ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 76 Nr kol. 812

Franciszek Marecki

Politechnika Śląska

DWUKRYTERIALNE STEROWANIE PROCESEM DYSKRETNYM REALIZOWANYM NA JEDNYM AGREGACIE

Streszczenie. W artykule sformułowano model dwukryterialnego sterowania procesem dyskretnym /montażu/ w jednym agregacie, którym jest linia montażowa. Do rozwiązania problemu wykorzystano metodę programowania wieloetapowego.

1. Wprowadzenie

Problem sterowania procesem dyskretnym realizowanym na jednej maszynie stanowił przedmiot wielu prac [2], [3], [13]. W niniejszym artykule rozważymy agregat, którym jest synchroniczna linia technologiczna. Przykładem takiego agregatu może być linia: montażowa [14], spawalnicza [12], lub lakiernicza [33]. Synchroniczne linie technologiczne są podzielone na stanowiska pracy, przez które przepływają obiekty. Rozpoczęcie obsługi obiektów na każdym stanowisku pracy następuje w tej samej chwili. Ponadto przesunięcie obiektu na kolejne stanowisko pracy następuje synchronicznie. Odstęp czasu pomiędzy chwilami zejścia z linii dwóch kolejnych obiektów nazywany jest cyklem. Czas obsługi obiektu na każdym stanowisku pracy nie może przekroczyć cyklu */.

Na synchronicznych liniach technologicznych istotne znaczenie ma rozdział operacji na stanowiska pracy, balans linii, dla uzyskania minimalnego cyklu lub minimalnej liczby stanowisk pracy [2]. W balansowaniu linii można uwzględnić losowe czasy operacji [9]. W wyniku tej losowości powstają usterki, gdy nie zostaną wykonane wszystkie operacje [14], [17], [8]. Dla probabilistycznego modelu procesu można wyznaczyć optymalny cykl, przy którym efekty ekonomiczne są maksymalne [16], [24], [15].

Sterowanie procesem dyskretnym na synchronicznych liniach technologicznych polega na wyznaczeniu harmonogramu obsługi obiektów [7], [20], [29]. Harmonogram określa przedziały czasu i miejsca obsługi obiektów [25]. W pracy zostanie rozważony proces, w którym obiekty są obsługiwane partiami.

Dla jednokryterialnej optymalizacji harmonogramu na synchronicznych liniach technologicznych przyjmowano kryteria: kosztów przezbrojeń [28], [18], [19], lub czasu trwania procesu [22], [31], [23]. Przy tym analizowane były modele /deterministyczne i probabilistyczne/ z różnorodnymi ograniczeniami.

W niniejszej pracy rozważymy problem dwukryterialnego sterowania [4],

*/ W niektórych publikacjach cykl jest nazywany taktem /rytmem/, a operacja - czynnością.

[26], [27] procesem montażu realizowanym na jednym agregacie. Jako kryteria optymalizacji przyjmiemy: minimalizację kosztów przezbrojeń oraz minimalizację czasu trwania procesu. Koszty przezbrojeń dotyczą maszyn, które dostarczają na linię detale wersyjne /dla określonych partii/.

Do rozwiązania problemu wykorzystamy algorytm programowania wieloetapowego [21]. Idea tego algorytmu jest oparta na wieloetapowych procesach decyzyjnych [1], [6] oraz metodzie podziału i ograniczeń [11], [5], [10]. Ponadto w algorytmie programowania wieloetapowego uwzględnia się pewne sposoby porządkowania danych [30], [32].

2. Sformułowanie problemu

Rozważmy pojedynczy agregat, którym jest linia montażowa składająca się z d szeregowych stacji /stanowisk pracy/.

Załóżmy, że dany jest zbiór partii obiektów montażowych na linii:

$$\Omega = \{ w_n \}_{n = 0,\ldots,N} \qquad /1/$$

gdzie: w_n - n-ta partia obiektów, N - liczba partii znajdujących się przed linią, w_o - partia obiektów znajdujących się na linii.

Długości partii /liczby obiektów/ dane są wektorem:

$$D = [d_n]_{n = 0,\ldots,N} \qquad /2/$$

Zakładamy przy tym, że:

$$\forall_{1 \leq n \leq N} \quad d_n \geqslant d \qquad /3a/$$

$$d_o = d \qquad /3b/$$

Dla każdej partii obiektów określony jest cykl montażu, dany wektorem:

$$C = [c_n]_{n = 0,\ldots,N} \qquad /4/$$

gdzie: c_n - cykl montażu partii obiektów w_n.

Przyjmiemy warunek montażu kompletnego, zgodnie z którym cykl linii jest maksymalnym cyklem obiektów znajdujących się na linii. A zatem, jeżeli na linii znajdują się obiekty należące do partii w_i oraz w_j, to cykl linii wynosi $\max(c_i, c_j)$. Zgodnie z /3/ na linii mogą znajdować się obiekty najwyżej dwóch partii. Ponadto gdy w_i poprzedza w_n, a w_j następuje po niej, to obiekty partii w_n mogą być montowane przy:

- jednym cyklu c_n, gdzie:

$$c_n > \max(c_i, c_j) \qquad /5a/$$

- dwóch cyklach c_i oraz c_n, gdzie:

$$c_i > c_n > c_j \qquad /5b/$$

- trzech cyklach c_i, c_n oraz c_j, gdzie:

$$\left[c_n < \min(c_i,\ c_j)\right] \ \wedge \ (d_n > d) \qquad /5c/$$

A zatem zmiana cyklu linii może nastąpić w chwili wejścia na linię nowej partii lub zejścia z linii montowanej partii.

Załóżmy, że dane są terminy najwcześniejszego wejścia partii obiektów na linię:

$$\Phi = [\varphi_n] \qquad /6/$$

$$n = 1,\ldots,N$$

gdzie: φ_n - termin najwcześniejszego wejścia na linię pierwszego obiektu partii w w_n.

Analogicznie przyjmiemy terminy najpóźniejszego zejścia z linii partii obiektów:

$$\Psi = [\psi_n] \qquad /7/$$

$$n = 0,\ldots,N$$

gdzie: ψ_n - termin najpóźniejszego zejścia z linii ostatniego obiektu partii w_n.

Analizowany będzie proces montażu od chwili t^o, gdy na linii znajdują się tylko obiekty partii w_o, do chwili t^R - gdy na linii zostaną zmontowane wszystkie obiekty partii ze zbioru /1/. Przedział czasu $[t^o,\ t^R]$ jest aktualnym okresem harmonogramowania. Dalej uwzględnimy fakt, że na linii pozostają obiekty partii przydzielonej do montażu w ostatniej kolejności. Stanowi to warunek końcowy montażu /lub początkowy dla następnego okresu harmonogramowania/.

Załóżmy, że dane są priorytety partii obiektów, określone następująco:

$$\Pi = [\pi_n] \qquad /8/$$

$$n = 0,\ldots,N$$

przy tym:

$$\pi_n = \begin{cases} 1 : & \text{jeśli zakończenie montażu partii } w_n \\ & \text{nie może przekroczyć terminu } \psi_n, \\ 0 : & \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \qquad /8a/$$

Załóżmy, że relacja kolejności montażu partii dana jest macierzą:

$$\Gamma = [\gamma_{\nu,n}] \qquad /9/$$

$$\nu = 0,\ldots,N$$
$$n = 1,\ldots,N$$

Elementy tej macierzy określamy następująco:

$$\gamma_{\nu,n} = \begin{cases} 1 : \text{jeśli } W_\nu \text{ jest bezpośrednim poprzednikiem } W_n \\ 0 : \text{w przypadku przeciwnym.} \end{cases} \qquad /9a/$$

Przyjmiemy, że dla montażu obiektów partii W_n na linię są dostarczone strumienie odpowiednich detali. Zmiana partii na linii jest związana ze zmianą typów dostarczonych detali, a więc z przezbrojeniem maszyn wytwarzających te detale. Załóżmy, że koszty tych przezbrojeń /straty/ dane są macierzą:

$$S = [s_{\nu,n}] \qquad /10/$$
$$\nu = 0,\dots,N$$
$$n = 1,\dots,N$$

gdzie: $s_{\nu,n}$ - koszt przezbrojenia maszyn przy przejściu w montażu od partii obiektów W_ν do partii obiektów W_n.

Problem sterowania procesem montażu polega na wyznaczeniu harmonogramów i montażu partii obiektów oraz zmian cyklu linii. Oznaczmy przez ϱ_n chwilę wejścia na linię pierwszego obiektu partii W_n, natomiast przez t_n chwilę zejścia z linii ostatniego obiektu tej partii. Harmonogram montażu partii winien mieć postać:

$$H^1 = \langle t_o, \langle \varrho_1, t_1 \rangle, \dots, \langle \varrho_n, t_n \rangle \dots, \langle \varrho_N, t_N \rangle\rangle \qquad /11/$$

Dla partii W_o chwila ϱ_o nie jest znana /co nie ma znaczenia/. Ponadto dla partii W_j, która ma być montowana w ostatniej kolejności, termin t_j jest prognozą t_j' /wyznaczoną przy założeniu, że ostatnie d cykli montażu obiektów partii W_j będzie równe c_j/.

Oznaczmy przez t^r, $r = 0,\dots,R$, chwile zmiany cyklu linii. Harmonogram zmiany cyklu linii winien mieć postać:

$$H^2 = \langle \langle t^o, c^o \rangle, \dots, \langle t^r, c^r \rangle, \dots, \langle t^R, c^R \rangle\rangle \qquad /12/$$

gdzie: c^r - cykl linii od chwili t^r.

Cykl c^r jest jednym z cykli wektora /4/, natomiast chwile t^r są odpowiednimi chwilami z /11/, przy tym $t^o = 0$, dla chwili wprowadzenia na linię pierwszego obiektu pewnej partii W_i. Ponieważ harmonogram /12/ można wyznaczyć wprost z /11/, zatem w dalszym ciągu będziemy rozważali tylko harmonogram montażu partii.

Aby harmonogram /11/ był dopuszczalny, muszą być spełnione następujące ograniczenia montażu partii obiektów:

- sekwencji

$$\forall_{i} \forall_{j \neq i} (\rho_i < \rho_j) \vee (\rho_j < \rho_i) \qquad /13a/$$

- kolejności

$$\forall_{\nu} \forall_{n} (\gamma_{\nu,n} = 1) \Rightarrow (\rho_\nu < \rho_n) \qquad /13b/$$

- priorytetów

$$\forall_{n} (\pi_n = 1) \Rightarrow (t_n \leq \psi_n) \qquad /13c/$$

- przerwań

$$\forall_{n} \exists_{j} (\rho_n < \rho_j) \Rightarrow [t_n = \rho_j + d \cdot \max(c_n, c_j)] \qquad /13d/$$

Ograniczenie /13d/ jest charakterystyczne dla synchronicznej linii montażowej. Oznacza ono, że na każdej stacji linii znajduje się montowany obiekt. Jeżeli następuje opóźnienie wprowadzenia na linię obiektów partii W_j, to montaż poprzedniej partii W_n zostaje przerwany. Przerwanie to polega na zatrzymaniu linii, a więc synchronicznym przerwaniu montażu na każdym stanowisku pracy. Kontynuacja montażu następuje od chwili $\varphi_j = \rho_j$ dostępności partii W_j.

Dla optymalizacji harmonogramu /11/ montażu partii obiektów przyjmiemy dwa kryteria: minimalizacji kosztów przezbrojeń oraz minimalizacji czasu montażu.

Kryterium minimalizacji kosztów przezbrojeń zapiszemy w postaci:

$$Q_1 = \sum_{n=1}^{n=N} \vartheta_{i_{n-1}, i_n} \longrightarrow \min \qquad /14/$$

gdzie: i_n - numer partii obiektów, która jest montowana jako n-ta z kolei.

Kryterium minimalizacji czasu montażu zapiszemy jako:

$$Q_2 = \max_{1 \leq n \leq N} t_n \longrightarrow \min \qquad /15/$$

Przyjmiemy, że Q_1 jest nadrzędne /a Q_2 podrzędne/ w ustalonej hierarchii.

Rozwiązanie /harmonogram/ uwzględniające tylko jedno z kryteriów /14/ lub /15/ jest monooptymalne. Jeżeli istnieje rozwiązanie, które równocześnie spełnia kryteria /14/ i /15/, to jest ono rozwiązaniem dwukryterialnym idealnym.

Załóżmy, że dane są dwa rozwiązania dwukryterialne: i-te o wskaźnikach $Q_1^{\,i}$, $Q_2^{\,i}$ oraz j-te o wskaźnikach $Q_1^{\,j}$ oraz $Q_2^{\,j}$. Powiemy, że rozwiązanie i-te dominuje nad j-tym, jeżeli jest spełniony warunek:

$$(Q_1^{\,i} \leq Q_1^{\,j}) \wedge (Q_2^{\,i} \leq Q_2^{\,j}) \wedge [(Q_1^{\,i} < Q_1^{\,j}) \vee (Q_2^{\,i} < Q_2^{\,j})] \qquad /16/$$

A zatem rozwiązanie i-te jest nie zdominowane.

Rozwiązanie nie zdominowane jest optymalne w sensie Pareto.

Dla wyznaczenia rozwiązania polioptymalnego można wykorzystać jedną z metod opartych na funkcji użyteczności, np. hierarchizacji kryteriów. Załóżmy, że kryterium Q_1 jest wyższe /a Q_2 niższe/ w ustalonej hierarchii. Niech q_1 będzie przyjętą tolerancją dla Q_1, /a $q_2 = 0$/. Oznaczmy przez Q_1^o rozwiązanie monooptymalne w sensie pierwszego kryterium.
Rozwiązanie polioptymalne o wskaźnikach Q_1^1 i Q_2^1 spełnia warunek:

$$\min_i Q_2^i \Big|_{Q_1^i - Q_1^o \leq q_1} = Q_2^1 \qquad /17/$$

Na podstawie warunku /17/ można wybrać rozwiązanie polioptymalne ze zbioru rozwiązań Pareto - optymalnych /dla 1-tego rozwiązania odczytujemy Q_1^1/.

W problemach wielokryterialnych, do wyznaczenia rozwiązania kompromisowego /polioptymalnego/, zalecana jest metoda dialogowa. Ma ona uzasadnienie w przypadkach, gdy określenie adekwatnej funkcji użyteczności jest trudne.

W dalszym ciągu dla wyznaczenia polioptymalnego harmonogramu zastosujemy metodę hierarchizacji kryteriów.

3. Algorytm

Do rozwiązania sformułowanego problemu przedstawiony zostanie algorytm programowania wieloetapowego. Podstawowymi elementami konstrukcyjnymi tego algorytmu są: stan procesu decyzyjnego, wartość stanu, reguły generowania stanów oraz reguły eliminowania stanów nieperspektywicznych.

Przydzielanie N partii do montażu na linii może być rozważane jako N-etapowy proces decyzyjny. Warunki początkowe montażu określają stan początkowy procesu decyzyjnego.

Stan procesu decyzyjnego opisuje sytuację, jaka powstaje w systemie po podjęciu decyzji /może on uwzględniać historię procesu/. Ciąg stanów jest trajektorią. Każda trajektoria wychodzi z danego /jedynego/ stanu początkowego. Wiązka trajektorii interpretuje drzewo decyzyjne. Każdy stan końcowy określa wprost dopuszczalne rozwiązanie problemu. Jeżeli w zapisie stanu uwzględniona jest historia procesu, to istotne znaczenie ma tylko aktualnie ostatni stan trajektorii.

Dla oceny częściowego rozwiązania /harmonogramu/ wprowadza się pojęcie wartości stanu. Wartość stanu koresponduje z przyjętymi kryteriami optymalizacji. Na podstawie wartości stanu można wybrać najlepszy stan końcowy. Ponadto wartość stanu jest wykorzystywana do eliminacji stanów nieperspektywicznych /które nie prowadzą do najlepszego stanu końcowego polioptymalnego lub monooptymalnego/.

Reguły generowania stanów pozwalają wyznaczyć stany końcowe wychodząc z jednego stanu początkowego. W trakcie generowania stanów zapamiętywane są jedynie tzw. stany aktywne, z których można wygenerować dalsze stany. A zatem stany końcowe nie są aktywne, /zapamiętywany jest tylko najlepszy z nich/. Ponadto zamiast trajektorii zapamiętywany jest tylko jej ostatni stan - aktywny.

W algorytmie programowania N-etapowego stanu są pogrupowane w zbiory stanów aktywnych $\mathcal{A}_\eta$, $\eta = 0,\dots,N-1$. Ponadto zbiory te są odpowiednio uporządkowane. Generowanie stanów polega na wyborze pewnego stanu ze zbioru $\mathcal{A}_{\eta-1}$ i wyznaczeniu na jego podstawie bezpośrednich następników, którymi są stany należące do zbioru $\mathcal{A}_\eta$.

Jako reguły wyboru stanu aktywnego stosuje się: FIFO /pierwszy wygenerowany - pierwszy wybrany/, LIFO /ostatni wygenerowany - pierwszy wybrany/, LLB /wybór stanu o najmniejszym dolnym ograniczeniu wartości stanu lokalnie optymalnego/. Stan lokalnie optymalny jest najlepszym stanem końcowym, który uzyskuje się z danego stanu aktywnego. Reguły wyboru mogą być bardziej złożone.

Liczba stanów wygenerowanych z danego stanu aktywnego jest zależna od stosowanych reguł podziału. W dalszym ciągu wykorzystamy jednokrokową regułę podziału częściowego. Zgodnie z tą regułą ze stanu aktywnego generowana jest tylko część jego bezpośrednich następników.

Jeżeli podział jest zupełny, to wybrany stan przestaje być aktywny, a tym samym zostaje usunięty ze zbioru $\mathcal{A}_{\eta-1}$. Dla podziału częściowego wybrany stan pozostaje aktywny. W tym przypadku wykorzystywany jest wskaźnik stanu, określający zbiór wygenerowanych bezpośrednich następników wybranego stanu aktywnego.

Sposób generowania wiązki trajektorii wychodzącej ze stanu początkowego jest zależny od stosowanych reguł wyboru i podziału oraz przyjętej dopuszczalnej liczby L_η stanów aktywnych w zbiorze $\mathcal{A}_\eta$, $/1 \leq |\mathcal{A}_\eta| \leq L_\eta/$. W wyniku generowania stany aktywne są "przemieszczane" od zbioru $\mathcal{A}_0$ do zbioru $\mathcal{A}_{N-1}$. Stany aktywne ze zbioru $\mathcal{A}_{N-1}$ pozwalają wygenerować stany końcowe. Obliczenia kończą się, gdy wszystkie zbiory stanów aktywnych są puste.

Przejście od wybranego stanu aktywnego do jego bezpośredniego następnika wynika z procedury generowania stanów. Procedura generowania stanów jest zdaniem logicznym, w którym podane są warunki wygenerowania nowego stanu. Ponadto określone są formuły wyznaczania elementów nowego stanu.

Poszukiwanie rozwiązania najlepszego nie wymaga wygenerowania wszystkich trajektorii /przeglądu zupełnego/. Niektóre stany /a zatem wiązki trajektorii/ są eliminowane, jeśli nie pozwalają wyznaczyć rozwiązania najlepszego. Do tego celu służą reguły: wyczerpywania, dominacji i sondowania.

Reguła wyczerpywania eliminuje stan, z którego nie można otrzymać rozwiązania dopuszczalnego, /wyczerpane zostały możliwości generowania dopuszczalnych stanów końcowych/.

Reguła dominacji, dla problemu jednokryterialnego, pozwala wyeliminować jeden z dwóch stanów aktywnych, którego stan lokalnie optymalny jest gorszy. Dla problemu wielokryterialnego reguła dominacji eliminuje stan aktywny, z którego nie można wygenerować stanu końcowego Pareto - optymalnego.

Reguła sondowania jest stosowana w przypadku, gdy znany jest aktualnie najlepszy stan końcowy. Dla danego stanu aktywnego można oszacować dolne ograniczenie wartości - odpowiadającego mu stanu lokalnie optymalnego. Jeżeli oszacowanie to jest gorsze od wartości stanu aktualnie najlepszego, to dany stan aktywny zostaje wyeliminowany.

Regułom eliminacji jest poddawany stan wygenerowany. Jeśli nie zostanie on wyeliminowany, to staje się aktywnym. Dla dominacji stanów, wygenerowany stan jest porównywany z danymi stanami aktywnymi. Wyróżnienie zbiorów η-tego etapu oraz ich leksykograficzne uporządkowanie skraca czas obliczeń. Efektywność algorytmu jest zależna od wyszczególnionych elementów konstrukcyjnych. Jeżeli czas obliczeń jest limitowany, to wyznaczane jest rozwiązanie aktualnie najlepsze z oszacowaniem dokładności.

3.1. Stan i wartość stanu

Stan N-etapowego procesu decyzyjnego, interpretującego przydzielanie partii obiektów do montażu, zdefiniujemy następująco.

Def. 1.: Stan jest macierzą

$$P^{1,\eta} = \left[p_{n,j}^{1,\eta}\right] \qquad /18/$$

$$\eta = 0,\ldots,N$$
$$1 = 1,\ldots,L_\eta$$
$$n = 1,\ldots,N$$
$$j = 1,2$$

Elementy tej macierzy określamy jako:

$$p_{n,1}^{1,\eta} = \begin{cases} \mathcal{J}_n & : \text{jeśli partia } W_n \text{ została wprowadzona na linię} \\ 0 & : \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \qquad /18a/$$

$$p_{n,2}^{1,\eta} = \begin{cases} t_n & : \text{jeśli partia } W_n \text{ została wyprowadzona z linii} \\ 0 & : \text{w przypadku przeciwnym} \end{cases} \qquad /18b/$$

Stan początkowy $P^{1,0}$ jest macierzą zerową, natomiast stan końcowy $P^{1,N}$ spełnia warunek:

$$\underset{1\leq n\leq N}{\forall} \ \underset{1\leq j\leq 2}{\forall} \ p_{n,j}^{1,N} > 0 \qquad /19/$$

Z każdym stanem $P^{\lambda,\eta}$ związżemy jego wartość $V^{\lambda,\eta}$.

Def. 2.: Wartość stanu jest wektorem

$$V^{\lambda,\eta} = \left[v_i^{\lambda,\eta} \right]_{i = 1,2} \qquad /20/$$

Elementy tego wektora korespondują z przyjętymi kryteriami optymalizacji /14/ i /15/. Wyznaczamy je z formuł:

$$v_1^{\lambda,\eta} = v_1^{\lambda,\eta-1} + \delta_{k,n} \qquad /21a/$$

$$v_2^{\lambda,\eta} = p_{n,2}^{\lambda,\eta} \qquad /21b/$$

W /21/ przyjęto, że ze stanu $P^{\lambda,\eta-1}$ wygenerowano bezpośredni następnik $P^{\lambda,\eta}$, przydzielając do montażu partię obiektów W_n. Ponadto:

$$p_{k,2}^{\lambda,\eta-1} = \max_{1 \leq i \leq N} p_{i,2}^{\lambda,\eta-1} \qquad /22/$$

A zatem W_k jest ostatnią montowaną partią, wg stanu $P^{\lambda,\eta-1}$.

Dla /21/ przyjmujemy:

$$v_1^{1,0} = 0 \qquad /23/$$

ponieważ nie dokonano przezbrojeń maszyn.

Z każdego stanu końcowego $P^{\lambda,N}$ otrzymujemy dopuszczalny harmonogram montażu, bowiem:

$$\rho_n = p_{n,1}^{\lambda,N} \qquad /24a/$$

$$t_n = p_{n,2}^{\lambda,N} \qquad /24b/$$

Ponadto chwilę t_o, w harmonogramie /11/, zakończenia montażu partii W_o wyznaczamy jako:

$$t_o = \rho_\nu + d \max\left(c_\nu, c_o\right) \qquad /25/$$

przy tym:

$$\rho_\nu = \min_{1 \leq i \leq N} p_{i,1}^{\lambda,N} \qquad /25a/$$

Dla partii obiektów W_μ, która jest montowana jako ostatnia, chwila:

$$t_\mu = \max_{1 \leq i \leq N} p_{i,2}^{\lambda,N} \qquad /26/$$

jest prognozą, bowiem nie uwzględniony jest cykl kolejnej partii /pierwszej w następnym okresie harmonogramowania/. Przyjmujemy, że po zakończeniu montażu partii ze zbioru /1/ na linii pozostaje d obiektów partii W_μ.

Stan końcowy $P^{\lambda,N}$ jest zdominowany, jeżeli spełnia warunek:

$$\exists_{l} \left(v_1^{l,N} \leq v_1^{\lambda,N}\right) \wedge \left(v_2^{l,N} \leq v_2^{\lambda,N}\right) \wedge \left[\left(v_1^{l,N} < v_1^{\lambda,N}\right) \vee \left(v_2^{l,N} < v_2^{\lambda,N}\right)\right] \qquad /27/$$

Stany końcowe nie zdominowane są Pareto - optymalne.

Stan polioptymalny P^o jest jednym ze stanów Pareto - optymalnych $P^{l,N}$, spełniającym warunek:

$$\min_{l} v_2^{l,N} \Big|_{v_1^{l,N} - v_1^{l^o,N} \leq q_1} = v_2^{o} \qquad /28/$$

przy tym:

$$v_1^{l^o,N} = \min_{l} v_1^{l,N} \qquad /29/$$

ze stanu polioptymalnego P^o otrzymujemy, zgodnie z /24/, polioptymalny harmonogram. Wskaźniki kryterialne rozwiązania polioptymalnego wynoszą v_1^o i v_2^o.

3.2. Generowanie stanów

Załóżmy, że dane są zbiory stanów aktywnych $\mathcal{L}_\eta$, $\eta = 0,\ldots,N-1$. Dopuszczalna liczba stanów w zbiorze $\mathcal{L}_\eta$ wynosi L_η. A zatem do generowania stanów można wybrać stan $P^{\lambda,\eta-1}$, jeśli spełniony jest warunek:

$$|\mathcal{L}_\eta| \leq L_\eta \qquad \eta = 1,\ldots,N-1 \qquad /30/$$

Ze zbioru $\mathcal{L}_{N-1}$ można zawsze generować stany końcowe. W trakcie generowania stanów, ich liczba w zbiorach $\mathcal{L}_\eta$ zmienia się.

Regułę wyboru stanu aktywnego $P^{\lambda,\eta-1}$ związujemy z oszacowaniem dolnych ograniczeń $b_1^{\lambda,\eta-1}$ i $b_2^{\lambda,\eta-1}$ wartości $v_1^{\lambda^o,N}$ i $v_2^{\lambda^o,N}$. Przez $P^{\lambda^o,N}$ oznaczamy stan lokalnie polioptymalny, który można wygenerować ze stanu $P^{\lambda,\eta-1}$.

Oszacowanie $b_1^{\lambda,\eta-1}$ można otrzymać analogicznie jak dla problemu komiwojażera [11]. A zatem załóżmy, że ostatnią partią montowaną w stanie $P^{\lambda,\eta-1}$ jest w_k. Do montażu pozostało $N-(\eta-1)$ partii. Dla prostoty obliczeń partie te ponumerujemy od 1 do M, gdzie: $M = N-(\eta-1)$, a partia w_k otrzymuje numer 0. Z macierzy /10/ dla interesujących nas partii obliczamy wielkości zredukowane:

$$\vartheta_{i,j_i} = \min_{1 \leq j \leq M} \vartheta_{i,j} \qquad /31a/$$

$$\vartheta'_{i,j} = \vartheta_{i,j} - \vartheta_{i,j_i} \qquad /31b/$$

$$\vartheta''_{i_j,j} = \min_{0 \leq i \leq M} \vartheta'_{i,j} \qquad /31c/$$

$$\delta''_{i,j} = \delta'_{i,j} - \delta'_{i_j,j} \qquad /31d/$$

Suma redukcyjna:

$$\Delta b_1^{\lambda,\eta-1} = \sum_{i=0}^{i=M} \delta_{i,j_i} + \sum_{j=1}^{j=M} \delta'_{i_j,j} \qquad /32/$$

A zatem dla oszacowania $b_1^{\lambda,\eta-1}$ otrzymamy:

$$b_1^{\lambda,\eta-1} = v_1^{\lambda,\eta-1} + \Delta b_1^{\lambda,\eta-1} \qquad /33/$$

Z kolei dla $b_2^{\lambda,\eta-1}$ można przyjąć:

$$b_2^{\lambda,\eta-1} = v_2^{\lambda,\eta-1} + \Delta b_2^{\lambda,\eta-1} \qquad /34/$$

gdzie: $\Delta b_2^{\lambda,\eta-1}$ - suma czasów montażu partii w_i, które nie zostały przydzielone do montażu w stanie $P^{\lambda,\eta-1}$.

A zatem:

$$\Delta b_2^{\lambda,\eta-1} = \sum_{w_i \in \Omega^{\lambda,\eta-1}} d_i \cdot c_i \qquad /35/$$

przy tym zbiór partii $\Omega^{\lambda,\eta-1}$, które należy zrealizować od stanu $P^{\lambda,\eta-1}$, określamy następująco:

$$\forall_{1 \leq i \leq N} \left(p_{i,2}^{\lambda,\eta-1} = 0\right) \Rightarrow \left(w_i \in \Omega^{\lambda,\eta-1}\right) \qquad /36/$$

Formuła /35/ jest dolnym oszacowaniem czasu montażu partii obiektów w_i, ponieważ zgodnie z /5/ cykl montażu obiektów należących do partii w_i nie może być mniejszy niż c_i.

Zauważmy, że oszacowania $b_1^{\lambda,\eta-1}$ i $b_2^{\lambda,\eta-1}$ są tym dokładniejsze, im późniejszy jest etap decyzyjny η, $\eta = 0,\ldots,N-1$. Na etapie N-1-szym oszacowania te są dokładne. A zatem reguła wyboru stanu aktywnego ma postać:

$$\min_{P^{\lambda,\eta-1} \in \mathcal{L}_{\eta-1}} \left(v_1^{1,\eta-1} + \alpha_1 \cdot \Delta b_1^{1,\eta-1}\right) = \left(v_1^{\lambda,\eta-1} + \alpha_1 \cdot \Delta b_1^{\lambda,\eta-1}\right) \qquad /37/$$

gdzie: α_1 - odpowiednio dobrany współczynnik $(\alpha_1 = 1$, dla $\eta = N$, oraz $0 < \alpha_1 < 1$, dla $\eta < N)$.

Jeżeli warunek /37/ spełnia kilka stanów, to można wykorzystać analogiczną formułę dla oszacowania $b_2^{\lambda,\eta-1}$.

Stosując regułę podziału zupełnego, z wybranego stanu $P^{\lambda,\eta-1}$ generujemy jego bezpośrednie następniki, za pomocą procedury:

$$\forall_{n} \forall_{\nu} \left(p_{n,2}^{\lambda,\eta-1} = 0 \right) \wedge \left[\left(\gamma_{\nu,n} = 1 \right) \Rightarrow \left(p_{\nu,2}^{\lambda,\eta-1} > 0 \right) \right] \wedge \left\{ \left(\pi_n = 0 \right) \vee \left[\left(\pi_n = 1 \right) \Rightarrow \left(t_n \leqslant \Upsilon_n \right) \right] \right\} \Rightarrow \left(P = P^{\lambda,\eta-1} + \Delta P \right) \qquad /38/$$

Elementy macierzy ΔP określamy następująco:

$$\Delta p_{i,1} = \begin{cases} \rho_n & : \text{ dla } i = n \\ 0 & : \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \qquad /39a/$$

$$\Delta p_{i,2} = \begin{cases} t_n & : \text{ dla } i = n \\ t_k & : \text{ dla } i = k \\ 0 & : \text{ w pozostałych przypadkach} \end{cases} \qquad /39b/$$

przy tym:

$$\rho_n = \max\left(\varphi_n, \, p_{k,2}^{\lambda,\eta-1} - d \cdot c_k \right) \qquad /40/$$

$$t_n = \rho_n + d \cdot \max\left(c_n, \, c_k\right) + d_n \cdot c_n \qquad /41/$$

$$\Delta t_k = \begin{cases} d \cdot \left(c_n - c_k\right) & : \text{ jeśli } c_n > c_k \\ 0 & : \text{ w przypadku przeciwnym} \end{cases} \qquad /42/$$

Przez w_k oznaczamy ostatnią partię obiektów montowaną na linii.

W trakcie generowania stanu P wg procedury /38/ sprawdzone są kolejno współrzędne n, od 1 do N. A zatem jako wskaźnik stanu $W^{\lambda,\eta-1}$ przyjmujemy numer j ostatniej partii w_j, którą przydzielono do montażu, generując stany z $P^{\lambda,\eta-1}$.

Stosując regułę podziału częściowego, w procedurze /38/ wykorzystujemy numery n spełniające warunek:

$$W^{\lambda,\eta-1} < n < N^{\lambda,\eta-1} \qquad /43/$$

przy tym $N^{\lambda,\eta-1}$ może być dowolnie wybrane, np.:

$$N^{\lambda,\eta-1} = W^{\lambda,\eta-1} + \min\left(N, \, L_\eta - |\mathcal{L}_\eta|\right) \qquad /44/$$

Ze stanu $P^{\lambda,\eta-1}$ można generować dowolnie ograniczoną liczbę bezpośrednich następników.

W ten sposób poprzez reguły wyboru i podziału steruje się generowaniem wiązki trajektorii /drzewa decyzyjnego/. Analogiczny efekt uzyskuje się przez wstępne ponumerowanie partii obiektów w zbiorze /1/.

3.3. Eliminowanie stanów

W trakcie generowania stanów niektóre z nich mogą być wyeliminowane. W tym celu wygenerowany stan P jest testowany, za pomocą reguł: wyczerpywania, dominacji i sondowania.

Reguła wyczerpywania ma postać twierdzenia:

Tw. 1.: Stan P jest wyczerpany, jeśli spełnia warunek:

$$\exists_n \left(p_{k,2} + d_n \cdot c_n > \Upsilon_n\right) \wedge \left(\pi_n = 1\right) \qquad /45/$$

Dowód: Lewa strona nierówności /45/ jest prognozą najwcześniejszego zakończenia montażu partii ω_n. Zgodnie z /5/ partia ta w rzeczywistości może być zmontowana jeszcze później. Partia ω_n nie spełnia warunków procedury /38/, a zatem ze stanu P nie można wygenerować odpowiedniego bezpośredniego następnika. Generowanie innych /możliwych/ bezpośrednich następników jest bezcelowe, bowiem dla otrzymania stanu końcowego muszą być przydzielone wszystkie partie /również ω_n/. Jeżeli partia ω_n nie może być przydzielona do montażu w stanie P, to tym bardziej nie może być przydzielona w następnikach stanu P. A zatem ze stanu P nie można wygenerować dopuszczalnego stanu końcowego.

Reguła dominacji stanów ma postać twierdzenia:

Tw. 2.: Stan $P^{l_2,\eta}$ jest zdominowany przez stan $P^{l_1,\eta}$, jeżeli jest spełniony warunek:

$$\left(\Omega^{l_1,\eta} = \Omega^{l_2,\eta}\right) \wedge \left(v_2^{l_1,\eta} = p_{k,2}^{l_1,\eta}\right) \wedge \left(p_{k,2}^{l_2,\eta} = v_2^{l_2,\eta}\right)$$

$$\left(v_1^{l_1,\eta} \leq v_1^{l_2,\eta}\right) \wedge \left(v_2^{l_1,\eta} \leq v_2^{l_2,\eta}\right) \qquad /46/$$

W przypadku równych wartości lepszy jest stan $P^{l_1,\eta}$, wygenerowany wcześniej.

Dowód: Oznaczmy przez $P^{l_1,N}$ stan Pareto - optymalny /lokalnie/ otrzymany z $P^{l_1,\eta}$, natomiast przez $P^{l_2,N}$ stan Pareto - optymalny /lokalnie/ otrzymany z $P^{l_2,\eta}$. Ze stanów $P^{l_1,\eta}$ i $P^{l_2,\eta}$ otrzymujemy na ogół zbiory stanów Pareto - optymalnych. Załóżmy, że dana jest trajektoria lokalnie Pareto - optymalna $P^{l_2,\eta}, \ldots, P^{l_2,N}$. Wzdłuż tej trajektorii, do montażu przydzielane są partie ze zbioru $\Omega^{l_2,\eta}$, a w stanie $P^{l_2,\eta}$ na linii znajdują się obiekty partii ω_k. Współrzędne wektora wartości stanu lokalnie Pareto - optymalnego $P^{l_2,N}$ wynoszą $v_1^{l_2,N}$ i $v_2^{l_2,N}$. Dla rozważanej trajektorii możemy napisać:

$$v_1^{l_2,N} = v_1^{l_2,\eta} + \Delta v_1 \qquad /47a/$$

$$v_2^{l_2,N} = v_2^{l_2,\eta} + \Delta v_2 \qquad /47b/$$

gdzie: Δv_i – przyrost wartości wzdłuż trajektorii $P^{1_2,\eta}, \dots, P^{1_2,N}$. Zauważmy, że w stanie $P^{1_1,\eta}$ na linii znajdują się obiekty partii W_k, a do montażu należy przydzielić obiekty ze zbioru $\Omega^{1_1,\eta} = \Omega^{1_2,\eta}$. Ponadto $v_2^{1_1,\eta} \le v_2^{1_2,\eta}$, czyli w stanie $P^{1_1,\eta}$ linia jest wolna nie później niż w stanie $P^{1_2,\eta}$. Z powyższego wynika, że od stanu $P^{1_1,\eta}$ partie ze zbioru $\Omega^{1_1,\eta}$ mogą być montowane wg harmonogramu, który wynika z trajektorii lokalnie Pareto – optymalnej. A zatem możemy napisać:

$$v_1^{\lambda_1,N} = v_1^{1_1,\eta} + \Delta v_1 \qquad /48a/$$

$$v_2^{\lambda,N} = v_2^{1_1,\eta} + \left(v_2^{1_2,\eta} - v_2^{1_1,\eta}\right) + \Delta v_2 \qquad /48b/$$

Gdyby montaż ze stanu $P^{1_1,\eta}$ był prowadzony od chwili $v_2^{1_1,\eta}$, to otrzymamy stan lokalnie Pareto – optymalny $P^{1_1,N}$ o współrzędnych wartości:

$$v_1^{1_1,N} = v_1^{1_1,\eta} + \Delta v_1 \qquad /49a/$$

$$v_2^{1_1,N} = v_2^{1_1,\eta} + \Delta v_2 \qquad /49b/$$

Z porównania /49/ i /48/ widzimy, że stan $P^{1_1,N}$ dominuje nad stanem $P^{\lambda,N}$ /ponieważ $v_2^{1_1,\eta} \le v_2^{1_2,\eta}$/. Z kolei z porównania /47/ i /48/ widać, że stan $P^{\lambda,N}$ dominuje nad stanem $P^{1_2,N}$, /ponieważ $v_i^{1_2,\eta} \le v_i^{1_2,\eta}$/. A zatem stan $P^{1_2,\eta}$ jest zdominowany przez stan $P^{1_1,\eta}$, ponieważ nie pozwala wygenerować stanów Pareto – optymalnych.

Reguła sondowania ma postać twierdzenia:

<u>Tw. 3.:</u> Stan P jest nieperspektywiczny, jeżeli spełnia warunek:

$$\left(b_1 - v_1^a > q_1\right) \vee \left(b_2 > v_2^a\right) \qquad /50/$$

gdzie: P^a – stan aktualnie najlepszy.

<u>Dowód:</u> Załóżmy, że $P^{1,N}$ jest dowolnym stanem końcowym otrzymanym z P. Współrzędne wartości $v_1^{1,N}$ i $v_2^{1,N}$ tego stanu spełniają warunek:

$$b_1 \le v_1^{1,N} \qquad /51a/$$

$$b_2 \le v_2^{1,N} \qquad /51b/$$

Warunek /51/ spełniają wszystkie stany lokalnie Pareto – optymalne, które można otrzymać z P. A zatem podstawiając /51/ do /50/ otrzymamy:

$$\left(v_1^{1,N} - v_1^a > q_1\right) \wedge \left(v_2^{1,N} > v_2^a\right) \qquad /52/$$

Uwzględniając /27/ w /52/ widzimy, że każdy stan lokalnie Pareto - optymalny $P^{1,N}$ jest zdominowany przez stan aktualnie najlepszy.

Posługując się oszacowaniem b_1 i b_2 można ze stanu P wygenerować /np. heurystycznie/ jeden stan końcowy $P^{\lambda,N}$. Jeżeli $b_1 = v_1^{\lambda,N}$ i $b_2 = v_2^{\lambda,N}$, a ponadto spełniony jest warunek:

$$\left(v_1^a - b_1 > q_1\right) \vee \left[\left(b_1 - v_1^a < q_1\right) \wedge \left(b_2 < v_2^a\right)\right] \qquad /53/$$

to stan $P^{\lambda,N}$ staje się aktualnie najlepszym.

Dla przyspieszenia obliczeń dominacji stanów zbiory $\mathcal{L}_\eta$ porządkuje się. W każdym zbiorze $\mathcal{L}_\eta$ wyróżnia się podzbiory $\mathcal{L}_\eta^j$ stanów, które zawierają te same partie obiektów. Z kolei zbiory $\mathcal{L}_\eta^j$ są uporządkowane w zależności od numeru k ostatniej partii W_k montowanej na linii. W ten sposób w podzbiorach $\mathcal{L}_\eta^{j,k}$ mogą się znaleźć co najwyżej dwa stany wzajemnie niezdominowane /alternatywne/. Liczba wszystkich podzbiorów jest zależna od dopuszczalnej liczby stanów aktywnych L_η.

4. Zakończenie

W pracy rozważono dyskretny proces montażu partiami obiektów. Linia montażowa była traktowana jako pojedynczy agregat. Istotne znaczenie w takim agregacie ma rozróżnienie chwil wejścia i wyjścia pierwszego i ostatniego obiektu partii.

Jeżeli liczba obiektów w partii jest większa od liczby stacji montażowych na linii, to rozwiązanie problemu jest uproszczone. W tym przypadku na linii w każdej chwili mogą znajdować się najwyżej obiekty dwóch różnych partii. Jeżeli partie są krótsze, to problem się komplikuje, lecz może być rozwiązany analogicznie. W skrajnym przypadku otrzymujemy model montażu mieszanego. Wykorzystanie metody programowania wieloetapowego dla rozwiązania problemu kolejnościowego w montażu mieszanym jest niecelowe.

W rozważonym deterministycznym modelu montażu wyróżniono kryterium kosztowe i czasowe. Szczegółowe uwzględnienie zmian cyklu linii w analogicznym modelu optymalizacyjnym stanowi ujęcie nowe, dotąd nie rozpatrywane. Również problem polioptymalnego sterowania procesem montażu na linii przedstawiono po raz pierwszy.

Uwzględnienie w procesie montażu dodatkowych zasobów /odnawialnych, nieodnawialnych oraz podwójnie ograniczonych/ komplikuje przedstawiony model. Wynika to przede wszystkim z równoczesnej obsługi różnych obiektów na linii. Podobnie, próba uwzględnienia losowości w procesie montażu czyni model analityczny zbyt skomplikowanym dla praktycznych zastosowań. Z tego względu w dalszym ciągu duże znaczenie mają modele symulacyjne.

LITERATURA

[1] Bellman R.: Adaptacyjne procesy sterowania, PWN, Warszawa, 1965.

[2] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J.: Algorytmy sterowania rozdziałem zadań i zasobów w kompleksie operacji, WPP, Poznań 1978.

[3] Coffman E.G., jr /red./.: Teoria szeregowania zadań, WNT, Warszawa 1980.

[4] Cohon J.: Multiobjective Programming and Planning, Academic Press, New York - Stan Francisco - London 1978.

[5] Garfinkel R.S., Nemhauser G.L.: Programowanie całkowitoliczbowe, PWN, Warszawa, 1978.

[6] Held M., Karp R.M.: A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems, Journal on Applied Mathematics, SIAM, V.10, No.1, 1962, pp. 196-210.

[7] Kaczmarski S.: Przegląd systemów sterowania produkcją u wybranych producentów samochodów osobowych, Forum Automatyki 78, FSO, Warszawa 1978, t.I, ss.87-102.

[8] Małuski i inni: Laboratorium statystyki matematycznej. Skrypty uczelniane Pol.Śl./w druku/.

[9] Mao E.P.C.: A Preference Order Dynamic Program for Stochastic Assembly Line Balancing, Management Science, V. 22, No 10, 1976, 1097-1104.

[10] Kohler W.H., Steiglitz K.: Przeglądowe i iteracyjne metody obliczeniowe /Teoria szeregowania zadań, red. Coffman E.G.,jr/, WNT, Warszawa, 1980, ss.241-301.

[11] Korbut A.A., Finkelsztejn J.J.: Programowanie dyskretne, PWN, Warszawa 1974.

[12] Kowalowski H. i inni: Automatyzacja dyskretnych procesów przemysłowych, WNT /w druku/.

[13] Lsyta J.: Analiza algorytmów harmonogramowania dyskretnych procesów przemysłowych na jednym agregacie. Praca dyplomowa magisterska /niepublikowana/, Instytut Automatyki, Pol.Śl., Gliwice, 1983.

[14] Marecki F.:Modelowanie symulacyjne linii montażowej samochodu małolitrażowego,Informatyka, No.7-8, 1975, ss.25-28.

[15] Marecki F.:Modelowanie cyfrowe procesu montażu silnika samochodu FIAT-1 Konferencja nt."Zastosowanie komputerów w przemyśle", NOT, Szczecin 1978, sekcja IV, ss.29-42.

[16] Marecki F.: O upravlenii kaczestwom processa sborki na liniach, 3-rd International Conference on: Control Systems and Computer Science", Politechnical Institute of Bucharest, Bucharest. 1979, V.III, pp. 917-939.

[17] Marecki F.:Probabilistyczna analiza jakości procesu montażu na liniach. Konferencja nt."VIII dni jakości i niezawodności",NOT,Gliwice 1979, ss.76-92.

[18] Marecki F.: Harmonogramowanie procesu montażu wielowersyjnego. Konferencja nt."VIII dni jakości i niezawodności",NOT,Gliwice 1979, ss.156-180.

[19] Marecki F.: Problem kolejnościowy w montażu wielowersyjnym. ZN Politechniki Śląskiej,s.Automatyka, nr 54, Gliwice 1980, ss.119-128.

[20] Marecki F.: Problemy sterowania procesem montażu na liniach. Konferencja nt."Nowe metody organizacji produkcji i pracy w montażu wyrobów", SIMP, Wrocław 1980, ss.1-19.

[21] Marecki F.: Control of Discrete Processes. 5-th International Conference on "Control Systems and Computer Science", Bucharest 1983.

[22] Marecki F.,Ślesińska I.: Problemy harmonogramowania procesu lakierowania karoserii. ZN Politechniki Śląskiej, s.Automatyka nr 64, Gliwice 1980, ss.83-94.

[23] Marecki F.: Harmonogramowanie procesu lakierowania karoserii samochodowych. ZN Politechniki Śląskiej, s.Automatyka /w druku/.

[24] Misiewicz B.: Analiza projektowa jakości montażu na liniach. Praca dyplomowa magisterska /niepublikowana/, Instytut Automatyki,Gliwice 1981.

[25] Niederliński A.: Harmonogramowanie produkcji a wielopoziomowe, wielowymiarowe układy regulacji nadążnej. ZN Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, nr.55, Gliwice 1980, ss.63-69.

[26] Riedel C.,Peshel M.: Polioptymalizacja. WNT, Warszawa 1979.

[27] Słowiński R.: Metody wielokryterialnego programowania liniowego - próba syntezy. XXI Sympozjon "Modelowanie w mechanice",PTMTiS, Gliwice 1982, ss.389-424.

[29] Szymura J.,Pietraszek W.: Komputerowy system harmonogramowania produkcji Zakładu Karoserii FSM-02. ZN Politechniki Śląskiej, s.Automatyka, nr 55, Gliwice 1980, ss.111-118.

[30] Węgrzyn S.: Podstawy informatyki. PWN, Warszawa 1982.

[31] Wikierska I.: Uprawlenije processom okraski kuzowow. 5-th International Conference on "Control Systems and Computer Science",Bucharest 1983.

[32] Wirth N.: Algorytmy + struktury danych = programy. PWN, Warszawa 1981.

[33] Zgorzyk P.: Modelowanie cyfrowe lakierni samochodów małolitrażowych FIAT- 126P. Praca dyplomowa magisterska /niepublikowana/, Instytut Automatyki, Gliwice 1980.

Recenzent: Prof.dr hab.inż.Stanisław Piasecki

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

ДВУХКРИТЕРИАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМ ПРОЦЕССОМ РЕАЛИЗОВАННОМ НА ОДНОМ АГРЕГАТЕ

Р е з ю м е

В работе сформулирована модель двухкритериального управления дискретным процессом сборки на одном агрегате . Для решения задачи использовано метод многоэтапного программирования.

BICRITERIAL CONTROL PROBLEM FOR A DISCRETE PROCESS REALIZED USING ONE AGGREGATE

S u m m a r y

Bicriterial control model for discrete process realized on one aggregate /assembly line/. Multistage programming method is used to solve the problem.