\theta_5 - \mu) \right].
 \end{aligned} \tag{18'}$$

W oparciu o (18) i (18') wyprowadzenie otrzymano z rozwiązania podstawowego układu równań, wynikającego z rozpatrzenia punktów 4 i 5 w nawiązaniu zarówno do punktu M jak i do punktów 1, 3 (rys. 3). W rezultacie uzyskano następującą postać rozwiązania

$$\begin{aligned}
 \sigma_M &= \sigma_4 + (\sigma_1 - \sigma_4)K_1 + \frac{\sigma_4(U_1 \operatorname{tg} 2\mu + L_2 U_4) + \sigma_5(U_3 L_1 - 2\sigma_4 U_2)}{\operatorname{tg} 2\mu (\sigma_4 + \sigma_5)}, \\
 \theta_M &= \theta_4 + (\theta_1 - \theta_4)K_1 + \frac{L_1 U_3 + 2\sigma_5 U_2 - L_2 U_4 - \operatorname{tg} 2\mu U_1}{2(\sigma_4 + \sigma_5)}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Wzory rekurencyjne (19) a w szczególności wzory (12) dla pewnych określonych przypadków warunków brzegowych mogą ulec znacznym uproszczeniom.

O uproszczeniu decyduje również wybór postaci układu wyjściowego.

Podane w rozdziale 2 niniejszej pracy wzory (11) oraz (12) jak również wzory (17) i (19) w porównaniu z metodą pierwszego przybliżenia dają dokładniejsze rozwiązanie numeryczne równań równowagi granicznej masywu gruntowego.

Określenie ich przydatności w praktycznym zastosowaniu może być dokonane jedynie, każdorazowo w nawiązaniu do konkretnych warunków brzegowych.

Praca złożona została dnia 23.3.1964 r.

LITERATURA

- [1] ГОВЯДИНОВ А.И., ФАЛЬКОВИЧ С.В.: Устойчивость откосов при предельном состоянии равновесия - Инженерный сборник, т. XIV, 1953.
- [2] ПАНОВ Д.Ю.: Численное решение квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных - Москва, 1957.
- [3] SOKOŁOWSKI W.W.: Statyka ośrodków sypkich - W-wa, 1958 (tłum. z rosyjskiego).
- [4] ХРИСТИАНОВИЧ С.А.: О сверхзвуковых течениях газа - Труды ЦАГИ, № 543, 1941.

ПО ДЕЛУ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГРУНТОВОЙ МАССЫ

С о д е р ж а н и е

В работе рассмотрено некоторый вопрос численного решения дифференциальных уравнений предельного напряжённого состояния грунтовой массн. Вопрос рассмотрено в условиях илоской задачи.

ÜBER DIE NUMERISCHEN BEHANDLUNG DER GLEICHUNGEN DES GRENZ- GLEICHGEWICHTES DES BODENS

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dieser Arbeit wurde vorgestellt das Problem der Anwendung in der Bodenmechanik einer besondere Methode der numerischen Behandlung hiperbolischen Quasilinearen partiellen Differentialgleichungen.

Das Problem wurde bearbeitet für das ebene Verzerrungszustand des Bodenmedium.