

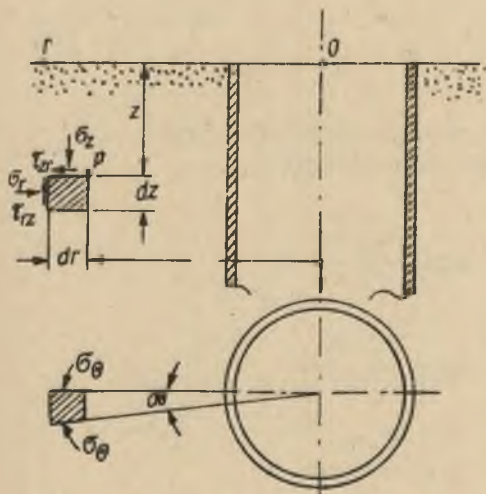
Prof. dr inż. JÓZEF LEDWOŃ  
Mgr inż. ZBIGNIEW KOBRYNOWICZ

Katedra Budowli Przemysłowych

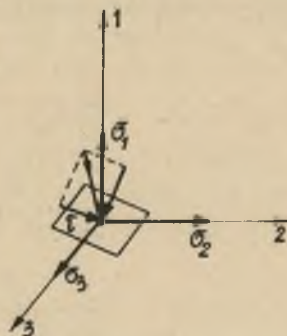
PARCIE GRUNTU NA ŚCIANKI WALCOWE

Teoria parcia gruntów na ściany walcowe jest mało zbadana i brak jest użytecznie-inżynierskiego jej przedstawienia.

W ujęciu Coulombowskim zagadnienie to zostało podane przez K. Steinfelda (1953) i J. Ledwoń (1960). W. Be-rezancew (1953) przedstawił rozwiązanie w teorii równowagi granicznej ośrodka.



Rys. 1



Rys. 2

W ujęciu tym jest to zagadnienie statycznie wyznaczalne, a więc ulega znacznym uproszczeniom przy tak zwanym zupełnym stanie granicznym.

Rozwiązanie jest przedstawione w współrzędnych cylindrycznych (rys. 1). Warunki równowagi mają postać

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Poza układem równań (1) musi być spełniony jeszcze jeden warunek

$$\max \left\{ |\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varrho \right\} = C \text{ lub } 0$$

Rozważania zostaną przeprowadzone w układzie trzech głównych naprężeń przy założeniu

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (2)$$

Przedstawiając warunek (3) w tym układzie (rys. 2) i szukając wartości ekstremalnych otrzymujemy:

$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

$$\text{i } \max \left\{ |\tau_n| - \sigma_n \operatorname{tg} \varrho \right\} = \frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (3)$$

stąd warunek

$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = c \quad (4)$$

lub

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{ctg} \varrho} = \sin \varrho \quad (5)$$

W zagadnieniu przestrzennym musi być spełniony następujący warunek:

$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = c \quad (6)$$

lub

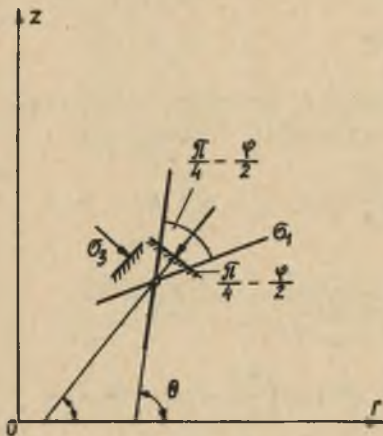
$$\frac{1}{\cos \varrho} \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varrho \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = c \quad (7)$$

Prowadzi to do zrównania naprężenia głównego  $\sigma_2$  z  $\sigma_3$  albo  $\sigma_2$  z  $\sigma_1$ . Stan naprężenia i stan odkształcenia zrównoważonego układu są osiowo symetryczne, stąd  $\sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0$ .

Naprężenie  $\sigma_{\theta}$  jest więc głównym a mianowicie  $\sigma_{\theta} = \sigma_2$ .  $\sigma_r$  i  $\sigma_2$  działają w przekrojach południkowych. Możemy rozważyć dwa przypadki:

1.  $\sigma_2 = \sigma_3$  - naprężenie  $\sigma_r$  będzie zawsze mniejsze od  $\sigma_2$ , wystąpi przesunięcie na zewnątrz - w kierunku od osi symetrii.

2.  $\sigma_2 = \sigma_1$  - naprężenie  $\sigma_r$  jest pierwszym naprężeniem głównym, wystąpi przesunięcie do wewnątrz - w kierunku do osi symetrii.



Rys. 3

Pierwszy przypadek będzie dobrze odpowiadał odporowi a drugi parciu ziemi. Dla wyznaczenia czterech składowych naprężeń: służą dwa równania równowagi i dwa warunki równowagi granicznej (4) i (6) lub (4) i (7).

Rozpatrzmy przekrój południkowy w przyjętym układzie współrzędnych oraz punkt p ośrodka gruntowego.

Wprowadzając za W.W. Sokołowskim

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \sin \varrho} \quad (8)$$

i wykorzystując zależności:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma(1 + \sin \varphi) - c \operatorname{ctg} \varrho \\ \sigma_3 &= \sigma(1 - \sin \varphi) - c \operatorname{ctg} \varrho \end{aligned} \quad (9)$$

możemy naprężenia w punkcie p przedstawić w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma(1 + \sin \varrho \cos 2\theta) - c \operatorname{ctg} \varrho \\ \sigma_2 &= \sigma(1 - \sin \varrho \cos 2\theta) - c \operatorname{ctg} \varrho \\ \tau_{rz} &= \sigma \sin \varrho \sin 2\theta \\ \sigma_v &= \sigma(\pm \sin \varrho) - c \operatorname{ctg} \varrho \end{aligned} \quad (10)$$

Znak (+) odpowiada parciu (-) - odporowi gruntu. Podstawiając (10) do układu 1 po przekształceniu otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin \theta \right] + 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \frac{\partial \theta}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} \sin \theta + \\ & + \frac{\sigma}{r} \left[ \sin(\theta + \varrho) \pm \cos \theta \right] \operatorname{tg} \varrho \frac{1 \pm \sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{\gamma \sin(\theta + \varrho)}{\cos \varrho} \\ & \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial r} \sin(\theta + \varrho) - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \cos(\theta + \varrho) \right] - 2\sigma \operatorname{tg} \varrho \left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} \cos |\theta + \varrho| - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \theta}{\partial z} \cos(\theta + \varrho) \pm \frac{\sigma}{r} \left[ \sin(\theta + \varrho) \pm \cos \theta \right] \operatorname{tg} \varrho \cdot \frac{1 \pm \sin \varrho}{\cos \varrho} = -\frac{\gamma \cos \theta}{\cos \varrho} \right. \end{aligned}$$

Wykorzystując, że wyrażenia stojące w nawiasie pierwszych dwóch członów równań przedstawiają sobą pochodne od  $\delta$  i  $\theta$  względem łuku pierwszej rodziny (w pierwszym równaniu) i drugiej rodziny (w drugim równaniu) linii poślizgu.

Oznaczając przez  $S_1$  i  $S_2$  długości obydwu łuków otrzymamy:

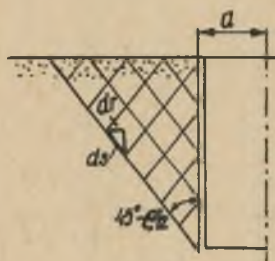
$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \delta}{\partial S_1} + 2\delta \operatorname{tg} \varrho \frac{\partial \theta}{\partial S_1} + \\ & + \frac{\delta}{r} \left[ \sin(\theta + \varrho) \pm \cos \theta \right] \cdot \operatorname{tg} \varrho \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} = \frac{\gamma \sin(\theta + \varrho)}{\cos \varrho} \\ & \frac{\partial \delta}{\partial S_2} - 2\delta \operatorname{tg} \varrho \frac{\partial \theta}{\partial S_2} \pm \\ & \pm \frac{\delta}{r} \left[ \sin(\theta + \varrho) \pm \cos \theta \right] \operatorname{tg} \varrho \cdot \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} = - \frac{\gamma \cos \theta}{\cos \varrho} \end{aligned} \right\} (12)$$

W równaniach tych górne znaki odpowiadają deformacji skierowanej od osi 2 a dolne do osi 2. Rozwiązanie tych równań podaje literatura.

Zajmiemy się uproszczonymi formami zagadnienia, które pozwolą na ułatwienie rozwiązania i otrzymanie wielkości przybliżonych.

Zakładamy, że linie ześlizgu są liniami prostymi nachylonymi do osi  $\theta_r$  pod kątem  $\frac{3}{4} \pi - \frac{\varrho}{2}$ ,  $0 = - \left| \frac{\pi + \varrho}{4} \right| = \text{const.}$

Pierwsze równanie z układu (12) otrzymuje postać:



Rys. 4

$$\frac{d\delta}{dS_1} - 2 \frac{\delta}{r} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right) \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right) = - \frac{\gamma \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right)}{\sin \varrho} \quad (13)$$

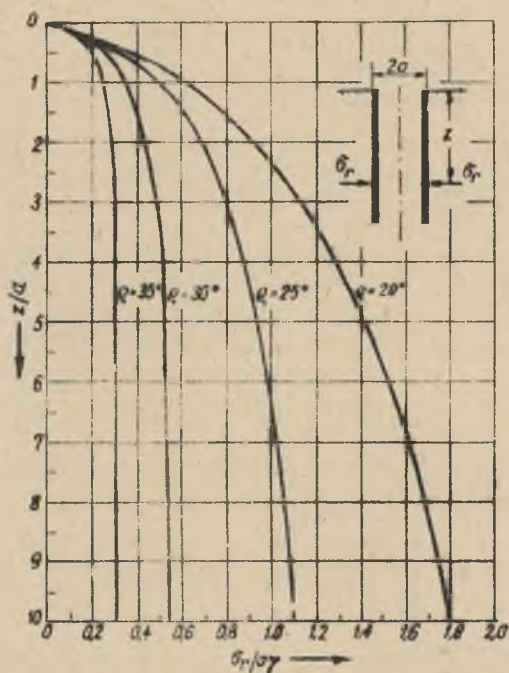
wprowadzając

$$\lambda = 2 \operatorname{tg} \varrho \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2} \right) \quad (14)$$

otrzymamy

$$\frac{d\delta}{dr} - \lambda \frac{\delta}{r} + \frac{\gamma}{\cos \varrho} = 0 \quad (15)$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja  $\delta = C r^\lambda + \frac{\gamma r}{(\lambda-1) \cos \varrho}$



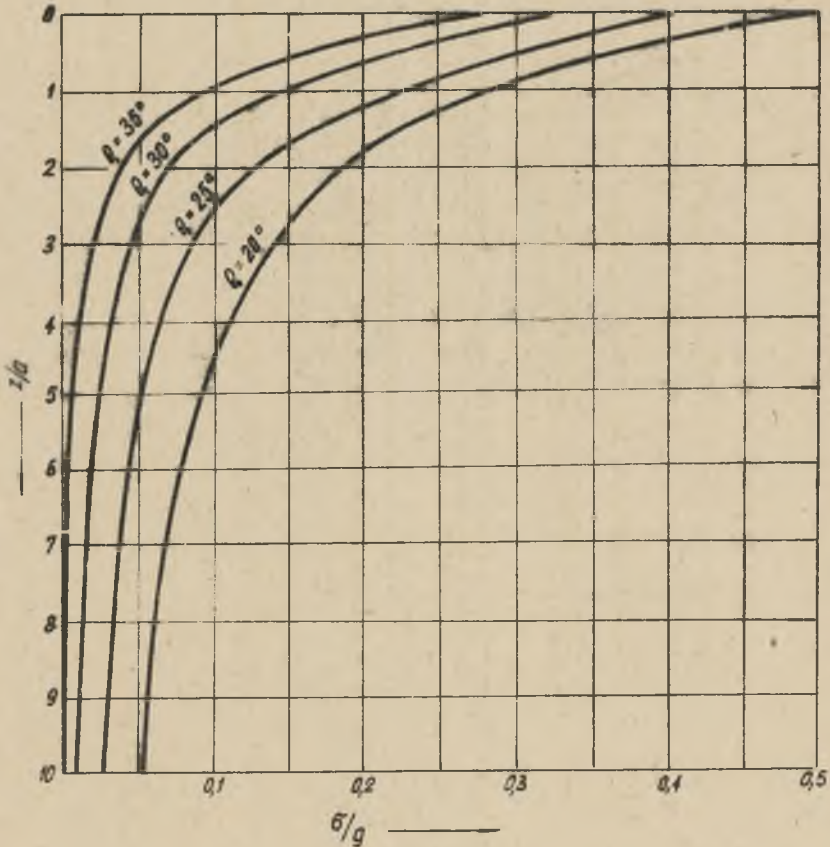
Rys. 5

Naprężenia składowe mają postać:

$$\sigma_r = C(1-\sin\varphi) r^\lambda + \gamma_r \frac{1-\sin\varphi}{(\lambda-1)\cos\varphi} - c \operatorname{ctg}\varphi \quad (16)$$

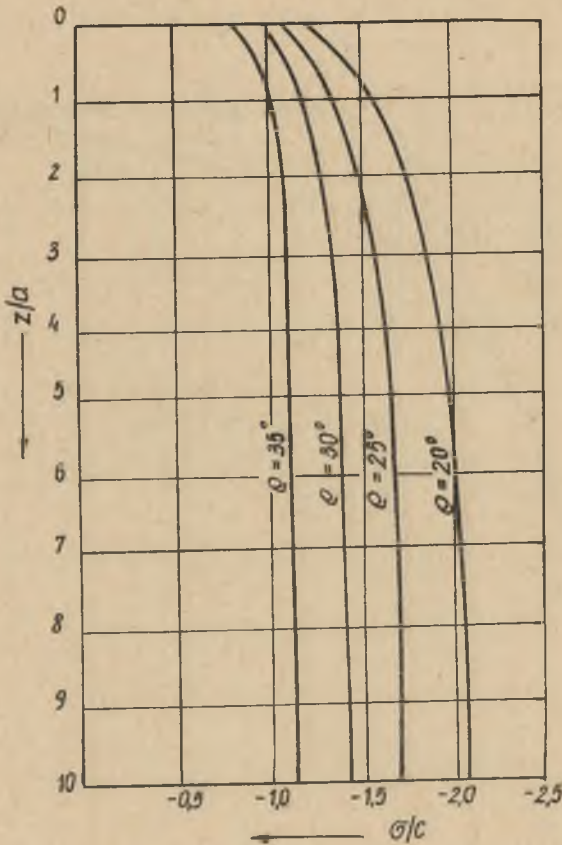
$$\sigma_2 = \sigma_\nu = c(\sin\varphi+1) r^\lambda + \gamma_r \frac{1+\sin\varphi}{(\lambda-1)\cos\varphi} - c \operatorname{ctg}\varphi$$

$$\tau_{rz} = 0$$



Rys. 6

Oznaczając przez  $2a$  - położenie punktu przecięcia rozpatrywanej linii ześlizgu ze ścianą i przez  $r_s$  - położenie punktu przecięcia tej linii z naziemem  $\tau_s = a + 2a \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2} \right)$ , dla określenia stałej  $C$  skorzystamy z warunku  $\sigma_2 (r = r_s) = g$ .



Rys. 7

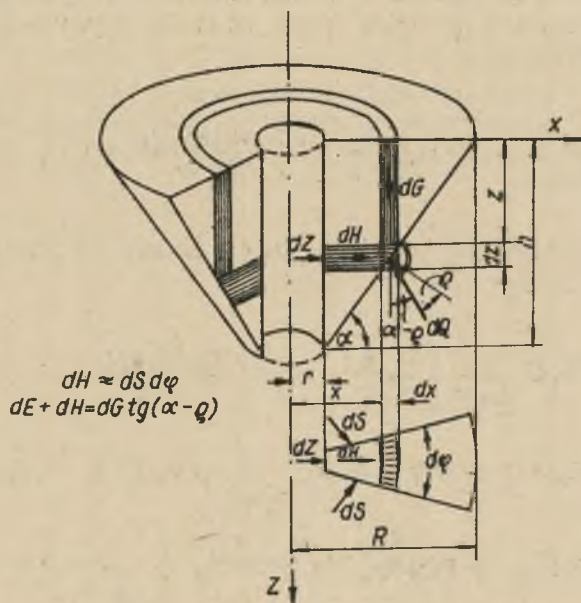


Stąd ciśnienie na ściankę wynosi dla ( $r = a$ )

$$z = \gamma a \frac{\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2} \right|}{-1} \left[ 1 - \left( \frac{a}{r_s} \right)^{\lambda-1} \right] + \xi \left( \frac{a}{r_s} \right)^{\lambda} +$$

$$+ c \operatorname{ctg} \varrho \left[ \left( \frac{a}{r_s} \right)^{\lambda} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2} \right) - 1 \right] \quad (17)$$

Załączone wykresy pozwalają wyznaczyć ciśnienie poziome od ciężaru własnego, obciążenia naziemem przy uwzględnieniu wpływu spójności  $c$  dla różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego.



Rys. 8

Podobny związek można dla oporu gruntu wyprowadzić, rozpatrując drugie równanie układu (12).

$$Z_{pz} = \gamma a \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right)}{\omega + 1} \left[ \left(\frac{r_s}{a}\right)^{\omega+1} - 1 \right] + \quad (18)$$

$$+ g \left(\frac{r_s}{a}\right)^{\omega} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right) + c \operatorname{ctg}\varrho \left[ \left(\frac{r_s}{a}\right)^{\omega} \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right) - 1 \right]$$

gdzie:

$$\omega = 2 \operatorname{tg}\varrho \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varrho}{2}\right) \quad r_s = a + 2 a \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varrho}{2}\right)$$

Z warunku równowagi i geometrycznych związków w oparciu o założenia coulombowskie zostały wyprowadzone równania na ciśnienie

$$Z = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}\varphi} \left[ \frac{h}{r} Z + 2 \operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{r} z^2 \right] \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{tg}\varphi} - \lambda_s \left( \frac{h}{r} Z - \frac{1}{r} z^2 \right) \quad (19)$$

i dla parcia gruntu na pas powierzchni bocznej o szerokości jednostkowej

$$Z_s = \frac{h^2 \gamma}{Z} \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \left[ \left( \frac{1}{3} \frac{h}{r} + \operatorname{tg}\varphi \right) \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{tg}\varphi} - \lambda_s \frac{h}{s_r} \right] \quad (20)$$

Położenie płaszczyzny odłamu otrzymamy z warunku  $\frac{d Z_s}{d \varphi} = 0$

$$\operatorname{tg}^3 \varphi \left( \lambda_s \frac{h}{r} \operatorname{tg}\varrho - 3(+\operatorname{tg}^2 \varphi) 2 \lambda_s \frac{h}{r} + 6 \operatorname{tg}\varrho - 2 \frac{h}{3} \right) + \operatorname{tg}\varphi \left( 3 \frac{h}{r} \operatorname{tg}\varrho + 3 + \frac{\lambda_s^{-1}}{\operatorname{tg}\varrho} \frac{h}{r} + 2 \frac{h}{r} \right) = 0 \quad (21)$$

Kąt naczylenia płaszczyzny odłamu zależy nie tylko od współczynnika tarcia, lecz również od proporcji pomiędzy promieniem i głębokością otworu i od wartości  $\lambda_s$ .

Wartość  $\lambda_s$  zależna jest od gęstości podparcia i ściśliwości gruntu.

W przypadku parcia gruntu będzie mieścić się w granicach  $\lambda_0 < \lambda_s \leq 1$  a odporu  $0 < \lambda_s \leq \lambda_0$ .

Dla wyznaczenia nachylenia płaszczyzny poślizgu  $\varphi$  podano nomogram, gdzie  $\varphi$  przy  $\lambda_s = 1$  dla różnych wartości  $\varrho$  w zależności od  $\frac{h}{r}$  zostało przedstawione.

Dla odporu gruntu wartości ekstremalne otrzymamy przy  $\lambda_s = 0$ .

Wartość odporu wynosi wtedy dla powierzchni o jednostkowej szerokości

$$Z_p = \frac{\gamma h^2}{2} \left(1 + \frac{h}{3r \operatorname{tg} \varphi}\right) \frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varrho)}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (22)$$

Wartość ekstremalną otrzymamy z wartości  $\frac{dZ_p}{d} = 0$  skąd równania sześciennego można wyznaczyć.

Należy zaznaczyć, że wartości ekstremalne, tylko wówczas są realne gdy przesunięcia są dostatecznie duże.