ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ

Nr 115 Budownictwo z. 14 1964

Mgr inż. SZCZEPAN WYRA

Katedra Mechaniki i Wytrzymałości Materiałów

TRANSFORMACJA MACIERZY LICZB WPŁYWOWYCH PRĘTA PRZESTRZENNEGO

1. Obliczenie statycznie niewyznaczalnego układu prętowego metodą sił składa się z dwóch części:

1) obliczenia współczynników równań kanonicznych, czyli tzw. liczb wpływowych,

2) rozwiązania układu równań liniowych.

Macierz liczb wpływowych zależy od przyjętego układu podstawowego, nie jest zatem dla rozważanego układu określona jednoznacznie. Rzeczą istotną dla praktyki obliczeniowej jest taki dobór układu podstawowego, aby macierz liczb wpływowych miała postać pozwalającą na szybkie otrzymanie rozwiązania układu równań.

Referat traktuje o uproszczeniach w budowie macierzy liczb wpływowych pręta przestrzennego, należącego do klasy ustrojów liniowo sprężystych. W rozważaniach duże usługi oddały wzory transformacyjne macierzy liczb wpływowych.

2. Dla pręta przestrzennego AO, obustronnie doskonale utwierdzonego, poddanego działaniu wpływów zewnętrznych przyjęto układ zastępczy w postaci wspornika (rys.1). Równania kanoniczne metody sił, przedstawiające zależność między przemieszczeniami końca wspornika a odpowiadającymi im siłami nadliczbowymi, można przedstawić w zapisie macierzowo-wskaźnikowym z uwzględnieniem konwencji sumacyjnej:

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & B_{\alpha k} \\ B_{\beta i} & C_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_p \\ P_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_\alpha \\ U_i \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha} \\ C_{ik} = C_{ki} \end{matrix} \tag{1}$$

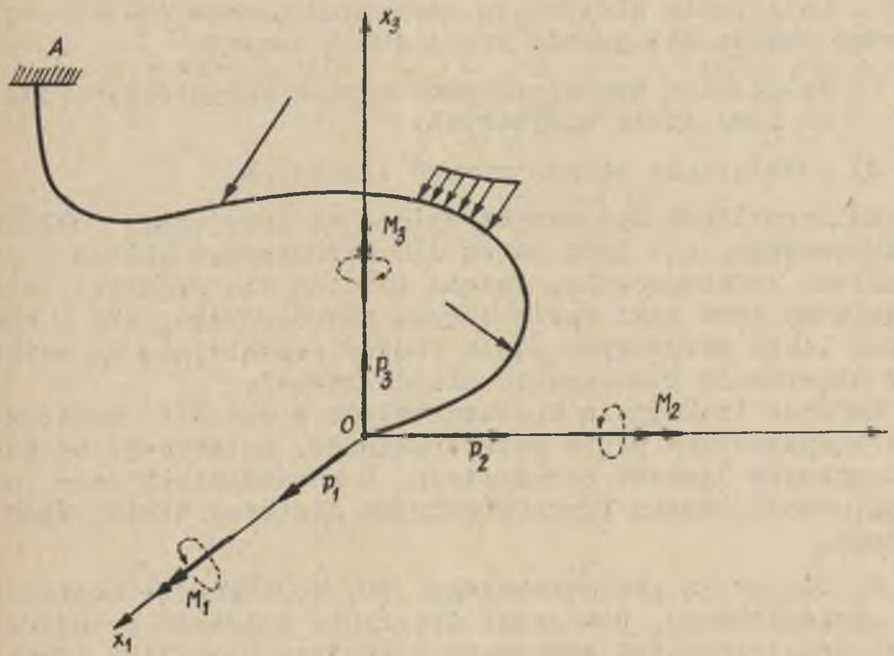
$$(\alpha, \beta, i, k = 1,2,3)$$

gdzie:

M_β, P_k – są składowymi wektora momentu i siły w zamocowaniu O,

ω_α, U_i – są składowymi wektora małego obrotu i przesunięcia punktu O,

$A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha k}$, C_{ik} – są liczbami wpływowymi.



Rys. 1

Transformacja sił nadliczbowych zgodnie z relacją

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_\alpha \\ \overline{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\alpha\beta}^{-1} & 0 \\ 0 & \delta_{ik} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\beta \\ P_k \end{bmatrix} \left(\begin{matrix} \delta_{ik}=0 \text{ dla } i \neq k \\ \delta_{ik}=1 \text{ dla } i \neq k \end{matrix} \right) \quad (2)$$

prowadzi do zmiany liczb wpływowych, którą opisuje wzór

$$\begin{bmatrix} A_{\alpha\beta} & B_{\alpha k} \\ \bar{B}_{\beta i} & C_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{\mu\alpha} & 0 \\ 0 & \delta_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mu\nu} & B_{\mu s} \\ B_{\nu r} & C_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{\nu p} & 0 \\ 0 & \delta_{sk} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Wprowadzając macierz $[\Phi_{\alpha\beta}]$ postaci

$$[\Phi_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \sin\varphi_3 \\ 0 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_3 \end{bmatrix} \tag{4}$$

możemy tak dobrać kąty φ_1, φ_2, φ_3 aby wyrazy niediagonalne macierzy $[\bar{A}_{\alpha\beta}]$ były równe zeru.
Kąty te obliczamy z wzorów

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\,\varphi_1 &= -\frac{A_{23}}{A_{33}} \\ \mathrm{tg}\,\varphi_2 &= -\frac{A_{12} + A_{13}\,\mathrm{tg}\varphi_1}{A_{22} + A_{23}\,\mathrm{tg}\varphi_1} \\ \mathrm{tg}\,\varphi_3 &= -\frac{A_{13}\cos\varphi_2 + A_{23}\sin\varphi_2}{A_{11}} \end{aligned} \tag{5}$$

zaś elementy diagonalne macierzy $[\bar{A}_{\alpha\beta}]$ przyjmują postać

$$\begin{aligned} \bar{A}_{11} &= A_{11}\cos^2\varphi_2 + A_{12}\sin 2\varphi_2 + A_{22}\sin^2\varphi_2 \\ \bar{A}_{22} &= A_{22}\cos^2\varphi_1 - A_{33}\sin^2\varphi_1 \\ \bar{A}_{33} &= A_{33}\cos^2\varphi_3 - A_{11}\sin^2\varphi_3 \end{aligned} \tag{6}$$

Transformując wielkości nadliczbowe zgodnie z relacją

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_\alpha \\ \tilde{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \psi_{ik}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\alpha \\ P_k \end{bmatrix} \tag{7}$$

można w podobny sposób zdiagonalizować macierz $[\tilde{C}_{ik}]$.

Dokonajmy zmiany wielkości nadliczbowych przenosząc siły na trzy proste skośne w przestrzeni

$$\begin{bmatrix} \tilde{M}_\alpha \\ \tilde{P}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\alpha p} & T_{\alpha k} \\ 0 & \delta_{ok} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\beta \\ P_k \end{bmatrix} \tag{8}$$

przyjmując

$$T_{\alpha k} \overset{df}{=\!=} \varepsilon_{\alpha kl} \cdot \overset{k}{x}_i \tag{9}$$

$\varepsilon_{\alpha kl} = 0$ dla $\alpha = k,\ k=l,\ \alpha=l$

$\varepsilon_{\alpha kl} = +1$ przy permutacji parzystej

$\varepsilon_{\alpha kl} = -1$ przy permutacji nieparzystej

Następuje zmiana liczb wpływowych wg wzoru

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{\alpha\beta} & \tilde{B}_{\alpha k} \\ \tilde{B}_{pi} & \tilde{C}_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{\mu\alpha} & 0 \\ T_{\mu i} & \delta_{ri} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\mu\nu} & B_{\mu s} \\ B_{\nu r} & C_{rs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{\nu\beta} & T_{\nu k} \\ 0 & \delta_{sk} \end{bmatrix} \tag{10}$$

Kładąc warunki na zniknięcie niediagonalnych wyrazów macierzy $[\tilde{B}_{\alpha k}]$ otrzymujemy współrzędne prostych

$$\dot{x}_2 = \frac{A_{22}\,B_{31} - A_{23}\,B_{21}}{A_{22}\,A_{33} - A_{23}^2}, \quad \dot{x}_3 = \frac{A_{23}\,B_{31} - A_{32}\,B_{21}}{A_{22}\,A_{33} - A_{23}^2} \tag{11}$$

$$\overset{2}{x}_1 = \frac{A_{13}\,B_{12} - A_{11}\,B_{32}}{A_{11}\,A_{23} - A_{12}^2}, \quad \overset{2}{x}_3 = \frac{A_{33}\,B_{12} - A_{13}\,B_{32}}{A_{11}\,A_{33} - A_{13}^2}$$

$$\overset{3}{x}_1 = \frac{A_{11}\cdot B_{23} - A_{12}\,B_{13}}{A_{11}\cdot A_{22} - A_{12}^2}, \quad \overset{3}{x}_2 = \frac{A_{12}\,B_{23} - A_{22}\,B_{13}}{A_{11}\cdot A_{22} - A_{12}^2} \tag{11}$$

3. W oparciu o wzory transformacyjne można drogą formalnych przekształceń doprowadzić macierz sprężystości do postaci diagonalnej.

Należy w tym celu:

1) zdiagonalizować macierz $[A_{\alpha\beta}]$ przez dobór kątów φ_i
2) wyeliminować wszystkie wyrazy $[B_{\alpha k}]$ przez odpowiedni dobór elementów macierzy transformacji $[T_{\alpha k}]$
3) zdiagonalizować macierz $[C_{ik}]$ przez dobór kątów φ_i

4. Omówiony sposób eliminacji liczb wpływowych może być wykorzystany do obliczania statycznie niewyznaczalnych płaskich i przestrzennych układów prętowych.

LITERATURA

[1] Asplund S.O.: Zastosowanie algebry macierzy w statyce konstrukcji, Wyd. PAN, Wrocław, Warszawa Kraków, 1964.

[2] Budzianowski Z.: Biegun sprężysty jako reduktor równań sprężystości, Wrocław 1955.

[3] Nowacki W.: Mechanika budowli, t. I, PWN, Warszawa 1957.

[4] Woźniak Cz.: O matematycznych podstawach teorii układów Clapeyrona, Arch. Inż. Ląd. T.IX - Z 1/1963.

[5] Гантмахер Ф.Р.: Теория матриц, Москва 1954.