ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1966
Seria: BUDOWNICTWO z. 19 Nr kol. 170

WOJCIECH SITKO

OBLICZANIE RUROCIĄGÓW SAMOKOMPENSACYJNYCH Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU PODWIESZEŃ SPRĘŻYSTYCH

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposób obliczania rurociągów samokompensacyjnych, o pośrednich podwieszeniach sprężystych, z uwzględnieniem wpływu obciążeń mechanicznych i niemechanicznych.

Zastosowanie prostej metody eliminacji niewiadomych sprowadza obliczenia każdego schematu (dowolnej konfiguracji przestrzennej), niezależnie od liczby pośrednich podparć sprężystych, do rozwiązania układu równań liniowych o sześciu niewiadomych (niewiadomymi są uogólnione siły i przemieszczenia występujące w skrajnych przekrojach pręta).

Podstawowe relacje podano w formie macierzowej z zastosowaniem wskaźnikowego sposobu notowania sum.

Wstęp

W pracy przedstawiono zagadnienie obliczania rurociągów samokompensacyjnych, poddanych działaniu obciążeń mechanicznych[1] i niemechanicznych[2], z uwzględnieniem wpływu pośrednich podwieszeń sprężystych.

---

[1] Obciążenia zewnętrzne.

[2] Wpływy termiczne i wpływy osiadania podpór.

Zastosowanie prostej metody eliminacji niewiadomych sprowadza obliczenia każdego schematu (dowolnej konfiguracji przestrzennej), niezależnie od liczby pośrednich podparć sprężystych, do rozwiązania układu równań liniowych o sześciu niewiadomych.

Założono, podobnie jak i w innych pracach dotyczących statyki rurociągów, liniową sprężystość układu oraz pominięto, jako drugorzędny, wpływ sił tnących i osiowych na stan odkształcenia. Podstawowe związki i relacje przedstawiono w formie macierzowej z zastosowaniem wskaźnikowego sposobu notowania sum (obowiązuje sumowanie podług wskaźnika powtarzającego się, przy czym $\alpha, \beta, \gamma, \mu = 1, 2, 3$).

Proponowany sposób obliczeń przygotowany został z myślą o zastosowaniu elektronowych maszyn cyfrowych.

Stosowane oznaczenia

x_α, x_α' - współrzędne prostokątne,

r, φ - współrzędne biegunowe,

p - intensywność obciążenia rozłożonego,

P_α^i - wektor siły, równoległy do osi x_α, przyłożony w punkcie i,

M_α^i - wektor momentu, równoległy do osi x_α, przyłożony w punkcie i,

u_α^i - wektor przemieszczenia punktu i, równoległy do osi x_α,

ω_α^i - wektor obrotu przekroju poprzecznego w punkcie i,

$\bar{u}_\alpha^i$ - wektor przemieszczenia punktu i od wpływu temperatury; przesunięcie obliczamy dla układu bez pośrednich podwieszeń z tak zmodyfikowanymi podporami skrajnymi aby umożliwiały swobodną dylatację rurociągu,

$\overset{i}{\underline{u}}_{\alpha}$ - wektor wymuszonego przesunięcia punktu i,

$\overset{i}{\underline{\omega}}$ - wektor wymuszonego obrotu przekroju w punkcie i,

$c, \tilde{c}$ - współczynniki charakteryzujące sprężystą podatność podpory.

1. Wzory transformacyjne dla dowolnego elementu rurociągu

Nazwijmy:

e l e m e n t e m rurociągu jego część liniową lub łukową, o stałych sztywnościach przekroju poprzecznego, obciążoną układem znanych sił zewnętrznych,

g a ł ę z i ą - układ złożony z elementów rurociągu zawarty pomiędzy dwoma węzłami lub węzłem a podporą,

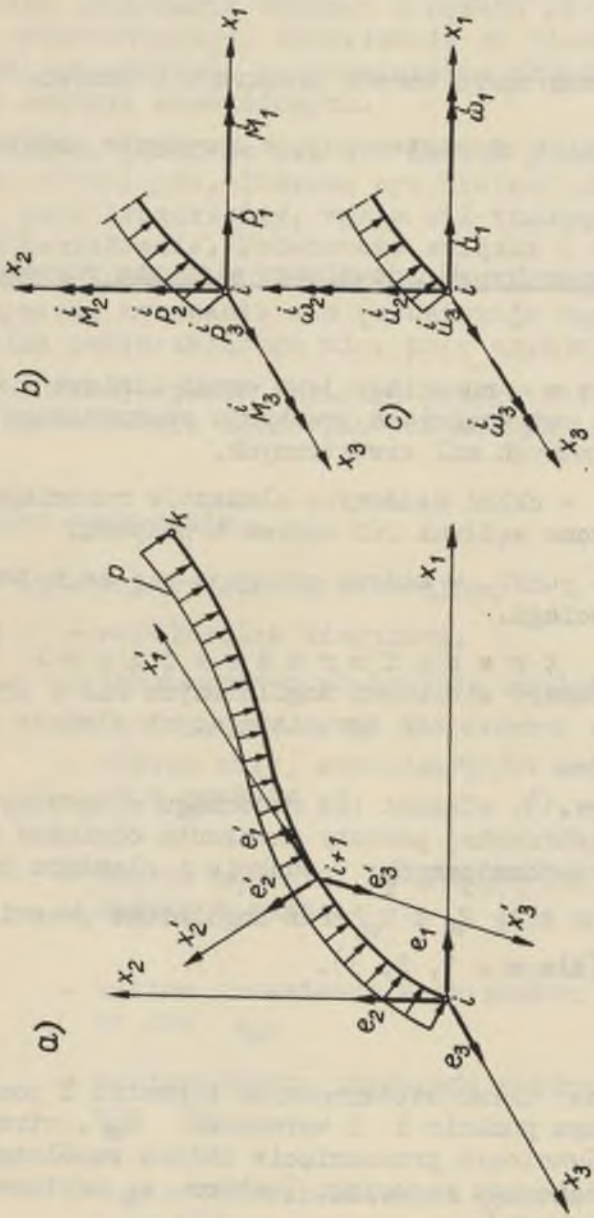
w ę z ł e m - punkt, w którym zbiegają się co najmniej trzy gałęzie rurociągu.

W z o r a m i t r a n s f o r m a c y j n y m i nazwiemy relacje wiążące wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń w dwóch przekrojach ograniczających element rurociągu.

Rozpatrzmy (rys.1), element ik rurociągu o dowolnej konfiguracji przestrzennej poddany działaniu obciążeń mechanicznych i niemechanicznych; w punkcie i elementu przełożone są uogólnione siły $\overset{i}{P}_{\alpha}$ i $\overset{i}{M}_{\alpha}$ oraz uogólnione przemieszczenia $\overset{i}{u}_{\alpha}$, $\overset{i}{\omega}_{\alpha}$ (dla $\alpha = 1, 2, 3$).

Oznaczmy przez:

x_{α} - podstawowy układ współrzędnych elementu o początku w skrajnym punkcie i i wersorach e_{α}, otrzymany przez równoległe przesunięcie układu wspólnego dla całego schematu rurociągu (wektor e_2 usytuowany jest pionowo).


a)
b)
c)
p
k
x_1
x_2
x_3
x_1'
x_2'
x_3'
e_1
e_2
e_3
e_1'
e_2'
e_3'
i
i+1
M_1
M_2
M_3
p_1
p_2
p_3
ω_1
ω_2
ω_3
α_1
α_2
α_3

Rys. 1

x'_α - układ współrzędnych o początku w dowolnym punkcie i+1 elementu i wersorach $e_{\alpha'}$; wektor $e_{1'}$, jest styczny do krzywej, $e_{2'}$ leży na normalnej głównej a $e_{3'}$ - na binormalnej.

Cosinusy kątów zawartych pomiędzy wersorami e_α i $e_{\alpha'}$ określono jako:

$$k_{\alpha'\beta} \overset{def}{=} \cos(e_{\alpha'}, e_\beta) \tag{1.1}$$

Korzystając ze wzorów podanych w [7] str. 38 można podać następujące związki pomiędzy uogólnionymi siłami i przemieszczeniami, w przekrojach i i i+1:

$$\overset{i+1}{P_\alpha} = \overset{i}{P_\alpha} + \int_0^s p_\alpha(\lambda)d\lambda. \tag{1.2}$$

$$\overset{i+1}{M_\alpha} = \overset{i}{M_\alpha} + T_{\alpha\beta}\overset{i}{P_\beta} + T_{\alpha\beta}\int_0^s p_\beta(\lambda)d\lambda - \int_0^s T_{\alpha\beta}(\lambda)p_\beta(\lambda)d\lambda \tag{1.3}$$

$$\overset{i+1}{\omega_\alpha} = \overset{i}{\omega_\alpha} + \int_0^s \gamma_\alpha(\lambda)d\lambda \tag{1.4}$$

$$\overset{i+1}{u_\alpha} = \overset{i}{u_\alpha} + T_{\alpha\beta}\overset{i}{\omega_\beta} + T_{\alpha\beta}\int_0^s \gamma_\beta(\lambda)d\lambda - \int_0^s T_{\alpha\beta}(\lambda)\,\gamma_\beta(\lambda)d\lambda \tag{1.5}$$

W powyższych wzorach:

$$T_{\alpha\beta} \overset{def}{=} \varepsilon_{\alpha\beta\nu}\, x_\nu \tag{1.6}$$

gdzie: $\varepsilon_{\alpha\beta\nu}$ jest symbolem RICCIEGO.

Jednostkowy kąt obrotu γ_α przekroju poprzecznego, prostopadłego do osi przekroju, określa relacja:

$$\gamma_\alpha = - S_{\alpha\beta} \; M_\beta \tag{1.7}$$

przy czym:

$$S_{\alpha\beta} = k_{\alpha 1'} \, k_{\beta 1'} \, S_{1'1'} + k_{\alpha 2'} \, k_{\beta 2'} \, S_{2'2'} + k_{\alpha 3'} \, k_{\beta 3} \, S_{3'3'} \tag{1.8}$$

gdzie, dla cienkościennego przekroju pierścieniowego:

$$S_{1'1'} = \frac{1}{GJ_o} \cong \frac{1,3}{EI}, \quad S_{2'2'} = \frac{1}{EI}, \quad S_{3'3'} = \frac{1}{\varkappa EI} \tag{1.9}$$

symbolem $\varkappa$ oznaczono liczbę KARMANA.

Eliminując ze wzorów 1.4 i 1.5 γ_α oraz przyporządkowując wielkościom uogólnionych sił i przemieszczeń w przekroju i+1 - wskaźnik sumacyjny β, a w przekroju i - wskaźnik α, po przekształceniach otrzymamy poniższe w z o r y t r a n s f o r m a c y j n e:

$$\overset{i+1}{P}_\beta = \delta_{\beta\alpha}\left(\overset{i}{P}_\alpha + \int_0^s p_\alpha \, d\lambda\right) \tag{1.10}$$

$$\overset{i+1}{M}_\beta = \delta_{\beta\alpha} \overset{i}{M}_\alpha + T_{\beta\alpha} \overset{i}{P}_\alpha + T_{\beta\alpha} \int_0^s p_\alpha \, d\lambda - \int_0^s T_{\beta\alpha} \, p_\alpha \, d\lambda \tag{1.11}$$

$$\overset{i+1}{\omega}_\beta = \delta_{\beta\alpha} \overset{i}{\omega}_\alpha - \delta_{\mu\alpha} \overset{i}{M}_\alpha \int_0^s S_{\beta\mu} \, d\lambda - \overset{i}{P}_\alpha \int_0^s S_{\beta\mu} \, T_{\mu\alpha} \, d\lambda + \\ - \int_0^s \left(S_{\beta\mu} \, T_{\mu\alpha} \int_0^\lambda p_\alpha \, d\tau\right) d\lambda + \int_0^s \left(S_{\beta\mu} \int_0^\lambda T_{\mu\alpha} p_\alpha \, d\tau\right) d\lambda \tag{1.12}$$

$$u_\beta^{i+1} = \delta_{\beta\alpha} u_\alpha^i + T_{\beta\nu}\,\delta_{\nu\alpha}\,\omega_\alpha^i + \delta_{\mu\alpha} M_\alpha^i \left(\int_0^s T_{\beta\nu} S_{\nu\mu}\, d\lambda - T_{\beta\nu}\int_0^s S_{\nu\mu}\, d\lambda\right)$$

$$+ P_\alpha^i \left(\int_0^s T_{\beta\nu}\, S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\, d\lambda - T_{\beta\nu}\int_0^s S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\, d\lambda\right) +$$

$$+ T_{\beta\nu}\int_0^s \left(S_{\nu\mu}\int_0^\lambda T_{\mu\alpha}\, p_\alpha \cdot d\tau\right) d\lambda - T_{\beta\nu}\int_0^s \left(S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\int_0^\lambda p_{\mu\alpha}\, d\tau\right) d\lambda +$$

$$+ \int_0^s \left(T_{\beta\nu}\, S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\int_0^\lambda p_\alpha\, d\tau\right) d\lambda - \int_0^s \left(T_{\beta\nu}\, S_{\nu\mu}\int_0^\lambda T_{\mu\alpha}\, p_\alpha\, d\tau\right) d\lambda, \quad (1.13)$$

W przytoczonych wzorach $\delta_{\beta\alpha}$ oznacza symbol KRONECKERA.

2. Podstawowe pojęcia, równania i wzory proponowanego sposobu obliczeń

Wprowadzając oznaczenia macierzy 3 x 3:

$$A_{MP} = \left[T_{\beta\alpha}\right]; \qquad A_{uP} = \left[\int_0^s T_{\beta\nu}\, S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\, d\lambda - T_{\beta\nu}\int_0^s S_{\nu\mu}\, T_{\mu\alpha}\, d\lambda\right]$$

$$A_{\omega P} = \left[-\int_0^s S_{\beta\mu}\, T_{\mu\alpha}\, d\lambda\right]; \qquad A_{uM} = \left[\delta_{\mu\alpha}\int_0^s T_{\beta\nu} S_{\nu\mu}\, d\lambda - T_{\beta\nu}\int_0^s S_{\nu\mu}\, d\lambda\right]$$

$$A_{\omega M} = \left[-\delta_{\mu\alpha}\int_0^s S_{\beta\mu}\, d\lambda\right]; \qquad A_{u\omega} = \left[\delta_{\nu\alpha} T_{\beta\nu}\right] \quad (2.1)$$

$$B_P = \left[\delta_{\beta\alpha} \int_0^s p_\alpha \, d\lambda \right]$$

$$B_M = \left[T_{\beta\alpha} \int_0^s p_\alpha \, d\lambda - \int_0^s T_{\beta\alpha} \, p_\alpha \, d\lambda \right]$$

$$B_\omega = \left[\int_0^s \left(S_{\beta\mu} \int_0^\lambda T_{\mu\alpha} \, p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda - \int_0^s \left(S_{\beta\mu} \, T_{\mu\alpha} \int_0^\lambda p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda \right] \tag{2.2}$$

$$B_u = \left[\begin{array}{l} T_{\beta\nu} \int_0^s \left(S_{\nu\mu} \int_0^\lambda T_{\mu\alpha} \, p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda - T_{\beta\nu} \int_0^s \left(S_{\nu\mu} \, T_{\mu\alpha} \int_0^\lambda p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda + \\ + \int_0^s \left(T_{\beta\nu} \, S_{\nu\mu} \, T_{\mu\alpha} \int_0^\lambda p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda - \int_0^s \left(T_{\beta\nu} \, S_{\nu\mu} \int_0^\lambda T_{\mu\alpha} \, p_\alpha \, d\tau \right) d\lambda \end{array} \right]$$

wzory transformacyjne 1.10 ÷ 1.13 można podać w operatywniejszej dla dalszych obliczeń formie macierzowo - wskaźnikowej (symbolem I oznaczono macierz jednostkową):

$$\begin{bmatrix} P_\beta \\ M_\beta \\ \omega_\beta \\ u_\beta \end{bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda_{MP} & I & 0 & 0 \\ \Lambda_{\omega P} & \Lambda_{\omega M} & I & 0 \\ \Lambda_{uP} & \Lambda_{uM} & \Lambda_{u\omega} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_\alpha \\ M_\alpha \\ \omega_\alpha \\ u_\alpha \end{bmatrix}_i + \begin{bmatrix} B_P \\ B_M \\ B_\omega \\ B_u \end{bmatrix}_{i,i+1} \tag{2.3}$$

lub krócej:

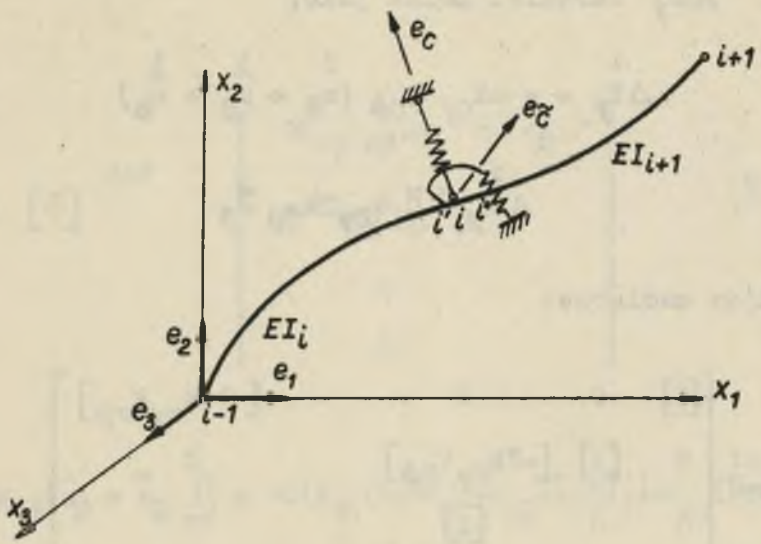
$$[w]_{i+1} = T_i\,[w]_i + [q]_{i,i+1} \tag{2.4}$$

gdzie:

$$[w]^*_{i+1} \overset{def}{=\!=} [P_\beta\,,\ M_\beta\,,\ \omega_\beta\,,\ u_\beta] \tag{2.5}$$

W powyższych relacjach trójkątną macierz blokową T_i nazywać będziemy m a c i e r z ą t r a n s m i s j i elementu i, wktor $[q]$ - k o l u m n ą o b c i ą ż e n i a (lub kolumną wpływów mechanicznych), a wktor $[w]_{i+1}$ - k o l u m n ą u o g ó l n i o n y c h s i ł i p r z e m i e s z c z e ń dla przekroju i+1.
W podobny sposób sformułowane związki można, dla zagadnienia jednorodnego, znaleźć u MARGUERRE'a [3].

Przyjmijmy z kolei, że pomiędzy sąsiednimi przekrojami i' i i'' (rys.2) znajduje się podpora sprężysta, przekazują-



Rys. 2

ca na układ siłę i moment (dla uproszczenia oznaczono dalej odcinek i-1, i przez i, a i, i+1 przez i+1).

Zakładając ciągłość równania osi odkształconej i jej pochodnej, przy przesunięciu przekroju z i′ do i″, winny być spełnione następujące warunki:

$$\text{geometryczne:}\quad \overset{i''}{u}_\beta = \overset{i'}{u}_\beta,\quad \overset{i''}{\omega}_\beta = \overset{i'}{\omega}_\beta \tag{2.6}$$

$$\text{i statyczne:}\quad \overset{i''}{M}_\beta = \overset{i'}{M}_\beta + \delta_{\beta\gamma}\overset{i}{\Delta M}_\gamma;\quad \overset{i''}{P}_\beta = \overset{i'}{P}_\beta + \delta_{\beta\gamma}\overset{i}{\Delta P}_\gamma \tag{2.7}$$

w których $\overset{i}{\Delta P}_\gamma$ i $\overset{i}{\Delta M}_\gamma$ oznaczają oddziaływania podpory sprężystej.

*Wprowadzając zgodnie z rys. 2:

$$k_{c\beta} \overset{def}{=} \cos(e_c, e_\beta),\quad k_{\tilde{c}\beta} \overset{def}{=} \cos(e_{\tilde{c}}, e_\beta) \tag{2.8}$$

$\overset{i}{\Delta P}_\gamma$ i $\overset{i}{\Delta M}_\gamma$ określić można jako:

$$\overset{i}{\Delta P}_\gamma = -\,c k_{c\gamma}\, k_{c\beta}\,(\overset{i}{u}_\beta + \overset{i}{\bar{u}}_\beta + \overset{i}{\bar{\bar{u}}}_\beta) \tag{2.9}$$

$$\overset{i}{\Delta M}_\gamma = \tilde{c}\, k_{\tilde{c}\gamma}\, k_{\tilde{c}\beta}\, \overset{i}{\bar{\bar{\omega}}}_\beta \tag{2.10}$$

Definiując macierze:

$$R_i \overset{def}{=} \begin{bmatrix} [I] & 0 & 0 & [-c\, k_{c\gamma} k_{c\beta}] \\ 0 & [I] & [-\tilde{c} k_{\tilde{c}\gamma} k_{\tilde{c}\beta}] & 0 \\ 0 & 0 & [I] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [I] \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

gdzie:

$$\left[- ck_{c\gamma}\, k_{c\beta}\right] = - C \begin{bmatrix} k_{c1}^2 & k_{c1}\, k_{c2} & k_{c1}\, k_{c3} \\ \cdot & k_{c2}^2 & k_{c2}\, k_{c3} \\ \cdot & \cdot & k_{c3}^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

i

$$\left[- \tilde{c}k_{\tilde{c}\gamma}\, k_{\tilde{c}\beta}\right] = - \tilde{C} \begin{bmatrix} k_{\tilde{c}1}^2 & k_{\tilde{c}1}\, k_{\tilde{c}2} & k_{\tilde{c}1}\, k_{\tilde{c}3} \\ \cdot & k_{\tilde{c}2}^2 & k_{\tilde{c}2}\, k_{\tilde{c}3} \\ \cdot & \cdot & k_{\tilde{c}3}^2 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

oraz:

$$[\bar{q}] \overset{\text{def}}{} \begin{bmatrix} ck_{c\gamma}k_{c\beta}(\bar{u}_\beta + \bar{\bar{u}}_\beta) \\ - \tilde{c}k_{\tilde{c}\gamma}k_{\tilde{c}\beta}\bar{\bar{\omega}}_\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

gdzie:

$$\left[- c\, k_{c\gamma}k_{c\beta}(\bar{u}_\beta + \bar{\bar{u}}_\beta)\right] = -C\left(k_{c1}(\bar{u}_1+\bar{\bar{u}}_1)+k_{c2}(\bar{u}_2+\bar{\bar{u}}_2)+k_{c3}(\bar{u}_3+\bar{\bar{u}}_3)\right)\begin{bmatrix} k_{c1} \\ k_{c2} \\ k_{c3} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\left[-\tilde{c}k_{\tilde{c}\gamma}k_{\tilde{c}\beta}\bar{\bar{\omega}}_{\beta}\right] = -c\left(k_{\tilde{c}1}\bar{\bar{\omega}}_1 + k_{\tilde{c}2}\bar{\bar{\omega}}_2 + k_{\tilde{c}3}\bar{\bar{\omega}}_3\right)\begin{bmatrix} k_{\tilde{c}1} \\ k_{\tilde{c}2} \\ k_{\tilde{c}3} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

możemy uczynić zadość warunkom 2.6 i 2.7, przemnażając kolumnę uogólnionych sił i przemieszczeń dla przekroju i' przez macierz R_i zwaną dalej m a c i e r z ą p r z e j ś c i a oraz dodając do otrzymanego iloczynu k o l u m n ę w p ł y w ó w n i e m e c h a n i c z n y c h $[\bar{q}]_i$,

$$[w]_i'' = R_i\,[w]_{i'} + [\bar{q}]_i \tag{2.17}$$

Na podstawie (2.4) można określić $[w]_{i'}$, jako:

$$[w]_{i'} = T_i\,[w]_{i-1} + [\bar{q}]_i \tag{2.18}$$

Podstawiając do 2.17 prawą stronę równania 2.18 otrzymamy:

$$[w]_i'' = R_iT_i\,[w]_{i-1} + R_i\,[q]_i + [\bar{q}]_i \tag{2.19}$$

to proste podstawienie eliminuje z 2.17 wielkości $[w]_{i'}$. Relacja 2.18 wiąże wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń w przekrojach i'' i i'.

Z kolei:

$$[w]_{i+1} = T_{i+1}\,[w]_i'' + [q]_{i+1} \tag{2.20}$$

Wprowadzając w miejsce $[w]_i''$ prawą stronę relacji 2.19 otrzymamy:

$$[w]_{i+1} = T_{i+2}R_iT_i\,[w]_{i-1} + T_{i+1}R_1\,[q]_i + [q]_{i+1} + T_{i+1}[\bar{q}]_i \tag{2.21}$$

kolejne podstawienie wyeliminowało z 2.20 wielkości $[w]_i''$.

W podobny sposób, dla n - elementów rurociągu rozdzielonych podporami sprężystymi, otrzymamy związek pomiędzy wielkościami uogólnionych sił i przemieszczeń w przekrojach n i początkowym - 0 (dla $n \geqslant 3$):

$$[w]_n = \left(T_n \prod_{i=n-1}^{i=1} R_i T_i\right)[w]_o + \left\{\sum_{i=1}^{i=n-1} \prod_{j=n}^{j=i+1} T_j R_{j-1} [q]_i + [q]_n\right\}$$

$$+ T_n \left\{\sum_{i=1}^{i=n-2} \prod_{j=n-1}^{j=i+1} R_j T_j \, [\bar{q}]_i + [\bar{q}]_{n-1}\right\} \qquad (2.22)$$

Dzięki zastosowaniu wspomnianej prostej eliminacji niewiadomych, niezależnie od liczby pośrednich podwieszeń sprężystych i liczby elementów rurociągu, relacja 2.22 zawiera prócz znanych wartości tylko wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń, które występują w przekrojach początkowym 0 i końcowym (lub pośrednim) n.

W odróżnieniu od dotąd stosowanych sposobów zapisów (por. np. [1], [2], [4], [5]) związek pomiędzy wielkościami uogólnionych sił i przemieszczeń (w przekrojach 0 i n) przedstawiono w postaci sum składników, z których pierwsza, charakteryzuje zagadnienie jednorodne, druga, ujmuje wpływ obciążenia mechanicznego, trzecia - wpływy niemechaniczne; relacja taka ułatwia przeprowadzenie analizy wpływów poszczególnych składników na wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń rurociągu.

Związek 2.22 wyprowadzono przy założeniu, że pomiędzy sąsiednimi elementami rurociągu usytuowana jest podpora sprężysta; brak podpory (np. w przekroju i) określa:

$$R_i = I; \quad [\bar{q}]_i = 0 \qquad (2.23)$$

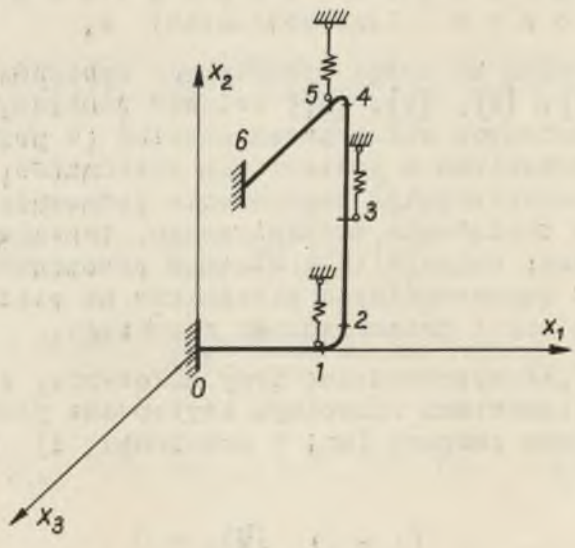
Wielkości niewiadome (por. 2.22) wyznaczamy wykorzystując warunki brzegowe, które określa sposób podparcia obu końców gałęzi rurociągu. Dla rurociągu o dowolnej konfiguracji przestrzennej (po sześć warunków brzegowych dla każdego końca gałęzi), otrzymamy do rozwiązania układ sześciu równań liniowych. Po określeniu z warunków brzegowych wektora $[w]_0$, możemy obliczyć wielkości uogólnionych sił i przemieszczeń w dowolnym przekroju pośrednim np. k, kładąc w 2.22 $n = k$.

Wyznaczone z układu równań wektory uogólnionych sił i przemieszczeń są równoległe do układu osi współrzędnych x_β; moment skręcający, momenty zginające, siłę osiową oraz siły tnące, w każdym przekroju poprzecznym, określamy z relacji:

$$M_{\alpha'} = k_{\alpha'\beta} M_\beta; \quad P_{\alpha'} = k_{\alpha'\beta} P_\beta \tag{2.24}$$

3. Przykład liczbowy

Obliczyć w samokompensacyjnym rurociągu parowym (o ciśnieniu wewnętrznym 90 kG/cm^2 i temperaturze pracy t=250°C)



Rys. 3

uogólnione siły i przemieszczenia w punktach 0, 1 i 6, uwzględniając wpływy: zmiany temperatury o $\Delta t = 500^{o}C$ i ciężaru własnego układu.

Dane:

$D = 318$ mm, $t = 12$ mm, $p = 100$ kG/mb,

$EI = 2200$ Tm^2, $\alpha_t = 1{,}327 \cdot 10^{-5}$, liczba KARMANA

$\varkappa = 0{,}502$ współczynnik sprężystej podatności podpór

$C = 65{,}893$ kG/cm,

długość elementów liniowych $L = 6{,}0$ m,

promień gięcia elementów łukowych $R = 1{,}60$ m.

Dla uproszczenia obliczeń i przejrzystości zapisu, wielkości obliczeniowe wyrażono przez umowne jednostki porównawcze: dla długości $l = 2$ m i dla sił $P = 100$ T; kolumny wpływów mechanicznych i niemechanicznych przemnożono przez stały współczynnik $m = 100$.

Obliczenia przeprowadzone zostaną wg następującego schematu:

1) rurociąg bez uwzględnienia wpływu podwieszeń sprężystych poddany działaniu wpływów termicznych,

2) rurociąg podwieszony sprężyście w punktach pośrednich (rys. 3) poddany działaniu wpływów termicznych,

3) rurociąg podwieszony sprężyście w punktach pośrednich poddany działaniu wpływu ciężaru własnego.

Po zestawieniu współczynników macierzy transmisji i kolumn wpływów mechanicznych i niemechanicznych oraz po wykonaniu obliczeń (obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej U M C - 1) otrzymano układy równań liniowych podanych w tablicach 1, 2 i 3; otrzymane w wyniku rozwiązania układu równań siły i momenty w przekroju 0, a następnie uogólnione siły i przemieszczenia w przekrojach 1 i 6 zestawiono w tablicy 4.

W n i o s k i

I. Wnioski ogólne

1. Zastosowanie prostej zasady eliminacji niewiadomych sprowadza obliczenia każdego schematu, dowolnej konfiguracji przestrzennej, niezależnie od liczby pośrednich podwieszeń sprężystych, do rozwiązania układu równań liniowych o sześciu niewiadomych (niewiadomymi są uogólnione siły i przemieszczenia występujące w skrajnych przekrojach pręta).

2. Techanika obliczania sprowadza się do prostych w działaniu dodawania i mnożenia macierzy, niemniej jednak, proponowany sposób przygotowano z myślą o wykorzystaniu elektronowych maszyn liczących, zaprogramowanie całego schematu obliczeniowego może w znacznym stopniu uprościć i zautomatyzować obliczenia.

3. Prowadząc obliczenia jako funkcje C_i (lub $\tilde{C}_i$), można otrzymać (przechodząc w końcowych wynikach uogólnionych sił i przemieszczeń do granicy $C_i \to \infty$), rozwiązanie dla podpory płaszczyznowo przesuwnej, zagadnienie to szerzej omówiono i zilustrowano w [6].

II. Wnioski wypływające z przeliczonego przykładu liczbowego

4. Wprowadzenie, dla przejęcia wpływów obciążeń mechanicznych, podwieszeń sprężystych ograniczyło swobodę samokompensacji rurociągu i spowodowało powstanie w układzie znacznych sił i przemieszczeń (schemat obliczeniowy 1).

5. Układ pionowych równoległych podwieszeń sprężystych nie wpływa bezpośrednio na wielkości momentów M_2 i kątów obrotu ω_2; zależą one wyłącznie od sił i momentów występujących w skrajnych przekrojach (zamocowaniach) układu. Potwierdzenie słuszności omówionego wniosku można otrzymać porównując równania określające kąt obrotu ω_2 dla schematów obliczeniowych 1, 2 i 3 (drugie równania w układach równań podanych w tabl. 1, 2 i 3).

Tablica 1

Układ równań dla schematu obliczeniowego 1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1{,}3869 & +11{,}6110 & -3{,}0633 & -0{,}0218 & 0 \\ +1{,}1651 & +0{,}0829 & -10{,}2005 & -0{,}0218 & -3{,}0346 & -0{,}0218 \\ -11{,}5874 & +10{,}2538 & -0{,}0829 & 0 & -0{,}0218 & -3{,}0633 \\ +14{,}9083 & -33{,}5950 & -33{,}7043 & -0{,}0829 & -10{,}2005 & +11{,}6110 \\ -0{,}0131 & +3{,}8189 & -33{,}5950 & +10{,}2538 & +0{,}0829 & -1{,}3869 \\ 0 & -0{,}0131 & +14{,}9083 & -11{,}5874 & +1{,}1651 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ +2{,}5213 \\ +5{,}0426 \\ +2{,}5213 \end{bmatrix} = 0$$

Tablica 2

Układ równań dla schematu obliczeniowego 2

$$\begin{bmatrix} -0{,}0038 & -0{,}6804 & +10{,}5184 & -2{,}7785 & -0{,}0199 & -0{,}2538 \\ -1{,}1651 & +0{,}0810 & -10{,}2005 & -0{,}0218 & -3{,}0346 & -0{,}0237 \\ -11{,}5874 & +10{,}0501 & -0{,}0829 & 0 & -0{,}0218 & -3{,}2670 \\ +14{,}9083 & -33{,}0560 & -33{,}7043 & -0{,}0829 & -10{,}2005 & +12{,}1501 \\ -0{,}0084 & +2{,}9203 & -32{,}5024 & +9{,}9689 & +0{,}0810 & -1{,}0981 \\ 0 & -0{,}0084 & +14{,}9083 & -11{,}5874 & +1{,}1651 & -0{,}0010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1{,}0032 \\ 0 \\ 0 \\ -2{,}5213 \\ +6{,}2195 \\ +2{,}5213 \end{bmatrix} = 0$$

Tablica 3

Układ równań dla schematu obliczeniowego 3

$$\begin{bmatrix} -0{,}0038 & -0{,}6804 & +10{,}5184 & -2{,}7785 & -0{,}0199 & -0{,}2538 \\ +1{,}1651 & -0{,}0810 & -10{,}2005 & -0{,}0218 & -3{,}0346 & -0{,}0237 \\ -11{,}5874 & +10{,}0501 & -0{,}0829 & 0 & -0{,}0218 & -3{,}2670 \\ +14{,}9083 & -33{,}0560 & -33{,}7043 & -0{,}0829 & -10{,}2005 & +12{,}1501 \\ -0{,}0084 & +2{,}9203 & -32{,}5024 & +9{,}9689 & +0{,}0810 & -1{,}0981 \\ 0 & -0{,}0084 & +14{,}9083 & -11{,}5874 & +1{,}1651 & -0{,}0010 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} +3{,}2040 \\ -0{,}0314 \\ -3{,}6952 \\ +11{,}2859 \\ -4{,}8047 \\ +0{,}0035 \end{bmatrix} = 0$$

Tablica 4

Zestawienie wyników:

Przekrój	Schem. obl.	P_1 T	P_2 T	P_3 T	M_1 Tm	M_2 Tm	M_3 Tm	ω_1 10^{-3} rad	ω_2 10^{-3} rad	ω_3 10^{-3} rad	u_1 cm	u_2 cm	u_3 cm
0	I	+0,3244	+1,5448	+0,3244	+ 1,0742	-1,9120	+7,8834	0	0	0	0	0	0
	II	+0,2287	+1,0926	+0,3802	+1,1724	-2,3704	+5,0960	0	0	0	0	0	0
	III	+0,1329	+1,5923	-0,1597	- 0,2934	+1,1904	+6,5918	0	0	0	0	0	0
1	I	+0,3244	+1,5448	+0,3244	+ 1,0742	+0,0344	-1,3854	-3,8086	+2,5610	-8,8620	+3,9810	-3,9220	-1,0336
	II	+0,2287	+1,0926	+0,3802	+ 1,1742	-0,0892	-1,4596	-4,1567	+3,3540	-4,9590	+3,9810	-2,3816	-1,3172
	III	+0,1329	+0,9923	-0,1597	- 0,2934	+0,2322	-1,1620	+1,0402	-1,9400	-6,5870	0	-2,7878	-1,4808
6	I	+0,3244	+1,5448	+0,3244	+ 7,8838	-1,9120	+1,0738	0	0	0	0	0	0
	II	+0,2287	+2,3816	+0,3802	+11,6422	-1,0190	+0,8990	0	0	0	0	0	0
	III	+0,1329	-1,4202	-0,1597	-5,9590	-1,0330	-1,5626	0	0	0	0	0	0

6. Otrzymane wyniki wskazują, że niejednokrotnie przyjmowane przy obliczeniach rurociągów samokompensacyjnych założenie pomijalności wpływu podwieszeń (tzn. podwieszenia przejmują tylko wpływ obciążeń mechanicznych nie utrudniając samokompensacji układu) nie we wszystkich przypadkach jest uzasadnione.

LITERATURA

[1] ARGYRIS J.H. Die Matrizentheorie der Statik, Ing. Arch. XXVI, 1958.

[2] FALK S. Die Berechnung von Rahmentragwerken mit Hilfe Ubertragungsmatrizen, Zeitschrift für Ang. Math. und Mech. Band 37 Nr 7/8, 1957,

[3] MARGUERRE K. Matrices of Transmission in Beam Problems, Progress in Solid Mechanics - vol. I, I,N. Sneddon R. HILL Editors North - Holland Publishing Company, 1960.

[4] PESTEL E. Anwendung der Deltamatrizen auf inhomogene Problems, Ing. Arch. XXVII, 1959.

[5] PONOMARIOW K.K. Obliczanie belek ciągłych metodą macierzową, Inż. i Bud. XVII - 1960 Nr 1 i Nr 2.

[6] SITKO W. Kilka uwag o obliczaniu belek na podporach sprężystych sposobem macierzowym, Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, Budownictwo 13.

[7] WOŹNIAK C. Statyka rozgałęzionych przestrzennych rurociągów samokompensacyjnych. Rozpr. Inż. 1, 11 (1963).

Wpłynęło 14.01.1965 r.

РАСЧЕТ САМОКОМПЕНСАЦИОННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ
С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ УПРУГИХ ПОДВЕСОК

Р е з ю м е

В статье представлен способ расчета самокомпенсационных трубопроводов с многими промежуточными упругими подвесками под действием произвольной нагрузки.
Применение простой элиминации неизвестных приводит расчет каждой схемы (произвольной конфигурации) независимо от числа упругих подвесок к расчету системы линейных уровнений о шести неизвестных (неизвестные это силы, моменты перемещения и углы оборота в крайных плоскостях сечения стержня).

BERECHNUNG DER KOMPENSATIONROHRLEITUNGEN
AUF ELASTISCHEN STÜTZEN

Z u s a m m e n f a s s u n g

Der Artikel betrachtet über einem Berechnungsverfahren für beliebig belasteten Kompensationrohrleitungen auf elastischen Stützen.

Die Anwendung einfacher Eliminationmethode führt die Berechnung der statisch unbestimmten Systemen mit beliebigen Zahlen der elastischen Stützen zur Auflösung einer Gruppe von 6 linearen Gleichungen mit 6 Unbekannten.

In der Arbeit wurde die Matrizentheorie und die Kernindexmethode ausgenützt.