ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 115 Budownictwo z. 14 1964

Dr inż. STEFAN CIEŚLA

Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów

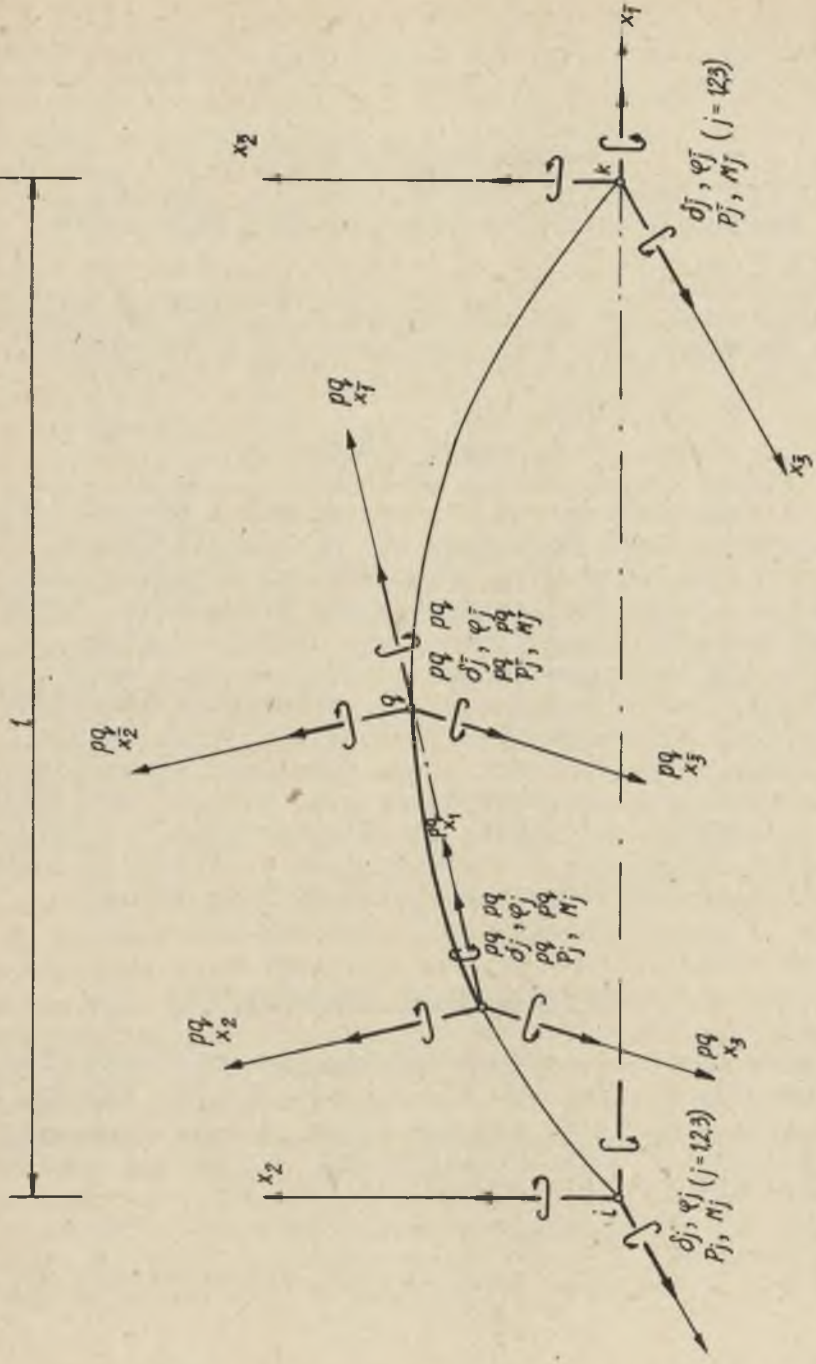
O USPRAWNIENIU SPOSOBU OBLICZANIA LICZB WPŁYWOWYCH DLA PRĘTA DOWOLNIE ZAKRZYWIONEGO W PRZESTRZENI

1. Uwagi wstępne

Z rozwiązywaniem ram przestrzennych o prętach dowolnie zakrzywionych spotykamy się przy obliczeniach statycznych ram kopułowych, rozgałęzionych rurociągów samokompensacyjnych i w szeregu innych przypadków. Jeden ze sposobów rozwiązywania tego typu układów statycznych przy pomocy metody Crossa został przedstawiony w pracach [1], [2], [3]. Jednym z najbardziej pracochłonnych etapów obliczeń we wzmiankowanym sposobie było wyznaczanie macierzy liczb wpływowych dla pręta dowolnie zakrzywionego w przestrzeni. Celem niniejszego opracowania jest usprawnienie sposobu obliczania liczb wpływowych w przypadku, gdy pręt składa się z następujących po sobie elementów, dla których macierze liczb wpływowych są znane.

2. Sformułowanie zagadnienia

Końce pręta i-k znajdują się pod działaniem sił brzegowych P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3, $P_{\bar{1}}$, $P_{\bar{2}}$, $P_{\bar{3}}$, $M_{\bar{1}}$, $M_{\bar{2}}$, $M_{\bar{3}}$ i doznają małych przemieszczeń (przesunięć i obrotów) δ_1, δ_2, δ_3, φ_1, φ_2, φ_3, $\delta_{\bar{1}}$, $\delta_{\bar{2}}$, $\delta_{\bar{3}}$, $\varphi_{\bar{1}}$, $\varphi_{\bar{2}}$, $\varphi_{\bar{3}}$.



Rys. 1

Z dwunastu przemieszczeń tworzymy sześć wielkości q_j, będących wynikiem odkształcenia pręta, a nie jego przemieszczenia jako ciała sztywnego (por. [1], [3]):

$$\left.\begin{aligned} & q_1=\varphi_1-\varphi_{\bar{1}}, \quad q_2=\varphi_2+\frac{1}{l}(\delta_{\bar{3}}-\delta_3), \quad q_3=\varphi_3-\frac{1}{l}(\delta_{\bar{2}}-\delta_2), \\ & q_4=\frac{1}{l}(\delta_1-\delta_{\bar{1}}), \quad q_5=\varphi_{\bar{2}}+\frac{1}{l}(\delta_{\bar{3}}-\delta_3), \quad q_6=\varphi_{\bar{3}}-\frac{1}{l}(\delta_{\bar{2}}-\delta_2). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

W miejscu i kierunku przemieszczeń q_j działają następujące wielkości statyczne:

$$\left.\begin{aligned} & Q_1 = M_1, \quad Q_2 = M_2, \quad Q_3 = M_3, \\ & Q_4 = P_1 l, \quad Q_5 = M_{\bar{2}}, \quad Q_6 = M_{\bar{3}}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Między wielkościami q_j i Q_j zachodzi zależność liniowa

$$q = AQ, \tag{3}$$

gdzie A jest macierzą 6 x 6 liczb wpływowych $A_{\alpha\beta}$, zaś przez Q oraz q oznaczono macierze kolumnowe 6 x 1 wielkości Q_j oraz q_j. Ogólne wzory na obliczanie liczb $A_{\alpha\beta}$ zostały podane w pracach [1], [2], [3] i nie będą w tym miejscu powtarzane. Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie następującego zagadnienia.

Niech element p-q będzie jednym z kilku elementów, z których składa się pręt i-k. Końce tego elementu są pod działaniem sił brzegowych P_1^{pq}, P_2^{pq}, P_3^{pq}, M_1^{pq}, M_2^{pq}, M_3^{pq}, $P_{\bar{1}}^{pq}$, $P_{\bar{2}}^{pq}$, $P_{\bar{3}}^{pq}$, $M_{\bar{1}}^{pq}$, $M_{\bar{2}}^{pq}$, $M_{\bar{3}}^{pq}$, i doznają przemieszczeń δ_1^{pq}, δ_2^{pq},

$\delta_3^{pq}, \varphi_1^{pq}, \varphi_2^{pq}, \varphi_3^{pq}, \delta_{\bar{1}}^{pq}, \delta_{\bar{2}}^{pq}, \delta_{\bar{3}}^{pq}, \varphi_{\bar{1}}^{pq}, \varphi_{\bar{2}}^{pq}, \varphi_{\bar{3}}^{pq}$ (Rys.1). Oznaczając przez l^{pq} długość cięciwy p-q, tworzymy sześć wielkości q_j^{pg} i sześć wielkości Q_j^{pq}, analogicznych do wielkości q_j i Q_j dla całego pręta i-k. Cosinusy między osiami

$$k_{sr}^{pq} = \cos(x_s^{pq}, x_r) = \cos(x_s^{pq}, x_r), \quad s, r = 1, 2, 3$$

są znane. Dla elementu p-q zachodzi zależność liniowa

$$q^{pq} = A^{pq} Q^{pq}, \tag{4}$$

gdzie ${}_{pq}A^{pq}$ jest macierzą 6 x 6 liczb wpływowych, zaś q^{pq} oraz Q^{pq} są macierzami kolumnowymi 6 x 1.

Znając wyrazy macierzy A^{pq} dla wszystkich elementów p-q, z których składa się pręt i-k, należy wyznaczyć ma cierz A liczb wpływowych dla pręta i-k.

3. Zależności statyczne

Siły brzegowe działające na koniec i pręta i-k są statycznie równoważne siłom brzegowym działającym na koniec p elementu p-q i równoważą się z siłami brzegowymi działającymi na koniec q tego elementu, Korzystając z tego, wyznaczamy siły brzegowe elementu p-q przez siły brzegowe na końcu i, które z kolei można z równań równowagi dla pręta i-k wyrazić za pomocą wielkości Q_j^{pq}

Tworząc z sił brzegowych elementu p-q sześć wielkości Q_j^{pq}, dochodzimy do zależności liniowej

$$Q^{pq} = W^{pq} Q, \tag{5}$$

gdzie przez W^{pq} oznaczono macierz

$$W^{pq} = \begin{bmatrix}
k_{11}^{pq} & \xi_2^p k_{11}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{12}^{pq} & \xi_3^p k_{11}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{13}^{pq} & \xi_2^p k_{13}^{pq} - \xi_3^p k_{12}^{pq} & \xi_2^p k_{11}^{pq} - \xi_1^p k_{12}^{pq} & \xi_3^p k_{11}^{pq} - \xi_1^p k_{13}^{pq} \\
k_{21}^{pq} & \xi_2^p k_{21}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{22}^{pq} & \xi_3^p k_{21}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{23}^{pq} & \xi_2^p k_{23}^{pq} - \xi_3^p k_{22}^{pq} & \xi_2^p k_{21}^{pq} - \xi_1^p k_{22}^{pq} & \xi_3^p k_{21}^{pq} - \xi_1^p k_{23}^{pq} \\
k_{31}^{pq} & \xi_2^p k_{31}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{32}^{pq} & \xi_3^p k_{31}^{pq} - \xi_1^p {-k}_{33}^{pq} & \xi_2^p k_{33}^{pq} - \xi_3^p k_{32}^{pq} & \xi_2^p k_{31}^{pq} - \xi_1^p k_{32}^{pq} & \xi_3^p k_{31}^{pq} - \xi_1^p k_{33}^{pq} \\
0 & -\lambda^{pq} k_{13}^{pq} & +\lambda^{pq} k_{12}^{pq} & k_{11}^{pq} & -\lambda^{pq} k_{13}^{pq} & +\lambda^{pq} k_{12}^{pq} \\
-k_{21}^{pq} & -\xi_2^q k_{11}^{pq} + \xi_1^q {-k}_{12}^{pq} & -\xi_3^q k_{11}^{pq} + \xi_1^q {-k}_{13}^{pq} & -\xi_2^q k_{23}^{pq} + \xi_3^q k_{22}^{pq} & -\xi_2^q k_{11}^{pq} + \xi_1^q k_{12}^{pq} & -\xi_3^q k_{11}^{pq} + \xi_1^q k_{13}^{pq} \\
-k_{31}^{pq} & -\xi_2^q k_{31}^{pq} + \xi_1^q {-k}_{32}^{pq} & -\xi_3^q k_{21}^{pq} + \xi_1^q {-k}_{23}^{pq} & -\xi_2^q k_{33}^{pq} + \xi_3^q k_{32}^{pq} & -\xi_2^q k_{31}^{pq} + \xi_1^q k_{32}^{pq} & -\xi_3^q k_{31}^{pq} + \xi_1^q k_{33}^{pq}
\end{bmatrix}$$

i ponadto wprowadzono oznaczenia:

$$\xi_{i} = \frac{x_i}{l}, \quad \xi_{\bar{i}} = \frac{x_i}{l} - 1, \quad \lambda^{pq} = \frac{l^{pq}}{l}$$

4. Zależności geometryczne

Przyjmijmy, że element p-q jest odkształcalny i jego końce doznają przemieszczeń q_j^{pq} (rys. 2). Części i-p oraz q-k uważamy za doskonale sztywne. Końce pręta i-k doznają wówczas przemieszczeń δ_{1pq}, δ_{2pq}, δ_{3pq}, φ_{1pq}, φ_{2pq}, φ_{3pq}, $\delta_{\bar{1}pq}$, $\delta_{\bar{2}pq}$, $\delta_{\bar{3}pq}$, $\varphi_{\bar{1}pq}$, $\varphi_{\bar{2}pq}$, $\varphi_{\bar{3}pq}$, które można wyrazić przez wielkości q_j^{pq}. Tworząc sześć wielkości q_{jpq} według wzorów (1), dochodzimy do zależności

$$q_{pq} = \widetilde{W}^{pq} q^{pq} \tag{6}$$

gdzie przez q_{pq}, q^{pq} oznaczono macierze kolumnowe 6 x 1 natomiast $\widetilde{W}^{pq}$ jest macierzą transponowaną względem macierzy W^{pq}.

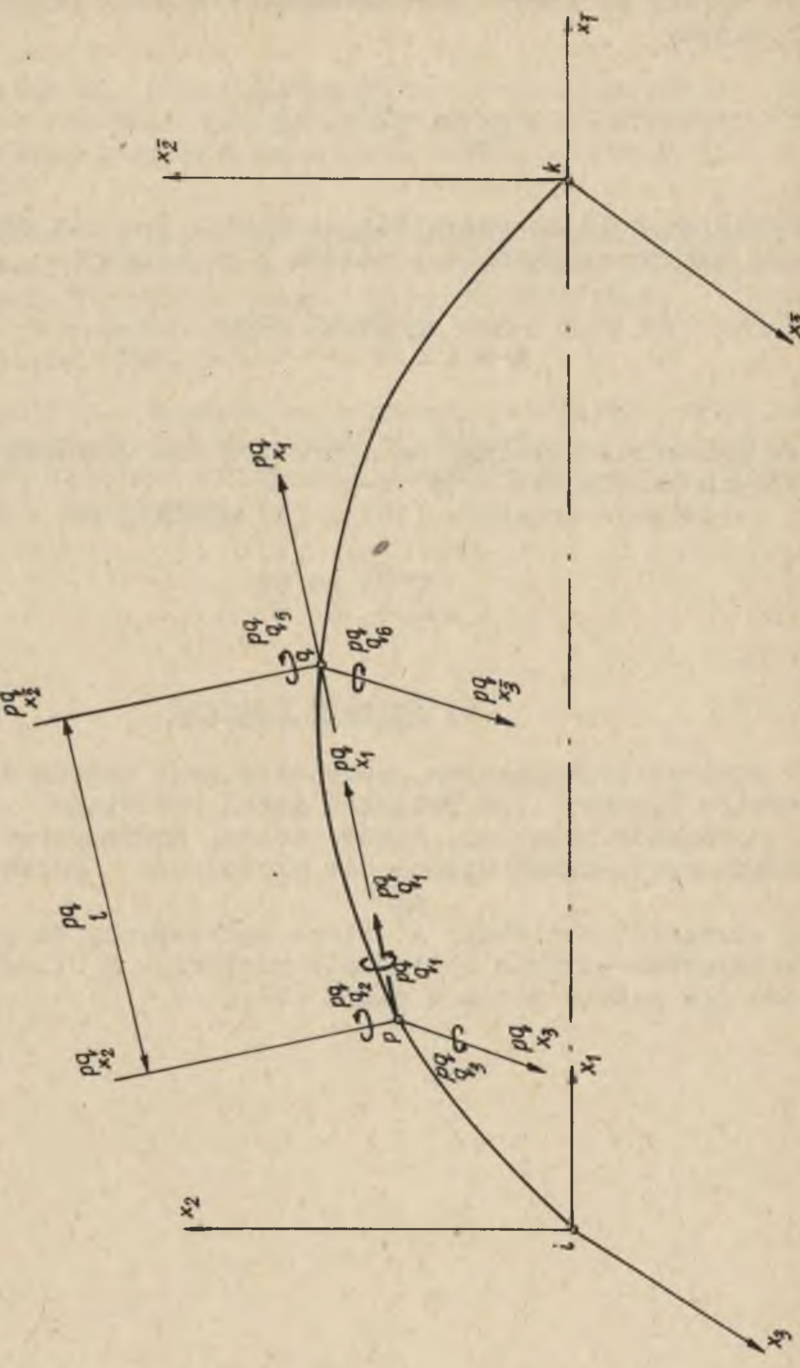
5. Rozwiązanie zagadnienia

W dalszym ciągu przyjmujemy, że jedynie element p-q jest odkształcalny. Zależność między wielkościami q_{jpq} a wielkościami Q_j ma postać

$$q_{pq} = A_{pq} Q, \tag{7}$$

gdzie A_{pq} jest nieznaną na razie macierzą 6 x 6 liczb wpływowych. Dla elementu p-q zachodzi związek

$$q^{pq} = A^{pq} Q^{pq} \tag{8}$$



Rys. 2

gdzie wyrazy macierzy A^{pq} są znane. Na mocy (8),(6),(5) otrzymujemy

$$q_{pq} = (\tilde{W}^{pq} A^{pq} W^{pq}) Q . \qquad (9)$$

Uważając kolejno wszystkie elementy p-q za odkształcalne, otrzymamy zgodnie z zasadą superpozycji

$$q = (\sum \tilde{W}^{pq} A^{pq} W^{pq}) Q , \qquad (10)$$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie elementy p-q z których składa się pręt i-k.

Z porównania związków (10) i (3) wynika, że

$$A = \sum \tilde{W}^{pq} A^{pq} W^{pq} . \qquad (11)$$

6. Wnioski końcowe

W szeregu praktycznych przypadków pręt składa się z elementów typowych (na przykład gałąź rurociągu składa się z odcinków prostych, łuków, kolan, kompensatorów itp. W takich przypadkach opłaca się ułożyć dla poszczególnych elementów macierze A^{pq} liczb wpływowych, co pozwala na stosunkowo szybkie obliczanie macierzy A liczb wpływowych dla całego pręta z wzoru (11).

LITERATURA

[1] Cieśla S.: Rozwiązywanie ram przestrzennych o prętach dowolnie zakrzywionych metodą równoważenia momentów. Archiwum Inżynierii Lądowej, Tom VIII Z. 4 1962.

[2] Cieśla S.: O pewnym ogólniejszym ujęciu metody równoważenia momentów. Referat wygłoszony na sesji naukowej "Specjalne konstrukcje przemysłowe", Gliwice 27-29 września 1962, Zeszyty Nauk. Pol. Śl. Nr 67, Gliwice 1962.

[3] Cieśla S.: Zastosowanie metody kolejnych przybliżeń do wyznaczania wielkości statycznych w przestrzennych układach prętowych. Rozprawa doktorska, Gliwice 1963, maszynopis.