ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1964
Seria: BUDOWNICTWO z. 13 Nr kol. 125

LESZEK LITWINOWICZ

ZWIĘKSZENIE DOKŁADNOŚCI APROKSYMACJI NIELINIOWEJ W NUMERYCZNYM ROZWIĄZYWANIU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI GRANICZNEJ GRUNTU

Streszczenie. W pracy przedstawiono problem zwiększania dokładności numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodków gruntowych w oparciu o wykorzystanie aproksymacji nieliniowej. Zagadnienie podano w nawiązaniu do przyjętego układu równań wyjściowych, dla płaskiego stanu odkształcenia.

1. WSTĘP

Zwiększenie dokładności rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodków gruntowych można uzyskać przez zastosowanie do obliczeń metody rozwiązywania równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, opartej na aproksymacji nieliniowej [1].

Zastosowanie aproksymacji nieliniowej do numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej gruntu, przedstawione zostało przez autora w pracy [3]. Zastosowanie to dotyczy zagadnienia brzegowego typu CAUCHY'ego. W porównaniu z metodą podaną przez W.W. SOKOŁOWSKIEGO [5], wzory numeryczne podane w pracy [3] pozwalają na uzyskanie większej dokładności rozwiązania. Dalsze zwiększenie dokładności obliczeń (pewnego ich fragmentu) można uzyskać albo przez zmniejszenie kroku obliczeniowego - co często jest bardzo niewygodne, albo przez

zwiększenie dokładności aproksymacji, co z kolei wymaga ponownego rozpatrzenia zagadnienia i wyprowadzenia zupełnie nowych wzorów numerycznych. Fakt ten wynika z istoty zastosowanej metody [4].

Celem niniejszej pracy jest uzyskanie rekurencyjnych wzorów numerycznych odpowiadających zwiększeniu dokładności aproksymacji do czterech pierwszych członów szeregu TAYLORA. Zagadnienie przedstawione zostanie w oparciu o równania równowagi granicznej gruntu zapisane w postaci

$$\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma}\cos(\theta+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\cos(\theta+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma}\sin(\theta+\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y}+$$

$$+\sin(\theta+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}=-\frac{\gamma\cos(\theta-\mu)}{2\sigma\cos 2\mu},$$

$$\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma}\cos(\theta-\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\cos(\theta-\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma}\sin(\theta-\mu)\frac{\partial\sigma}{\partial y}-$$

$$-\sin(\theta-\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\gamma\cos(\theta+\mu)}{2\sigma\cos 2\mu} \tag{1}$$

Układ (1) będący układem quasiliniowych hiperbolicznych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, dalej będziemy nazywali układem wyjściowym.

Równania charakterystyk obu rodzin dla układu wyjściowego (1) są następujące:

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}(\theta+\mu),$$

$$\operatorname{tg} 2\mu\, d\sigma+2\sigma\, d\theta+\gamma dx+\gamma\operatorname{tg} 2\mu\, dy=0, \tag{2}$$

oraz

$$\frac{dy}{dx} = tg(\theta - \mu),$$

$$tg\, 2\mu\, d\sigma - 2\sigma\, d\theta - \sigma dx + \gamma tg\, 2\mu\, dy = 0. \qquad (2')$$

W równaniach (1), (2) oraz (2') przyjęto oznaczenia

ϱ - kąt tarcia wewnętrznego gruntu,

γ - ciężar objętościowy gruntu,

θ - kąt zawarty między kierunkiem głównym "1" a pionową osią y,

σ - średnia z naprężeń głównych powiększona o wartość ciśnienia spójności,

zaś

$$\mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}.$$

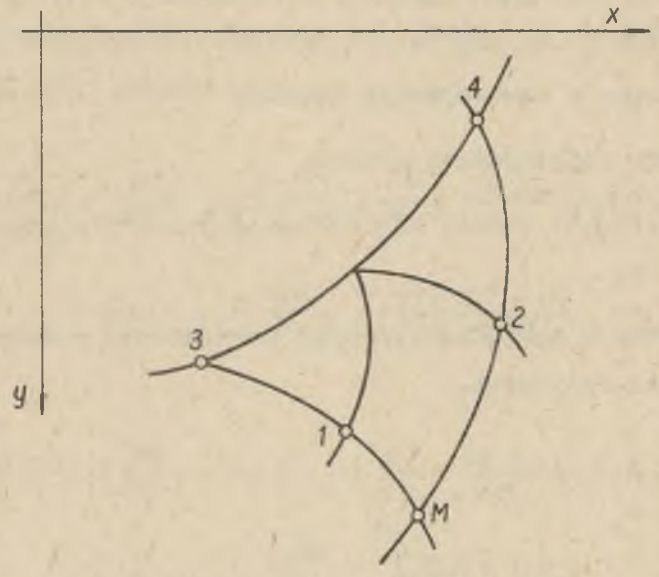
Poszukiwane funkcje σ oraz θ są funkcjami zmiennych x oraz y.

2. ZWIĘKSZENIE DOKŁADNOŚCI APROKSYMACJI

Rozpatrzmy przedstawiony na rys. 1 fragment siatki linii charakterystyk.

Na rys. 1 przyjęto, że punkty 1 i 2 stanowiące podstawę do obliczania wartości parametrów x_M, y_M, σ_M oraz θ_M punktu M, należą do początkowych punktów rozpatrywanej siatki linii charakterystyk.

W związku z tym w punktach 1, 2 oraz punktach 3 i 4 znane są z odpowiednich obliczeń [3] wartości współrzędnych x i y wartości funkcji σ i θ oraz wartości pochodnych $\frac{dy}{dx}$. Ponadto w punktach 3 i 4 znane są również wartości liczonych wzdłuż linii charakterystyk pochodnych $\frac{d\sigma}{dx}$ i $\frac{d\theta}{dx}$.



Rys. 1. Fragment siatki linii charakterystyk

W warunkach przyjętej aproksymacji podstawowe wzory na poszukiwane wartości w punkcie M są następujące:

$$y_M = y_1 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_1 (x_M - x_1) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^2}{2} + \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^3}{6},$$

$$\sigma_M = \sigma_1 + \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_1 (x_M - x_1) + \left.\frac{d^2\sigma}{dx^2}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^2}{2} + \left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^3}{6}, \qquad (3)$$

$$\Theta_M = \Theta_1 + \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_1 (x_M - x_1) + \left.\frac{d^2\Theta}{dx^2}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^2}{2} + \left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_1 \frac{(x_M - x_1)^3}{6}. \tag{3}$$

Zależności (3) wypisano jak dla punktu 1, analogiczne podstawowe wzory uzyskuje się również dla punktu 2

$$y_M = y_2 + \left.\frac{dy}{dx}\right|_2 (x_M - x_2) + \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^2}{2} + \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^3}{6},$$

$$\sigma_M = \sigma_2 + \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_2 (x_M - x_2) + \left.\frac{d^2\sigma}{dx^2}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^2}{2} + \left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^3}{6}, \tag{3'}$$

$$\Theta_M = \Theta_2 + \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_2 (x_M - x_2) + \left.\frac{d^2\Theta}{dx^2}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^2}{2} + \left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_2 \frac{(x_M - x_2)^3}{6}.$$

Obliczenie wartości współrzędnych x_M i y_M dla punktu M można przeprowadzić niezależnie od obliczenia odpowiadających im wartości σ_M oraz Θ_M.

2.1. Obliczenie wartości x_M i y_M

Obliczenie w punkcie M wartości x_M i y_M polega na rozwiązaniu odpowiedniego układu równań. Układ ten otrzymuje się przez uzupełnienie pierwszych z równań (3) i (3') podobnymi równaniami wypisanymi odpowiednio w odniesieniu do punktów 3

i 4, przy jednoczesnym uwzględnieniu zachodzących dla tych punktów związków wynikających z zależności

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_3 = tg(\Theta_3 + \mu),$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_4 = tg(\Theta_4 - \mu).$$

W wyniku rozwiązania tak otrzymanego układu równań uzyskano następujące wyrażenia

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_1 = \frac{2}{(x_3-x_1)^2}\left[3\,E_1 - (x_3 - x_1)\,E_3\right],$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_2 = \frac{2}{(x_4 - x_2)^2}\left[3\,E_2 - (x_4 - x_2)\,E_4\right], \tag{4}$$

oraz

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1 = \frac{6}{(x_3 - x_1)^3}\left[(x_3 - x_1)\,E_3 - 2\,E_1\right],$$

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2 = \frac{6}{(x_4 - x_2)^3}\left[(x_4 - x_2)\,E_4 - 2\,E_2\right]. \tag{4'}$$

W wyrażeniach (4) i (4′) przyjęto oznaczenia

$$
\begin{aligned}
E_1 &= y_3 - y_1 - (x_3 - x_1 \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu), \\
E_2 &= y_4 - y_2 - (x_4 - x_2) \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu), \\
E_3 &= \operatorname{tg} (\Theta_3 + \mu) - \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu), \\
E_4 &= \operatorname{tg} (\Theta_4 - \mu) - \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Występujące w podstawowych wzorach (3) i (3′) wartości $\left.\frac{dy}{dx}\right|_1$ i $\left.\frac{dy}{dx}\right|_2$ wynikają bezpośrednio z metody charakterystyk.

Dla przyjętego schematu obliczeń wynoszą one

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_1 &= \operatorname{tg} (\Theta_1 + \mu), \\
\left.\frac{dy}{dx}\right|_2 &= \operatorname{tg} (\Theta_2 - \mu).
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Na podstawie zależności (4), (4′) oraz (6) można obliczyć wartości wszystkich pochodnych funkcji y, występujących w rozpatrywanych równaniach związków (3) i (3′).

Obliczenie współrzędnych przecięcia się linii charakterystyk obu rodzin w punkcie M, ostatecznie sprowadza się do rozwiązania następującego równania

$$z^3 + \frac{3\,A\,C - B^2}{3\,A^2}\,z + \frac{1}{A}\left[\frac{2\,B^3}{27\,A^2} - \frac{B\,C}{3\,A} + D\right] = 0 \qquad (7)$$

gdzie

$$A = \frac{1}{6}\left[\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1 - \left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2\right],$$

$$B = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_1 - \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_2 + x_2\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2 - x_1\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1\right],$$

$$C = \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) - \operatorname{tg}(\Theta_2 - \mu) + x_2\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_2 - x_1\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[x_1^{\,2}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1 - x_2^{\,2}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2\right], \qquad (8)$$

$$D = y_1 - y_2 - x_1 \operatorname{tg}(\Theta_1 + \mu) + x_2 \operatorname{tg}(\Theta_2 - \mu) + \frac{x_1^{\,2}}{2}\cdot\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_1 -$$

$$- \frac{x_2^{\,2}}{2}\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_2 - \frac{x_1^{\,3}}{6}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_1 + \frac{x_2^{\,3}}{6}\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_2 .$$

Na podstawie zależności (7) i (8) wartość x_M obliczamy z wzoru

$$x_M = z - \frac{B}{3A}. \tag{9}$$

Przy numerycznym rozwiązywaniu konkretnych problemów równowagi granicznej ośrodka gruntowego w przypadku większej ilości obliczanych punktów węzłowych siatki linii charakterystyk wygodnie jest posługiwać się metodą graficznego poszukiwania wartości x_M.
Metoda ta polega na wykreślnym wyznaczaniu punktu wspólnego dla krzywej o równaniu $w = z^3$ oraz prostej o równaniu

$$w = \frac{B^2 - 2AC}{3A^2} z - \frac{1}{A}\left[\frac{2B^3}{27A^2} - \frac{BC}{3A} + D\right].$$

Wartość y_M obliczamy według dowolnego z pierwszych równań wzorów (3) i (3').

2 2. Obliczenie wartości σ_M i Θ_M

W celu obliczenia wartości poszukiwanych funkcji σ_M oraz Θ_M w punkcie M, należy odpowiednie wynikające z wzorów (3) i (3'), podstawowe równania dotyczące punktów 1 oraz 2, uzupełnić analogicznymi równaniami wypisanymi względem punktów 3 i 4 oraz zachodzącymi wzdłuż charakterystyk obu rodzin związkami różniczkowymi wynikającymi z równań (2) i (2').

Ponadto należy wykorzystać zachodzące w punktach 3 i 4 odpowiednie zależności uzyskiwane w oparciu o następujące wzory[1)]

$$\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_3 = \varphi_3 - \left[\frac{W'}{W}\right]_3 \left[\xi_3 - \operatorname{tg}(\Theta_3 + \mu)\right],$$

$$\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_3 = \psi_3 - \left[\frac{W''}{W}\right]_3 \left[\xi_3 - \operatorname{tg}(\Theta_3 + \mu)\right],$$

$$\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_4 = \varphi_4 - \left[\frac{W'}{W}\right]_4 \left[\xi_4 - \operatorname{tg}(\Theta_4 - \mu)\right], \tag{10}$$

$$\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_4 = \psi_4 - \left[\frac{W}{W}\right]_4 \left[\xi_4 - \operatorname{tg}(\Theta_4 - \mu)\right].$$

Wzory (10) wynikają z rozpatrzenia układu wyjściowego (1) w powiązaniu z warunkami brzegowymi [3].

Występujące we wzorach (10) wartości W, W' oraz W'' obliczamy (odpowiednio do punktów 3 oraz 4) z następujących zależności

$$W = \frac{\operatorname{tg} 2\mu}{\sigma}\left[(\sin^2\mu - \xi^2\cos^2\mu)\cos^2\Theta + 2\xi\sin\Theta\cos\Theta - \right.$$

$$\left. - (\cos^2\mu - \xi^2\sin^2\mu)\sin^2\Theta\right].$$

---

1) Indeksy przy oznaczeniach odpowiadają numerowi rozpatrywanego punktu.

$$W' = \left[\sin(\Theta - \mu) - \xi\cos(\Theta - \mu)\right]\left[\frac{2\sigma\psi + \varphi\,\mathrm{tg}\,2\mu}{2\sigma}\cos(\Theta + \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{2\sigma\cos 2\mu}\cos(\Theta - \mu)\right] - \left[\frac{2\sigma\psi - \varphi\,\mathrm{tg}\,2\mu}{2\sigma}\cos(\Theta - \mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{2\sigma\cos 2\mu}\cos(\Theta + \mu)\right]\left[\sin(\Theta + \mu) - \xi\cos(\Theta + \mu)\right], \tag{11}$$

$$W'' = \frac{\mathrm{tg}\,2\mu}{2\sigma}\left\{\left[\sin(\Theta + \mu) - \xi\cos(\Theta + \mu)\right]\left[\frac{2\sigma\psi - \varphi\,\mathrm{tg}\,2\mu}{2\sigma}\cos(\Theta - \mu) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{2\sigma\cos 2\mu}\,\mathrm{con}(\Theta + \mu)\right] + \left[\frac{2\sigma\psi + \varphi\,\mathrm{tg}\,2\mu}{2\sigma}\cos(\Theta + \mu) + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\gamma}{2\sigma\cos 2\mu}\cos(\Theta - \mu)\right]\left[\sin(\Theta - \mu) - \xi\cos(\Theta - \mu)\right]\right\}.$$

We wzorach (10) i (11) przyjęto następujące oznaczenia

φ - pochodna względem x zadanej w postaci warunków brzegowych funkcji σ,

ψ - pochodna względem x zadanej w postaci warunków brzegowych funkcji Θ,

ξ - pochodna względem x funkcji opisującej krzywą niecharakterystyczną, na której zadane są warunki brzegowe.

W wyniku dalszych obliczeń, przyjmując kolejno oznaczenia w postaci

$$F_1 = 2\,\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\,\mathrm{tg}\,2\mu + (\Theta_1 - \Theta_3)\,2\sigma_1}{(x_3 - x_1)} + \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_3 \mathrm{tg}\,2\mu +$$

$$+ 2\sigma_1 \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_3 - \gamma\left[1 + \mathrm{tg}\,2\mu\,\mathrm{tg}\,(\Theta_1 + \mu)\right],$$

$$F_2 = 2\,\frac{(\sigma_2 - \sigma_4)\,\mathrm{tg}\,2\mu + (\Theta_2 - \Theta_4)\,2\sigma_2}{(x_4 - x_2)} + \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_4 \mathrm{tg}\,2\mu +$$

$$+ 2\sigma_2 \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_4 + \gamma\left[1 - \mathrm{tg}\,2\mu\,\mathrm{tg}\,(\Theta_2 - \mu)\right], \tag{12}$$

$$F_3 = \sigma_2 - \sigma_1 - (\sigma_3 - \sigma_1)\left[2 - \frac{(x_M - x_1)}{(x_3 - x_1)}\right]\frac{(x_M - x_1)}{(x_3 - x_1)} +$$

$$+ (\sigma_4 - \sigma_2)\left[2 - \frac{(x_M - x_2)}{(x_4 - x_2)}\right]\frac{(x_M - x_2)}{(x_4 - x_2)} +$$

$$- \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_3 (x_M - x_1)\,\frac{(x_M - x_2)}{(x_3 - x_1)} + \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_4 (x_M - x_2)\,\frac{(x_M - x_4)}{(x_4 - x_2)},$$

$$F_4 = \Theta_2 - \Theta_1 - (\Theta_3 - \Theta_1)\left[2 - \frac{(x_M - x_1)}{(x_3 - x_1)}\right]\frac{(x_M - x_1)}{(x_3 - x_1)} +$$

$$+ (\Theta_4 - \Theta_2)\left[2 - \frac{(x_M - x_2)}{(x_4 - x_2)}\right]\frac{(x_M - x_2)}{(x_4 - x_2)} -$$

$$+ \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_3 (x_M - x_1)\frac{(x_M - x_3)}{(x_3 - x_1)} + \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_4 (x_M - x_2)\frac{(x_M - x_4)}{(x_4 - x_2)},$$

ostatecznie otrzymano dla punktów 1 oraz 2 następujące wzory do obliczania wartości trzecich pochodnych funkcji σ i Θ

$$\left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_1 = \frac{6\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[\frac{2\sigma_2 F_4 - F_3 \operatorname{tg} 2\mu}{2\sigma_2 (x_M - x_3)^2 (x_M - x_1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{F_2 (x_M - x_4)^2 (x_M - x_2)}{2\sigma_2 (x_4 - x_2)^2 (x_M - x_3)^2 (x_M - x_1)} + \frac{F_1}{2\sigma_2 (x_3 - x_1)^2}\right]$$

$$\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_2 = \frac{6\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\left[\frac{F_1 (x_M - x_3)^2 (x_M - x_1) - 2\sigma_1 F_4 (x_3 - x_1)^2}{(x_3 - x_1)^2 (x_M - x_4)^2 (x_M - x_2) \operatorname{tg} 2\mu} - \right.$$

$$\left. - \frac{F_3}{(x_M - x_4)^2 (x_M - x_2)} + \frac{\sigma_1 F_2}{\sigma_2 (x_4 - x_2)^2 \operatorname{tg} 2\mu}\right], \tag{13}$$

$$\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_1 = \frac{6}{\operatorname{tg} 2\mu}\left[\frac{F_1}{(x_3 - x_1)^2} - 2\sigma_1 \left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_1\right],$$

$$\left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_2 = \frac{3}{\sigma_2}\left[\operatorname{tg} 2\mu \left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_2 - \frac{F_2}{(x_4 - x_2)^2}\right].$$

Wartości pozostałych pochodnych funkcji σ oraz Θ występujących w rozpatrywanych równaniach podstawowych wzorów (3) i (3') opisują zależności

$$\left.\frac{d^2\sigma}{dx^2}\right|_1 = -4\,(x_3 - x_1)\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_1 + \frac{2}{(x_3 - x_1)}\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_3 - 2\,\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{(x_3 - x_1)^2},$$

$$\left.\frac{d^2\sigma}{dx^2}\right|_2 = -4\,(x_4 - x_2)\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_2 + \frac{2}{(x_4 - x_2)}\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_4 - 2\,\frac{(\sigma_4 - \sigma_2)}{(x_4 - x_2)^2},$$

(14)

$$\left.\frac{d^2\Theta}{dx^2}\right|_1 = -4\,(x_3 - x_1)\left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_1 + \frac{2}{(x_3 - x_1)}\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_3 - 2\,\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)}{(x_3 - x_1)^2},$$

$$\left.\frac{d^2\Theta}{dx^2}\right|_2 = -4\,(x_4 - x_2)\left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_2 + \frac{2}{(x_4 - x_2)}\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_4 - 2\,\frac{(\Theta_4 - \Theta_2)}{(x_4 - x_2)^2}$$

oraz

$$\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_1 = (x_3 - x_1)^2\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_1 + 2\,\frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{(x_3 - x_1)} - \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_3,$$

$$\left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_2 = (x_4 - x_2)^2\left.\frac{d^3\sigma}{dx^3}\right|_2 + 2\,\frac{(\sigma_4 - \sigma_2)}{(x_4 - x_2)} - \left.\frac{d\sigma}{dx}\right|_4,$$

$$\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_1 = (x_3 - x_1)^2 \left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_1 + 2\frac{(\Theta_3 - \Theta_1)}{(x_3 - x_1)} - \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_3 ,$$

$$\left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_2 = (x_4 - x_2)^2 \left.\frac{d^3\Theta}{dx^3}\right|_2 + 2\frac{(\Theta_4 - \Theta_2)}{(x_4 - x_3)} - \left.\frac{d\Theta}{dx}\right|_4 . \qquad (14')$$

Na podstawie wzorów (13), (14) i (14') przy znanych wartościach współrzędnych x_M i y_M obliczenie wartości σ_M oraz Θ_M uzyskuje się bez trudności z odpowiednich wzorów (3) i (3').

Przedstawiony w niniejszej pracy sposób obliczania parametrów kolejnego punktu M siatki linii charakterystyk, mimo stosunkowo skomplikowanej budowy wzorów może być z powodzeniem wykorzystany przy rozwiązywaniu odpowiednich problemów teorii równowagi granicznej gruntu cechujących się znaczną nieliniowością. Należy zauważyć, że w przedstawionych wzorach istnieją duże możliwości ułatwienia obliczeń. Wynikają one z możliwości ułożenia odpowiednich upraszczających obliczenia schematów obliczeniowych.

Praca została złożona w redakcji 15.VII.64 r.

LITERATURA

[1] DEMBICKI E.: Une méthode d'approximation non lineare de resolution des problèmes d'equilibre limite des milieus cohérents. Archiwum Hydrotechniki, X, 3, 1963.

[2] ГОВЯДИНКОВ А.И.; ФАЛКОВИЧ С.В.: Устойчивость откосов при предельном состоянии равновесия - Инж. сб., XI , 1953.

[3] LITWINOWICZ L.: W sprawie numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodka gruntowego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl., Budownictwa 13, 1964.

[4] ПАНОВ Д.Ю.: Численное решение квазилинеиных гиперболических систем дифференциональных уравнений в частных производных, Москва 1957.

[5] SOKOŁOWSKI W.W.: Statyka ośrodków sypkich. W-wa 1958 (tłumaczenie z rosyjskiego).

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГРУНТОВ

Р е з ю м е

В работе рассмотрено вопрос повышения точности численного решения уравнений предельного равновесия грунтовой массы в условиях нелинейной аппроксимации характеристик этих уравнений.

DIE VERGRÖSSERUNG DER GENAUIGKEIT NUMERISCHEN BEHANDLUNGEN DER GLEICHUNGEN DES GRENZGLEICHGEWICHTES DES BODENS

Z u s a m m e n f a s s u n g

In der Arbeit wurde vorgestellt das Problem der Vergrösserung der Genauigkeit numerischen Behandlungen der Gleichungen des Grenzgleichgewichtes des Bodens.