

LESZEK LITWINOWICZ

ANALIZA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO  
TYPU MIESZANEGO DLA UKŁADU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI GRANICZNEJ  
GRUNTU

Streszczenie. W pracy przedstawiono numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego typu mieszanego dla układu hiperbolicznych quasiliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych opisujących stan równowagi granicznej gruntu. Rozwiązanie przeprowadzono metodą odmienną od powszechnie stosowanej metody opartej na zasadzie J. MASSAU.

## 1. Wstęp

Rozpatrzmy zagadnienie numerycznego rozwiązywania zagadnienia brzegowego typu mieszanego dla układu równań równowagi granicznej gruntu zapisanych w postaci:

$$(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\sigma \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial y} +$$

$$+ 2\sigma \sin \varphi \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = X, \quad (1.1)$$

$$\sin \varphi \cos 2\theta \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\sigma \sin \varphi \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \sigma}{\partial y} +$$

$$+ 2\sigma \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} = Y.$$

W wyjściowym układzie równań (1.1) oznaczają:

$\varrho$  - kąt tarcia wewnętrznego gruntu,  
 $X, Y$  - składowe sił objętościowych gruntu,  
 $\theta$  - kąt zawarty między kierunkiem większego  
 naprężenia głównego a osią  $x$ ,

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + k \operatorname{ctg} \varrho,$$

gdzie:  $\sigma_1$  oraz  $\sigma_2$  oznaczają naprężenia główne, zaś  $k$  współczynnik spójności gruntu.

Wiadomo, że równania (1.1) są typu hiperbolicznego. Istnieją zatem dwie rodziny charakterystyk:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta + \mu),$$

$$\sin 2\mu d\sigma + 2\sigma \cos 2\mu d\theta + [X \sin 2\theta - Y \cos 2\theta] dx - [X \cos 2\theta + Y \sin 2\theta] dy = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} (\theta - \mu), \quad (1.2)$$

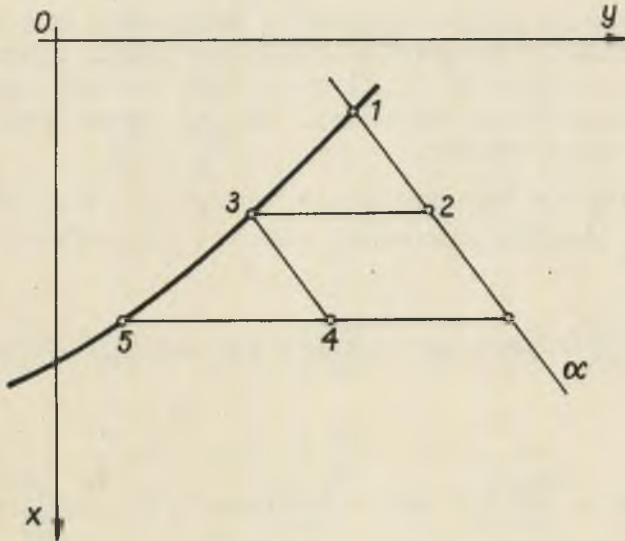
$$\sin 2\mu d\sigma - 2\sigma \cos 2\mu d\theta - [X \sin 2\theta - Y \cos 2\theta] dx + [X \cos 2\theta + Y \sin 2\theta] dy = 0,$$

$$\text{gdzie: } \mu = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varrho \right).$$

## 2. Zagadnienie brzegowe mieszane

Dla układu równań różniczkowych (1.1) zagadnienie brzegowe typu mieszane w ujęciu numerycznym przedstawia się następująco. W punktach 1 oraz 2 znajdujących się na tej samej charakterystyce - przykładowo należącej do pierwszej rodziny, znane są współrzędne tych punktów oraz wartości funkcji  $\sigma = \sigma(x, y)$  i  $\theta = \theta(x, y)$ . Należy znaleźć wartości tych

funkcji w punkcie 3, który jest punktem przecięcia się charakterystyki wychodzącej z punktu 2 - należącej do drugiej rodziny z pewną wychodzącą z punktu 1 krzywą niecharakterystyczną  $\Gamma = \Gamma(x, y)$ , rys. 1.



Rys. 1. Fragment siatki linii charakterystyk

Ponieważ z równań (1.2) można wykorzystać jedynie zależności dotyczące tylko jednej rodziny charakterystyk, numeryczne rozwiązanie tego zagadnienia brzegowego metodą J. MASSAU wymaga przyjęcia dwu dodatkowych warunków uzupełniających [1].

Jeden z tych warunków dotyczy znajomości równania krzywej niecharakterystycznej, drugi zaś znajomości rozkładu jednej z poszukiwanych funkcji wzdłuż tej krzywej (lub ich liniowej kombinacji). Stosując metodę zupełnie odmienną od metody J. MASSAU przeanalizujemy rozwiązanie tego zagadnienia brzegowego zakładając początkowo, że wzdłuż krzywej niecharakterystycznej brak jest jakichkolwiek danych odnośnie rozkładu funkcji  $\sigma = \sigma(x, y)$  oraz  $\theta = \theta(x, y)$  z wyjątkiem znajomości ich wartości w punk-

cie 1, który jak wiadomo jest jednocześnie punktem rozpatrywanej charakterystyki pierwszej rodziny.

### 3. Rozwiązanie numeryczne zagadnienia brzegowego mieszane

Obliczenie współrzędnych punktu 3 otrzymuje się bez trudności na drodze rozwiązania układu równań utworzonego z odpowiedniego równania (1.2) oraz dodatkowego warunku wiążącego poszukiwane wartości. Nie ma zatem potrzeby wyprowadzania tych wzorów.

Przejdziemy do wyprowadzenia wzorów na  $\sigma_3$  oraz  $\theta_3$ . Wiadomo [2], że dla pierwszej rodziny charakterystyk można napisać:

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_1 + \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_1 (x_2 - x_1), \\ \theta_2 &= \theta_1 + \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1 (x_2 - x_1).\end{aligned}\tag{3.1}$$

W równaniach (3.1) jako niewiadome występują wartości  $\left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_1$  oraz  $\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_1$  w punkcie 1.

Ponieważ przyjęliśmy, że charakterystyka przechodząca przez punkty 1 i 2 należy do pierwszej rodziny (oznaczymy ją jako  $\alpha$ ) stąd mamy:

$$\begin{aligned}\left. \frac{d\sigma}{dx} \right|^\alpha &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial y} \operatorname{tg}(\theta + \mu), \\ \left. \frac{d\theta}{dx} \right|^\alpha &= \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \operatorname{tg}(\theta - \mu).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Występujące w (3.2) wartości pochodnych cząstkowych można obliczyć z równań wyjściowych (1.1) po uzupełnieniu ich znanymi związkami różniczkowymi (postępujemy tu jak przy rozwiązywaniu zagadnienia brzegowego typu CAUCHY'EGO [2]). Postępując w ten sposób w wyniku odpowiednich obliczeń otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \frac{d\sigma}{dx} \Big|^\Gamma - \frac{\Delta \sigma}{\Delta} \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \frac{\Delta \sigma}{\Delta}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{d\theta}{dx} \Big|^\Gamma - \frac{\Delta \theta}{\Delta} \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\Delta \theta}{\Delta} \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\sigma \sin \varrho \left[ (\sin \varrho + \cos 2\theta) \left( \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \right)^2 - 2 \sin 2\theta \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \right] + \sin \varrho - \\ &\quad - \cos 2\theta, \\ \Delta \sigma &= 2\sigma \sin \varrho \left[ \left[ (\cos 2\theta + \sin \varrho) \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma - \sin 2\theta \right] \frac{d\sigma}{dx} \Big|^\Gamma + 2\sigma \sin \varrho \frac{d\theta}{dx} \Big|^\Gamma + \right. \\ &\quad \left. + X \left( \sin 2\theta - \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \cos 2\theta \right) - Y \left( \cos 2\theta + \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \sin 2\theta \right) \right], \\ \Delta \theta &= 2\sigma \sin \varrho \left[ \left[ (\cos 2\theta + \sin \varrho) \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma - \sin 2\theta \right] \frac{d\theta}{dx} \Big|^\Gamma + \frac{1}{2\sigma} \right] \csc \varrho - \\ &\quad - \sin \varrho \left[ \frac{d\sigma}{dx} \Big|^\Gamma + \frac{1}{2\sigma} \left[ X \left( \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma \sin 2\theta + \cos 2\theta - \csc \varrho \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - Y \left( \frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma (\cos 2\theta + \csc \varrho) - \sin 2\theta \right) \right] \right] \end{aligned} \tag{3.4}$$

W wypisanych równaniach (3.3) oraz (3.4) pochodne  $\frac{dy}{dx} \Big|^\Gamma$ ,  $\frac{d\sigma}{dx} \Big|^\Gamma$  oraz  $\frac{d\theta}{dx} \Big|^\Gamma$  dotyczą krzywej niecharakterystycznej.

Ostatecznie na podstawie uzyskanych wyników można napisać:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dx} \Big|_1^\alpha &= \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{x_3 - x_1} + \frac{1}{D} \left[ \left[ (\cos 2\theta_1 + \sin\varrho) \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \sin 2\theta_1 \right] \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{x_3 - x_1} + \right. \\ &+ 2\sigma_1 \sin\varrho \frac{\theta_3 - \theta_1}{x_3 - x_1} + X \left( \sin 2\theta_1 - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cos 2\theta_1 \right) - \\ &\left. - Y \left( \cos 2\theta_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \sin 2\theta_1 \right) \right] \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} \Big|_1^\alpha &= \frac{\theta_3 - \theta_1}{x_3 - x_1} + \frac{1}{D} \left[ \left[ (\cos 2\theta_1 + \sin\varrho) \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} - \sin 2\theta_1 \right] \frac{\theta_3 - \theta_1}{x_3 - x_1} - \right. \\ &- \frac{1}{2\sigma_1} (\sin\varrho - \csc\varrho) \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{x_3 - x_1} + \frac{1}{2\sigma_1} \left[ X(\cos 2\theta_1 + \right. \\ &+ \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \sin 2\theta_1 - \csc\varrho) + Y \left( \sin 2\theta_1 - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} (\cos 2\theta_1 + \right. \\ &\left. \left. + \csc\varrho) \right) \right] \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right]. \end{aligned}$$

gdzie:

$$D = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \left[ \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} (\sin\varrho + \cos 2\theta_1) - 2 \sin 2\theta_1 \right] - \cos 2\theta_1 + \sin\varrho.$$

Uwzględniając w równaniach (3.1) uzyskane związki (3.5) wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 W_{11} &= \left[ 1 + \frac{1}{D} \left( \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} (\cos 2\theta_1 + \sin \varrho) - \sin 2\theta_1 \right) \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \right], \\
 W_{12} &= 2\sigma_1 \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \frac{\sin \varrho}{D}, \\
 W_{10} &= \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{x_2 - x_1} - \frac{1}{D} \left[ X(\sin 2\theta_1 - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \cos 2\theta_1) - \right. \\
 &\quad \left. - Y(\cos 2\theta_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \sin 2\theta_1) \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \right], \\
 W_{21} &= \frac{\csc \varrho - \sin \varrho}{2\sigma_1} \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \frac{1}{D}, \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

$$W_{22} = W_{11},$$

$$\begin{aligned}
 W_{20} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1} - \left[ X(\cos 2\theta_1 + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \sin 2\theta_1 - \csc \varrho) + Y(\sin 2\theta_1 - \right. \\
 &\quad \left. - (\cos 2\theta_1 + \csc \varrho) \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \left[ \operatorname{tg}(\theta_1 + \mu) - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right] \frac{1}{2\sigma_1 D}.
 \end{aligned}$$

Poszukiwane wzory w końcu otrzymujemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 \sigma_3 &= \sigma_1 + \left[ \frac{W_{10} W_{22} - W_{20} W_{12}}{W_{11} W_{22} - W_{21} W_{12}} \right] (x_3 - x_1), \\
 \theta_3 &= \theta_1 + \left[ \frac{W_{10} W_{21} - W_{20} W_{11}}{W_{12} W_{21} - W_{22} W_{11}} \right] (x_3 - x_1), \tag{3.7}
 \end{aligned}$$

Ponieważ jednakże  $W_{12} W_{21} = W_{22} W_{11}$  stąd na podstawie (3.1) i (3.5) mamy dla  $\sigma_3 = \sigma_1$

$$\theta_3 = \theta_1 + \frac{W_{10}}{W_{12}} (x_3 - x_1), \quad (3.8)$$

oraz dla  $\theta_3 = \theta_1$

$$\sigma_3 = \sigma_1 + \frac{W_{20}}{W_{21}} (x_3 - x_1). \quad (3.8')$$

Wzory (3.8) i (3.8') dotyczą punktu 3 rys. 1. Wartości funkcji  $\sigma_5$  oraz  $\theta_5$  w punkcie 5 oblicza się analogicznie na podstawie znanych parametrów dla punktów 3 i 4.

#### LITERATURA

- [1] БЕРЕЗИН И.С., ЖИДКОВ Н.П.: Методы вычисления, т.2, Москва 1962.
- [2] LITWINOWICZ L.: W sprawie numerycznego rozwiązywania równań równowagi granicznej ośrodka gruntowego. Zeszyty Naukowe Pol. Śl. Budownictwo z. 13, 1964 r.

Wpłynęło do Redakcji 24.02.1966 r.



ОБ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СМЕШАНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ГРУНТОВОЙ СРЕДЫ

Р е з ю м е

Численное решение краевой задачи смешанного типа в теории предельного равновесия грунтовой среды получается обычно на основании метода Массо. В настоящей работе показано применение к решению этой задачи совсем другого метода.

ABOUT NUMERICAL SOLUTION OF CERTAIN EDGE QUESTION FOR  
EQUATIONS OF SOIL LIMIT EQUILLIBRUM

S u m m a r y

In this work has been examined the problem of numerical solution of edge question - mixed type. The problem has been investigated for equations (1.1).