ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 115 Budownictwo z. 14 1964

Dr inż. SZCZEPAN BORKOWSKI

Katedra Mechaniki Budowli

NIEKTÓRE PROBLEMY ORTOTROPOWYCH POWŁOK OBROTOWYCH

1. Wstęp

W niniejszej pracy podano podstawowe równania teorii powłok obrotowych ortotropowych. Przedstawione zagadnienie ujmuje się możliwie ogólnie, przyjmując sześć funkcji charakteryzujących omawianą tutaj ortotropię. Otrzymane równania stosują się zarówno do ortotropii naturalnej (własność materiału) jak i do ortotropii konstrukcyjnej (powłoki użebrowane, pofałdowane, o zmiennej grubości itp.).

Przedstawiony tutaj sposób rozwiązania zagadnienia, polega na zastąpieniu istniejącej w rzeczywistości środkowej powierzchni powłoki danej, powierzchnią umowną, względem której występują pofałdowania lub użebrowania. Jeżeli powierzchnia umowna może być określona analitycznie znacznie prościej, niż powierzchnia środkowa powłoki danej, wtedy możemy w przybliżeniu analizować stan odkształcenia i naprężenia powłoki umownej, obciążonej jak powłoka dana, z warunkiem aby powłoka umowna odkształcała się tak samo jak powłoka dana. Można to osiągnąć traktując powłokę umowną jako powłokę ortotropową o odpowiednio dobranych funkcjach ortotropii. Funkcje te można wyznaczyć porównując odkształcenia elementu powłoki danej i powłoki ortotropowej umownej. Tak ujętą ortotropię stosowano do tej pory wyłącznie dla powłok obrotowych (por. [3a]) i to tylko dla stanu quasi osiowo-symetrycznego. Uwaga badaczy kierowała się prawie wyłącznie na powłoki warstwowe i użebrowane, o czym świadczą dwie, reprezentatywne dla tego kierunku badań, bogate monografie S.A. AMBARCUMIANA [1] i I.A. BIRGERA [2].

Przedstawiona tutaj tematyka wypłynęła przy badaniu przez autora zagadnień związanych ze zginaniem cienkościennych łuków ortotropowych.

Niniejsze streszczenie oparte jest na wynikach uzyskanych przez autora w pracy [3b].

2. Założenia

1. Pofałdowanie (użebrowanie) środkowej powierzchni powłoki danej, powinno być takie, aby kierunki ortotropii pokrywały się z liniami południków lub równoleżników.

2. Przyjmuje się, że zależności strony statycznej i geometrycznej teorii powłok ortotropowych są takie same jak w powłokach izotropowych. Prawo zaś HOOKE'A formułuje się przy pomocy zależności

$$\sigma_j = \sigma_{j,r} + z\sigma_{j,z}, \quad \tau_z = \frac{A}{h}\omega + z\,\frac{12B}{h^3}\tau, \quad j = 1,2 \tag{2.1}$$

gdzie

$$\sigma_{j,r} = \frac{1}{h}\left[C_j\,\varepsilon_j + C_{j,3-j}\,\varepsilon_{3-j}\right], \quad \sigma_{j,z} = \frac{12}{h^3}\left[D_j\,\varkappa_j + D_{j,3-j}\,\varkappa_{3-j}\right] \tag{2.2}$$

W powyższych równaniach indeks 1, (2) odnosi się do kierunku południków, (równoleżników), r,(z) do rozciągania, (zginania). Symbolami C_j, $C_{j,3-j}$, D_j, $D_{j,3-j}$, A, B oznaczono odpowiednie sztywności.

3. Wyniki uzyskane na podstawie przytoczonych równań będą tym dokładniejsze im mniejsze będą odchylenia powłoki rzeczywistej od powłoki umownej.

4. Występujące tutaj składowe wektora obciążenia powierzchniowego X_1, X_2, Z są tylko funkcjami współrzędnych α i β.

5. Rozpatruje się tylko małe odkształcenia i ugięcia (teoria liniowa fizycznie i geometrycznie), materiał zaś podlega prawu HOOKE'A (por. rel. (2.1), (2.2)).

3. Podstawowe równania

Korzystając z analogii statyczno-geometrycznej A.L. GOLDENWEJZERA [4] i przyjmując zależności strony statycznej za A.E.H. LOVE'EM [5] a strony geometrycznej za W.W. NOWOŻIŁOWEM [6] możemy podstawowe równania, rozpatrywanej tutaj klasy powłok, przedstawić w postaci

$$
(3.1)\quad
\begin{aligned}
&(a_{11}+b_{11})\frac{\partial \widetilde{N}_1}{\partial\alpha}+(a_{12}+b_{12})\frac{R_1}{R_2}\,\mathrm{ctg}\alpha\,\widetilde{N}_1-(a_{13}+b_{13})\frac{R_1}{R_2}\mathrm{ctg}\alpha\widetilde{N}_2+\\
&+(a_{14}+b_{14})\,\frac{R_1}{R_2\sin\alpha}\,\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\beta}-\\
&+i\Omega c_2\,\frac{1}{R_1}\left[\left(1+\frac{D_1}{\Omega^2\varphi_2}\right)\frac{\partial\widetilde{N}_2}{\partial\alpha}+\left(1-\frac{D_1}{\Omega^2 c_2}\right)\frac{\partial\overline{\widetilde{N}}_2}{\partial\alpha}\right]+\\
&+\frac{P_1}{R_2\sin\alpha}=-\,2R_1X_1,\\
&(a_{21}+b_{21})\frac{\partial\widetilde{N}_2}{\partial\beta}+(a_{24}+b_{24})\frac{R_2}{R_1}\sin\alpha\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\alpha}+2(a_{25}+b_{25})\cos\alpha\,\widetilde{S}-\\
&+i\Omega c_1\,\frac{1}{R_2}\left[\left(1+\frac{D_2}{\Omega^2\varphi_1}\right)\frac{\partial\widetilde{N}_1}{\partial\beta}+\left(1-\frac{D_2}{\Omega^2 c_1}\right)\frac{\partial\overline{\widetilde{N}}_1}{\partial\beta}\right]+\\
&+\frac{P_2}{R_2}=-\,2\,R_2\,\sin\alpha.\,X_2,\\
&\frac{\widetilde{N}_1}{R_1}+\frac{\widetilde{N}_2}{R_2}+\frac{1}{R_1R_2\sin\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{P_1}{R_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{P_2}{R_2\sin\alpha}\right)\right]=Z.
\end{aligned}
$$

W równaniach powyższych $\widetilde{N}_1$, $\widetilde{N}_2$, $\widetilde{S}$, ($\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$) przedstawiają siły zespolone (zespolone sprzężone), które mają postać

$$(3.2)\quad \widetilde{N}_1 \overset{\mathrm{df}}{=} N_1+i\Omega(D_2M_2-D_{12}\,M_1),$$

$$\tilde{N}_2 \overset{df}{=} N_2 + i\Omega(D_1M_1 - D_{12}M_2),$$

$$(3.2) \qquad \tilde{\tilde{N}}_1 \overset{df}{=} N_1 - i\Omega(D_2M_2 - D_{12}M_1),$$

$$\tilde{\tilde{N}}_2 \overset{df}{=} N_2 - i\Omega(D_1M_1 - D_{12}M_2),$$

$$\tilde{S} \overset{df}{=} S + \frac{i\Omega}{B}K, \qquad \tilde{\tilde{S}} \overset{df}{=} S - \frac{i\Omega}{B}K.$$

gdzie:

$$i = \sqrt{-1}, \quad \Omega = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}, \qquad D_j = \frac{D_{3-j}}{D_jD_{3-j} - D_{j,3-j}^2},$$

$$D_{3-j,j} = \frac{D_{j,3-j}}{D_jD_{3j} - D_{j,3-j}^2}, \qquad j = 1,2 .$$

R_1, (R_2) oznaczają promienie krzywizny południka (równoleżnika), α,(β) - kąty określające równoleżnik (południk
Używane w powyższych równaniach pomocnicze funkcje a_{jk}, b_{jk}, ($j=1,2$, $k=1,\ldots4$) są zależne od modułów ortotropii, które z kolei mogą być również funkcjami kąta α. Przedstawiony powyżej układ równań jest dosyć skomplikowany, i uciążliwy w zastosowaniach. Sytuację jednak ratuje fakt, że w konkretnych przypadkach ortotropii wiele z tych pomocniczych funkcji może być zastąpione jednością, co w sposób zasadniczy upraszcza podstawowe równania. Na tym też polega cała zaleta zapisu równań zasadniczych w siłach zespolnych.
Po scałkowaniu układu zasadniczego, przy odpowiednich warunkach brzegowych, siły wewnętrzne obliczamy z równań (3.2), przemieszczenia zaś z poniższych układów

$$(3.3) \qquad \frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w\right) = C_1 \operatorname{Re} \tilde{N}_1 - C_{12} \operatorname{Re} \tilde{N}_2,$$

$$
(3.3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}+w\right)+\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{R_2}u = C_2\mathrm{Re}\tilde{N}_2 - C_{12}\mathrm{Re}\tilde{N}_1,\\
&-\frac{1}{R_2\sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{R_2}{R_1}\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{R_2\sin\alpha}\right)=\frac{1}{A}\mathrm{Re}\tilde{S},
\end{aligned}
$$

4. Wnioski

Zastosowanie sił zespolonych do rozwiązania niniejszego zagadnienia jest bardzo wygodne. Metoda ta jest korzystna szczególnie w powłokach ortotropowych, gdyż umożliwia pominięcie wpływów bardzo małych w równaniach zasadniczych, a zatem pozwala na maksymalne uproszczenie tych ostatnich.

LITERATURA

[1] AMBARCUMIAN S.A.: Teorija anizotropnych obołoczek, Moskwa 1961.

[2] BIRGER I.A.: Krygłyje płastinki i obołoczki wraszczenija, Moskwa 1961.

[3] BORKOWSKI S.: a) Zginanie łuków falistych, Rozpr. Inż. 1,12(1964),137, b) Zastosowanie sił zespolonych w teorii powłok ortotropowych (w przyg. do druku).

[4] GOLDENWEJZER A.L.: Teorija uprugich tonkich obołoczek, Moskwa 1953.

[5] LOVE A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticy, Cambridge, 1934.

[6] NOWOŻIŁOW W.W.: Teorija tonkich obołoczek, Sudpromgiz 1962.