ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1984

Seria: AUTOMATYKA z. 76 Nr kol. 812

Jerzy Szymura
Główny Instytut Górnictwa

PROBLEM STEROWANIA PRODUKCJĄ Z WYBOREM ZADAŃ ALTERNATYWNYCH / PSW /

Streszczenie. Podstawowym założeniem deterministycznej teorii szeregowania zadań jest założenie, że zbiór zadań J wprowadzanych do harmonogramu jest znany i z góry ustalony. W niektórych przypadkach założenie to nie jest spełnione; problemy planowania /określenie zbioru J/ i szeregowania /określenie sekwencji/ powinny być rozpatrywane jako jeden integralny problem - problem sterowania produkcją z wyborem zadań alternatywnych /PSW/.
W pracy przedstawiono przykład problemu PSW: $(1|n\&k,m|seq\ dep|\sum c_{ij})$. Przedstawiono sformułowanie i niektóre własności optymalizacyjnego problemu $(1|n\&k,m|seq\ dep|\sum c_{ij})$ oraz optymalny/przybliżony/algorytm rozwiązujący PSW za pomocą metody podziału i ograniczeń.

1. Wprowadzenie

Jednym z podstawowych założeń deterministycznej teorii szeregowania zadań /harmonogramowania/ jest założenie, że zbiór zadań J jest znany i z góry ustalony [np. Baker 1974, Coffman 1976, Rinnooy Kan 1976] . Przy takim założeniu poszukuje się sekwencji zadań /harmonogramu/ spełniającej pewne, określone dla danego problemu wymagania, przy czym sekwencja ta powinna zawierać wszystkie zadania należące do J.

Z drugiej strony wydaje się oczywiste , iż w praktyce decyzja określająca wybór harmonogramu musi być poprzedzona decyzją określającą zbiór J zadań wprowadzanych do harmonogramu. Czynności związane z określeniem tej decyzji nazwiemy planowaniem produkcji.
Tak więc punktem wyjścia dla deterministycznej teorii szeregowania zadań jest założenie, że problemy planowania i szeregowania można rozpatrywać niezależnie od siebie, lub że problem planowania praktycznie nie istnieje /brak alternatywy dla określenia zbioru J/. W rzeczywistości założenie to jest zazwyczaj spełnione, czasami zaś przyjmuje się je "a priori" - np. w wielopoziomowych hierarchicznych systemach sterowania produkcją.

Istnieją jednak i takie rzeczywiste problemy, w których założenie powyższe nie może być spełnione, a problemy planowania i szeregowania muszą być rozwiązywane łącznie jako jeden problem. W przypadku zastosowań związanych ze sterowaniem produkcją /można podać również i inne zastosowania/ mówić będziemy wówczas o "Problemach Sterowania produkcją z Wyborem zadań alternatywnych" /PSW/. Należy przy tym zwrócić uwagę na to, że wybór zbio-

ru zadań wprowadzanych do harmonogramu może być dokonywany pośrednio, np. poprzez określenie pewnych cech wyrobu nie sprecyzowanych przez zamawiającego.
W pracy przedstawiono przykład problemu PSW - problem szeregowania zadań na 1 maszynie*) z wyborem zadań alternatywnych i zależnymi kosztami przezbrajania. Rozszerzając konwencję notacyjną zaproponowaną w [Rinnooy Kan 1976] problem ten oznaczymy PSW $(1|n\&k,m|seq\ dep|\sum c_{ij})$.

2. Sformułowanie optymalizacyjnego problemu PSW $(1|n\&k,m|seq\ dep|\sum c_{ij})$

Dany jest zbiór zadań stałych $J_0=\{1,\ldots,n\}$ i zbiór zadań alternatywnych $J_A=\{n+1,\ldots,n+m\}$. Zadania wykonywane są na 1 maszynie. Sposób wykonywania zadań określa jednoznacznie harmonogram - sekwencja wykonywanych zadań poprzedzona stanem początkowym i zakończona stanem końcowym. Stany początkowy i końcowy oznaczać będziemy symbolem "$\emptyset$". W momencie zmiany zadania wykonywanego przez maszynę zachodzi konieczność przezbrojenia maszyny. Koszt przezbrojenia maszyny przy zmianie wykonywanego zadania z "i" na "j" oznaczać będziemy - c_{ij}, a koszty przezbrajania ze stanu początkowego i do stanu końcowego odpowiednio: $c_{\emptyset i}$ i $c_{i\emptyset}$.
Możemy obecnie sformułować problem PSW$(1|n\&k,m|seq\ dep|\sum c_{ij})$:

PSW1: Znaleźć sekwencję /harmonogram/ $h=\langle\emptyset,i_1,\ldots,i_{n+k},\emptyset\rangle$ zawierającą wszystkie zadania ze zbioru zadań stałych J_0 oraz k spośród m zadań ze zbioru zadań alternatywnych J_A, minimalizującą sumaryczne koszty przezbrajania:

$$C=\sum_{\langle i,j\rangle\in h'} c_{ij}\quad,\ \text{gdzie}\ h'=\langle\langle 0,i_1\rangle,\langle i_1,i_2\rangle,\ldots,\langle i_{n+k},0\rangle\rangle$$

Koszty c_{ij} mogą zawierać składnik cw_j określający koszt związany z wyborem zadania j. W tym przypadku:

$$c_{ij}=cp_{ij}+cw_j\ ,$$

gdzie cp_{ij} określa wyłącznie koszt przezbrojenia $\langle i,j\rangle$. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że:

$$c_{ij}\geqslant\emptyset.$$

Powyższe sformułowanie PSW $(n\&k,m)$ wysuwa na pierwszy plan decyzję określającą kolejność realizacji zbioru zadań wprowadzanych do harmonogramu. Nietrudno jednak zmodyfikować definicję PSW, kładąc nacisk na decyzję wyboru zadań alternatywnych:

PSW2: Znaleźć podzbiór $J_A^k\subseteq J_A$, $|J_A^k|=k$, który minimalizuje sumaryczne

*) termin "maszyna" ma tutaj znaczenie umowne.

koszty przezbrajania sekwencji $h=\langle \emptyset, i_1, \ldots, i_{n+k}, \emptyset \rangle$: $C = \sum_{\langle i,j\rangle \in h} c_{ij}$, zawierającej wszystkie zadania ze zbioru $J_A^k \cup J_O$.

Oznaczmy przez $\mathcal{J}_A^k$ rodzinę k-elementowych podzbiorów zbioru J_A oraz przez $H(J_A^k)$ zbiór harmonogramów możliwych do utworzenia dla $J_A^k \cup J_O$. Harmonogram optymalny h_O będący rozwiązaniem problemu PSW(n♮k,m) spełnia następującą zależność:

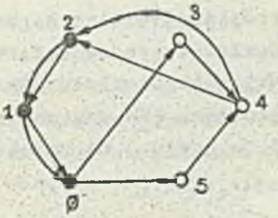
$$C(h_O) = \min_{J_A^k \in \mathcal{J}_A^k} \left\{ \min_{h \in H(J_A^k)} C(h) \right\}$$

Liczba rozwiązań dopuszczalnych problemu PSW(n♮k,m) jest więc równa $(n+k)! \binom{m}{k}$.

W dalszym ciągu wygodnie będzie korzystać z graficznej interpretacji PSW. Sformułujemy ją za pomocą pojęć teorii grafów. Rozważmy digraf $G=\langle V,A\rangle$ ze zbiorem wierzchołków $V=V_O \cup V_A$, gdzie $V_O=\{\emptyset,1,\ldots,n\}$ oznacza zbiór wierzchołków stałych, $V_A=\{n+1,\ldots,n+m\}$ - zbiór wierzchołków alternatywnych, a A - zbiór łuków $\langle i,j\rangle$ o wadze /koszcie/ c_{ij}. Zbiór wierzchołków V odpowiada zbiorowi zadań J plus stany początkowy i końcowy, a zbiór łuków A odpowiada zbiorowi możliwych przezbrojeń $\langle i,j\rangle$. W tym kontekście dopuszczalny harmonogram $h=\langle \emptyset, i_1, \ldots, i_{n+k}, \emptyset\rangle$ odpowiada konturowi prostemu ω w G przechodzącemu dokładnie jeden raz przez wszystkie wierzchołki z V_O oraz przez k wierzchołków alternatywnych z V_A. Ponieważ kontur ω jest konturem Hamiltona w podgrafie $G'=\langle V_O \cup V_A^k, A'\rangle$, $V_A^k \subseteq V_A$, $|V_A^k|=k$, nazwiemy go "subkonturem Hamiltona w G".

Problem PSW(n♮k,m) możemy obecnie sformułować następująco:

PSW3: Znaleźć subkontur Hamiltona w digrafie $G=\langle V_O \cup V_A, A\rangle$, zawierający wszystkie wierzchołki stałe i k dowolnych wierzchołków alternatywnych, o minimalnym koszcie: $C(\omega) = \sum_{\langle i,j\rangle \in \omega} c_{ij}$



$V_O = \{\emptyset,1,2\}$

$V_A = \{3,4,5\}$

$\omega_1 = \langle \emptyset,5,4,2,1,\emptyset\rangle$

$\omega_2 = \langle \emptyset,3,4,2,1,\emptyset\rangle$

Rys. 1. Przykłady subkonturów Hamiltona dla PSW(2♮2,3)

3. Własności problemu PSW

Przedstawione powyżej sformułowania PSW pozwalają na dokładne zlokalizowanie problemu w klasie problemów optymalizacji kombinatorycznej. I tak szczególny przypadek PSW(n≥Ø,Ø) jest klasycznym problemem szeregowania zadań z zależnymi kosztami przezbrajania na 1 maszynie: $(1|n|seq\ dep|\sum c_{ij})$. Problem ten jest z kolei równoważny standardowemu problemowi komiwojażera - STSP. Problem ogólny PSW(n≥k,m), k>Ø,k<m, jest więc nowym uogólnieniem obu tych problemów.
Ze związku ogólnego PSW z STSP mogą wynikać interesujące zastosowania tego problemu. Można przy tym osłabić niektóre ograniczenia - dopuszczając np. możliwość wielokrotnego przejścia przez ten sam wierzchołek.

Należy jednak podkreślić, że uogólnienie, jakim jest w stosunku do wspomnianych problemów PSW, uniemożliwia bezpośrednie zastosowanie w stosunku do PSW rezultatów uzyskanych dla wspomnianych problemów. W szczególności dotyczy to algorytmów rozwiązujących dane problemy.

W dalszym ciągu przedstawimy twierdzenia ilustrujące niektóre własności problemu PSW.

Twierdzenie 1.

Jeśli $\{c_{ij}\}$ spełnia warunek trójkąta, tzn. $\forall i,j,k \in [\emptyset, n+m]\ (c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj})$, to wówczas pominięcie, występującego w sformułowaniu PSW ograniczenia, dopuszczającego co najwyżej jednokrotne przejście subkonturu dopuszczalnego przez każdy z wierzchołków grafu G, nie spowoduje zmniejszenia kosztu rozwiązania optymalnego.

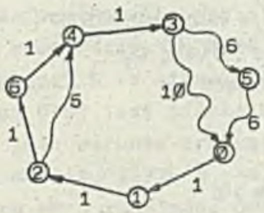
Dowód. Niech ω_0' oznacza rozwiązanie optymalne osłabionego problemu PSW /dopuszczającego wielokrotne przejście rozwiązania dopuszczalnego przez każdy z wierzchołków grafu G/. Oznaczmy zbiór wierzchołków alternatywnych zawartych w ω_0' przez V_{A0}^k. Z określenia PSW wynika, że ω_0' jest równocześnie rozwiązaniem optymalnym problemu STSP w pełnym podgrafie $G' = \langle V_0 \cup V_{A0}^k, A' \rangle$ z kosztami $\{c_{ij}\}$, a więc na podstawie twierdzenia o drodze komiwojażera dla STSP z $\{c_{ij}\}$ spełniającym warunek trójkąta [Bellmore, Nemhauser 1968], ω_0' przechodzi przez każdy z wierzchołków dokładnie jeden raz. Kontur ω_0' jest równocześnie rozwiązaniem nie osłabionego problemu PSW: $\omega_0' = \omega_0$. Każdy dopuszczalny kontur ω' osłabionego problemu PSW przechodzący więcej niż jeden raz przez dowolny z wierzchołków grafu G ma zatem koszt $C(\omega') \geqslant C(\omega_0')$.

Z twierdzenia 1 wynika ważny wniosek, mówiący, że dopuszczenie przerywalności zadań w sformułowaniu PSW z $\{c_{ij}\}$ spełniającym warunek trójkąta /typowa sytuacja dla zastosowań, związanych z harmonogramowaniem produkcji/ nie prowadzi do zmniejszenia kosztu realizacji harmonogramu. W tym miejscu należy zwrócić uwagę, że przerywalność zadań jest technologicznie możliwa. Zadaniem może być np. zbiór operacji związanych z wykonaniem partii wyrobów określonego rodzaju. W tym przypadku realizacja zadania może odbywać się w kilku niespójnych okresach czasu.

W związku z możliwością wyboru zadań wprowadzanych do harmonogramu powstaje pytanie: "Czy wprowadzenie do harmonogramu jednego lub kilku dodatkowych zadań alternatywnych może zmniejszyć koszt harmonogramu ?". Można pokazać, że dla PSW z dowolną $\{c_{ij}\}$ odpowiedź brzmi: "tak" .

Przykład

Rozważmy problem PSW(4&k,2) dla k=Ø,1,2. Przyjmnijmy: $c_{3\emptyset}=1\emptyset$ $c_{\emptyset 1}=c_{12}=c_{26}=c_{43}=c_{64}=1$, $c_{24}=5$, $c_{35}=c_{5\emptyset}=6$, pozostałe $c_{ij}=1\emptyset\emptyset$.



Koszty rozwiązań optymalnych dla k=Ø,1,2 wynoszą odpowiednio:

$C(\omega_\emptyset)=18$, $\omega_\emptyset=\langle\emptyset,1,2,4,3,\emptyset\rangle$

$C(\omega_1)=15$ $\omega_1=\langle\emptyset,1,2,6,4,3,\emptyset\rangle$

$C(\omega_2)=17$ $\omega_2=\langle\emptyset,1,2,6,4,3,5,\emptyset\rangle$

Rys. 2.Rozwiązania optymalne PSW(4&k,2), k=Ø,1,2

W przypadku gdy $\{c_{ij}\}$ spełnia warunek trójkąta, sytuacja taka nie jest jednak możliwa.

Twierdzenie 2.

Oznaczmy przez ω_0' i ω_0'' rozwiązania optymalne problemów PSW'(n&k,m) i PSW''(n&(k+1),m), m > k.
Jeśli $\{c_{ij}\}$, identyczny dla obu problemów, spełnia warunek trójkąta, to $C(\omega_0') \leqslant C(\omega_0'')$.

Dowód. Korzystając z twierdzenia 1 możemy ograniczyć nasze rozważania do subkonturów Hamiltona /konturów prostych/. Pokażemy najpierw, że usunięcie dowolnego wierzchołka z dopuszczalnego subkonturu ω'' dla PSW'' nie prowadzi do zwiększenia jego kosztu. Istotnie, niech ω' oznacza subkontur otrzymany w wyniku usunięcia dowolnego wierzchołka i_s z ω_0''. Ponieważ $\{c_{ij}\}$ spełnia warunek trójkąta, więc $C(\omega_0'')-C(\omega')=c_{i_{s-1}i_s}+c_{i_s i_{s+1}}-c_{i_{s-1}i_{s+1}} \geqslant 0$. Tak więc $C(\omega_0'') \geqslant C(\omega') \geqslant C(\omega_0')$.

Z przedstawionych powyżej twierdzeń wynika następujący wniosek:

Rozwiązanie optymalne problemu PSW$(n\&k,m)$ z $\{c_{ij}\}$ spełniającym warunek trójkąta jest również rozwiązaniem optymalnym ogólniejszych problemów:

- dopuszczającego wielokrotne przejście rozwiązania przez ten sam wierzchołek /w konwencji TSP - możliwość wielokrotnego odwiedzania tego samego miasta/,
- dopuszczającego zmienność parametru k w zadanym przedziale $[k_{min}, k_{max}]$ /k jest zmienną decyzyjną/.

W dalszym ciągu zajmiemy się określeniem złożoności obliczeniowej PSW. Przedstawione powyżej współzależności pomiędzy PSW a STSP pozwalają wysunąć wniosek o silnej NP - trudności problemu PSW, który zawiera jako przypadek szczególny STSP. Pokażemy obecnie, że wtedy, gdy ograniczymy się do przypadku $k \in [1,m-1]$, $m \geqslant 2$, PSW pozostaje silnie NP - trudny. W tym celu skorzystamy ze sformułowania problemów PSW i STSP w postaci problemów decyzyjnych. Wartość progową oznaczymy C_T.

DPSW/DTSP: Czy dla danego problemu PSW$(n\&k,m \mid \{c_{ij}\})$ / STSP$(n \mid \{c_{ij}\})$ istnieje rozwiązanie ω o koszcie $C(\omega) \leqslant C_T$ /ω - subkontur lub kontur Hamiltona/?

Twierdzenie 3.

$$DTSP \propto DPSW(n\&k,m), \quad \text{dla} \quad k \in [1,m-1],\ m > 1$$

Dowód. Niech $G = \langle V,A \rangle$, $|V| = n+1$ oznacza pełny digraf dla DTSP$(n+1)$ o kosztach $\{c_{ij}\}$ i wartości progowej C_T. Dla tak określonego DTSP skonstruujemy DPSW w sposób następujący:

$n' = n-k$,

$k \in [1,n]$ - dowolna wartość z tego przedziału

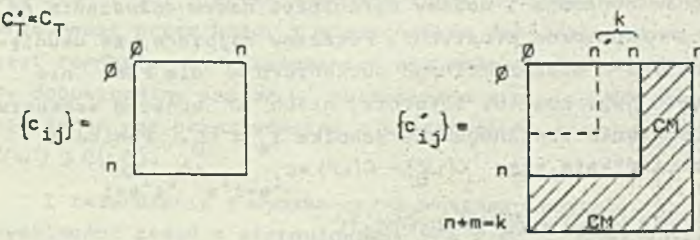
$m > k$ - dowolna wartość spełniająca ten warunek

$G' = \langle V_0 \cup V_A, A' \rangle$, gdzie $V_0 \subset V$, $|V_0| = n'+1 = n-k+1$,

$V_A = (V \setminus V_0) \cup V_A'$, $|V_A'| = m-k$

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{- dla } i,j \in V \\ CM \geqslant C_T & \text{- w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

$C_T' = C_T$



Rys. 3. Macierze kosztów dla DTSP(n+1) i DPSW(n&k,m)

Zauważmy, że DPSW ma rozwiązanie o koszcie $C'(\omega') \leqslant C'_T$ wtedy i tylko wtedy, gdy DTSP posiada rozwiązanie $C(\omega) \leqslant C_T$.
Istotnie wszystkie subkontury ω'' problemu DPSW zawierające dowolny z wierzchołków należących do V'_A mają koszt $C(\omega'') \geqslant 2CM \geqslant 2C_T$. Tak więc dowolny subkontur o koszcie $C(\omega) \leqslant C_T$ musi przechodzić przez k wierzchołków alternatywnych ze zbioru $V \setminus V_0$ i n+1-k wierzchołków stałych z V_0; jest więc równocześnie rozwiązaniem DTSP. Konkretne problemy określają ciągi parametrów: $I_{DPSW} = \langle n', k, m, \{c'_{ij}\}, C_T \rangle$; $I_{DTSP} = \langle n, \{c_{ij}\}, C_T \rangle$.
Przyjmując funkcję rozmiaru problemu, np. Length $[I] = (n+m)^2 \cdot \lfloor \log(\max\{c_{ij}\}) \rfloor$ dla problemów z $\max\{c_{ij}\} > 1$ oraz Length $[I] = (n+m)^2$ dla $\max\{c_{ij}\} = 1$, spełniającą niezbędne warunki "rozsądnego i zwięzłego" kodowania, możemy już bez trudu wykazać, że powyższa transformacja ma złożoność czasową $O(\text{Length}[I])$, jest więc transformacją wielomianową.

Ponieważ DTSP jest problemem należącym do klasy problemów silnie NP - zupełnych [Karp 1972; Garey, Johnson 1979], a przedstawienie wielomianowego niedeterministycznego algorytmu dla DPSW nie stanowi żadnego problemu, możemy stwierdzić, że DPSW należy również do klasy problemów silnie NP-zupełnych i to niezależnie od wartości k.
Ponieważ DTSP jest silnie NP - zupełny również dla specjalnych przypadków. takich jak: warunek trójkąta [Garey i inni 1976], odległości Euklidesowe [Papadimitriou 1977], $c_{ij} = \emptyset, 1$ [Karp 1972], to z powyższych rozważań wynika silna NP - zupełność DPSW również dla przypadków, gdy $\{c_{ij}\}$ spełnia wymienione powyżej warunki.

Związek problemu PSW z problemem STSP ułatwia również ocenę złożoności obliczeniowej problemu ε- przybliżonego PSW. Określa ją następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.

Problem istnienia rozwiązania przybliżonego problemu PSW, o dokładności względnej równej:

$$\frac{C(\omega) - C(\omega_0)}{C(\omega_0)} \leqslant \varepsilon$$

gdzie: ε - zadana dokładność względna, a $C(\omega_0) > \emptyset$ - koszt rozwiązania optymalnego, jest silnie NP - trudny.

Dowód. Aby udowodnić powyższe twierdzenie, skorzystamy z wielomianowej transformacji silnie NP - trudnego problemu: ε - przybliżony STSP [Sahni, Horowitz 1978], do przybliżonego problemu PSW. W tym celu zastosujemy wielomianową transformację przedstawioną w dowodzie twierdzenia 3, z tym, że dla rozszerzenia macierzy kosztów przyjmiemy $c'_{ij} = CM = (1+\varepsilon) \sum_{i,j \in [\emptyset,n]} c_{ij}$. Każdy subkontur ω przechodzący przez co najmniej jeden wierzchołek alternatywny należący do V_A' ma koszt $C(\omega) \geqslant 2(1+\varepsilon) \sum_{i,j \in [\emptyset,n]} c_{ij} \geqslant 2(1+\varepsilon)\, C(\omega_0)$. Z powyższej zależności otrzymujemy $\left(C(\omega) - C(\omega_0)\right) / C(\omega_0) \geqslant 1+2\varepsilon \leqslant \varepsilon$. Tak więc rozwiązanie o dokładności względnej ε istnieje dla PSW wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie przybliżone o dokładności ε dla STSP.

Z przeprowadzonej powyżej analizy złożoności obliczeniowej PSW można wnioskować, iż uzyskanie rozwiązania optymalnego lub przybliżonego o gwarantowanej dokładności względnej wymaga dużych nakładów obliczeniowych. Twierdzenia te stanowią również podstawę do wyboru metody rozwiązania PSW.

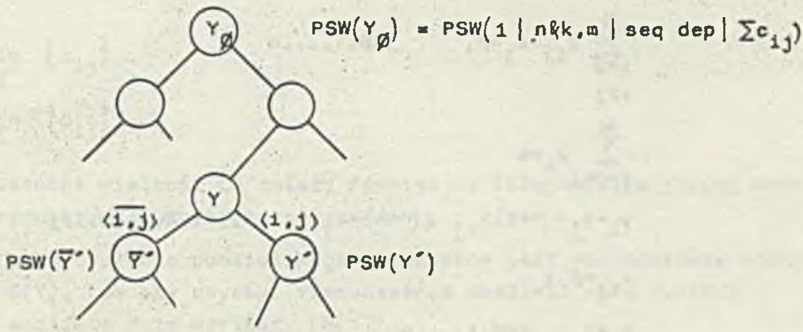
4. Algorytm

O wyborze metody rozwiązania PSW decydują wnioski płynące z twierdzeń 3 i 4. W tym przypadku w miarę dobrych rezultatów można spodziewać się przy zastosowaniu metody podziału i ograniczeń lub metody hybrydowej-programowania dynamicznego z eliminacją stanów nie rokujących nadziei na uzyskanie rozwiązania optymalnego.

W dalszym ciągu przedstawiony zostanie algorytm PSOP-BB1 korzystający z metody podziału i ograniczeń, rozwiązujący, w zależności od sposobu użycia, problem optymalizacyjny PSW lub problem przybliżony o zadanej dokładności względnej. W algorytmie zastosowano strategię przeglądu /regułę wyboru wierzchołka podziałowego/ określoną mianem strategii zgłębiania lub LIFO.

Z każdym wierzchołkiem podziałowym Y związany jest pewien podproblem PSW(Y) otrzymany z problemu wejściowego $PSW(Y_\emptyset) = PSW(n\&k,m)$ poprzez ustalenie lub zabronienie określonych przezbrojeń. Zastosowana w algorytmie reguła podziału polega na utworzeniu dla danego wierzchołka podziałowego Y dwóch następników: Y' i $\overline{Y}'$. Y' reprezentuje podproblem, w którym ustalone zostało pewne przezbrojenie $\langle i,j\rangle$, a $\overline{Y}'$ reprezentuje problem, w którym przezbrojenie $\langle i,j\rangle$ zostało zabronione. W rezultacie zbiór rozwiązań dopuszczalnych S(Y) jest dzielony na dwa rozłączne podzbiory: S(Y') - zawierający harmonogramy z przezbrojeniem $\langle i,j\rangle$ i $S(\overline{Y}')$ - zawierający harmonogramy bez przezbrojenia $\langle i,j\rangle$.

Ustalenie przezbrojenia $\langle i,j\rangle$ można interpretować jako zastąpienie dwóch zadań: i,j oraz łączącego je przezbrojenia $\langle i,j\rangle$ jednym zadaniem r, przy czym związane z nim koszty przezbrojenia są odpowiednio równe: $c_{lr} = c_{li}$, $c_{rl} = c_{jl}$, dla odpowiednich $l \in [\emptyset,\dots,n+m]$. Tak więc PSW(Y') jest problemem o zmniejszonym w stosunku do PSW(Y) rozmiarze. Macierz kosztów $\mathbf{C}(Y')$ otrzymujemy usuwając z $\mathbf{C}(Y)$ i-ty wiersz oraz j-tą kolumnę. Należy również zmodyfikować parametry n,m,k.



Rys. 4. Drzewo przeszukiwań algorytmu podziału i ograniczeń PSOP

$PSW(\overline{Y}')$ otrzymujemy z $PSW(Y)$ podstawiając w $C(Y)$: $c_{ij} = \infty$. Parametry n,k,m pozostają w tym przypadku bez zmiany.

Zastosowana w algorytmie reguła wyboru LIFO powoduje wybranie w pierwszej kolejności następnika Y'.

Przedstawiona powyżej idea podziału została zaczerpnięta z algorytmu Little'a [Little i inni, 1963], jednak jej zastosowanie wymagało opracowania nowej funkcji dolnego ograniczenia - LB(Y) oraz procedury wyboru przezbrojenia podziałowego. W dalszym ciągu omówiona zostanie zmodyfikowana metoda redukcji macierzy kosztów zastosowana w algorytmie do wyznaczania dolnego ograniczenia LB(Y).
Aby ją wyjaśnić, skorzystamy ze sformułowania PSW jako problemu PLC. W tym celu wprowadzimy zmienne binarne x_{ij} i z_j o następującym znaczeniu:

$$x_{ij} = \begin{cases} \emptyset & \langle i,j \rangle \notin h \\ 1 & \langle i,j \rangle \in h \end{cases} \qquad i,j=\emptyset,\dots,n+m,\ i \neq j,$$

$$z_i = \begin{cases} \emptyset & i \notin h \\ 1 & i \in h \end{cases} \qquad i=\emptyset,\dots,n+m,$$

Problem PSW można sformułować następująco:

PLC: $$\min \sum_{i=\emptyset}^{N} \sum_{\substack{j=\emptyset \\ j\neq i}}^{N} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$\sum_{\substack{j=\emptyset \\ j\neq i}}^{N} x_{ij} - z_i = \emptyset, \quad i=\emptyset,1,\dots,N$$

$$\sum_{\substack{i=\emptyset \\ i\neq j}}^{N} x_{ij} - z_j = \emptyset, \qquad j=\emptyset,1,\ldots,N$$

$$\sum_{i=n+1}^{N} z_i = k$$

$$y_i - y_j + (n+k)\,x_{ij} \leqslant (n+k) - z_j, \qquad i,j=1,2,\ldots,N,\ i\neq j$$

$$x_{ij} = \emptyset,1$$

$$z_i = 1, \quad i=\emptyset,1,\ldots,n$$

$$z_i = \emptyset,1, \quad i=n+1,\ldots,N$$

$$y_i \geqslant \emptyset$$

$$N = n+m$$

Przyjmijmy, że rozważania nasze ograniczymy do pewnego wierzchołka podziałowego Y i związanego z nim podproblemu PSW(Y) opisanego powyższymi zależnościami. Aby oszacować wartość funkcji kosztu dla Y, dokonamy redukcji macierzy $\{c_{ij}\}$ polegającej na odjęciu od każdego wiersza macierzy **C** pewnej stałej u_i.
W tym celu dokonamy podstawienia $c_{ij} = c'_{ij} + u_i$ pamiętając, by $c'_{ij} \geqslant \emptyset$.
Następnie postępujemy podobnie z kolumnami odejmując od każdej z nich wartość v_j, co sprowadza się do wykonania podstawienia $c'_{ij} = c''_{ij} + v_j$.
W rezultacie otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$C = \sum_{\emptyset}^{N}\sum_{\emptyset}^{N} c_{ij} x_{ij} = \sum_{\emptyset}^{N}\sum_{\emptyset}^{N} c''_{ij} x_{ij} + \sum_{n+1}^{N} (u_i + v_i)\, z_i + \sum_{\emptyset}^{N} (u_i + v_i)$$

Ponieważ $\sum_{n+1}^{n+m} z_i = k$, więc:

$$\sum_{n+1}^{n+m} (u_i + v_i)\, z_i \geqslant \sum_{i\in K} (u_i + v_i),$$

gdzie: K jest zbiorem indeksów k najmniejszych sum $(u_i + v_i)$.

W rezultacie dolne ograniczenie sumarycznych kosztów przezbrajania dla PSW(Y):

$$LB(Y) = \sum_{\emptyset}^{n} (u_i + v_i) + \sum_{i\in K} (u_i + v_i)$$

Pierwszy składnik określa tzw. redukcję dla zadań stałych, drugi natomiast jest oszacowaniem związanym z zadaniami alternatywnymi. Z punktu widzenia efektywności algorytmu korzystna jest możliwie duża wartość LB, w związku z czym przyjmuje się

$$u_i = \min_j \{c_{ij}\}$$

$$v_j = \min_i \{c'_{ij}\}$$

W rzeczywistości wielkość LB zależy również od kolejności, w jakiej dokonuje się redukcji kolumn i wierszy.

Wybór przezbrojenia podziałowego wykonywany jest na podstawie analizy macierzy $C(Y)$, tak aby uzyskać równocześnie możliwie małą wartość $LB(Y')$ i możliwie dużą wartość $LB(\bar{Y}')$.

LITERATURA

[1] BAKER,K.R.: Introduction to Sequencing and Scheduling, New York, 1974.
[2] CONWAY,R.W.,MAXWELL,W.L.,MILLER,L.W.: Theory of Scheduling, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley.
[3] GAREY,M.R.,GRAHAM,R.L.,JOHNSON,D.S.: "Some NP-Complete Geometric Problems", Proc. 8th SIGACT Symp. on the Theory of Computing, 1976.
[4] GAREY,M.R.,JOHNSON,D.S.: Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, San Francisco, Freeman, 1979.
[5] KARP,R.M.: "Reducibility among combinatorial problems", w: Miller,R.E., Thatcher,J.W./ed./, Complexity of Computer Computations, New York, Plenum Press, 1972.
[6] LITTLE,J.D.,MURTY,K.G.,SWEENEY,D.W.,KAUL,C.: "An Algorithm for the Traveling Salesman Problem", Operations Research, Tom 23, Nr 11, 1963.
[7] PAPADIMITRIOU,C.: "The Euclidean Traveling Salesman Problem is NP-Complete", Theoret. Comput. Sci., Nr 4, 1977.
[8] RINNOOY KAN,A.H.G.: Machine Scheduling Problems: Classification, complexity and computations, The Hague, Martin Nijhoff, 1976.
[9] SAHNI,S.K.,HOROWITZ,E.: "Combinatorial Problems: Reducibility and Approximations", Operations Research, Tom 26, Nr 5, 1978.
[10] COFFMAN E.G.Jr, red.: Computer and Job-shop scheduling theory, Wiley, New York 1976.

Recenzent: Doc.dr hab.inż.Jacek Błażewicz

Wpłynęło do Redakcji do 30.03.1984r.

```
{----------------------------------------------------------------------------}
{  FUNKCJA:    PSOP_bb1 znajduje rozwiazanie SCHEDL optymalizacyjnego       }
{              lub PREC-przyblizonego problemu PSW.                          }
{  WEJSCIE:    YO       - struktura opisujaca korzen drzewa przegladu       }
{                         (parametry problemu wejsciowego)                   }
{              CO       - macierz kosztow                                    }
{              MAXTIME  - ograniczenie czasu obliczen                        }
{  WYJSCIE:    SCHEDL   - znalezione rozwiazanie (harmonogram).              }
{              TIME_UP  - wskaznik przekroczenia czasu MAXTIME               }
{              COST     - koszt znalezionego rozwiazania (SCHEDL)            }
{              EL       - liczba wyeliminowanych wierzcholkow drzewa         }
{                         przeszukiwan                                       }
{              BR       - liczba rozgalezionych wierzcholkow drzewa          }
{                         przeszukiwan                                       }
{  ZWIAZKI PRZYCZYNOWO-SKUTKOWE                                              }
{                                                                            }
{       if  not TIME_UP  then                                                }
{                 if  PREC=0  then    SCHEDL = optymalny                     }
{                             else    SCHEDL = PREC-przyblizony              }
{                        else    SCHEDL = najlepszy znaleziony               }
{----------------------------------------------------------------------------}

procedure  PSOP_bb1( YO:  NODE_DSCR;    CO:  COST_MTX;
                     PREC, MAXTIME:  INTEGER;
                     var SCHEDL:  SCHEDL_DSCR;
                     var COST, EL, BR:  INTEGER;
                     var TIME_UP:  BOOLEAN           );
begin
C  := CO;
EL := 0;
BR := 0;
ANALYSE_NODE( YO );
end;     { PSOP_bb1 }

procedure  ANALYSE_NODE( Y:  NODE_DSCR );

global:  BR, C, CO, COST, EL, MAXTIME, PREC, SCHEDL, TIME_UP;
local:   Y_PRIM: NODE_DSCR;
         EXIST:  BOOLEAN;

begin
LB := LOWER_BOUND( Y );
if  FOUND_SCHEDL( Y ) and (COST > LB)  then
    begin
    SCHEDL := SCHEDULE( Y );
    COST   := LB;
    end;
TIME_UP := PROCESSING_TIME > MAXTIME;
if  not TIME_UP  then
    begin
    if  (1+PREC)*LB >= COST  then    EL := EL + 1;
    else
        begin
        BR := BR + 1;
        CREATE_RIGHT_SUCC( Y, Y_PRIM );
        ANALYSE NODE( Y_PRIM );
        CREATE_LEFT_SUCC( Y, EXIST, Y_PRIM )
        if  EXIST  then
            if  (1+PREC)*LB >= COST  then    EL := EL + 1;
                                     else    ANALYSE_NODE( Y_PRIM );
                 else  ;
        end;
    end;
end;     { ANALYSE_NODE }
```

Rys. 5.Opis algorytmu PSOP w notacji zbliżonej do języka Pascal

ПРОБЛЕМА УПРАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВОМ С ВЫБОРОМ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ЗАДАНИЙ

Р е з ю м е

Одним из основных предположений детерминистической теории составления графиков производства является предположение, что множество задач известно и фиксировано. Однако в некоторых случаях это предположение не выполняется проблемы планирования (определение множества заданий) и составления графиков производства для задач пренадлежащих к определённому множеству надо рассматривать как отдельную интегральную проблему управления производством с выбором альтернативных задач(ПУВ). В работе показан пример проблемы ПУВ. Дана формулировка и анализ оптимизирующей проблемы вместе с оптимальным (приближённым) алгоритмом ветвей и границ, решающим эту проблему.

PRODUCTION CONTROL PROBLEM WITH A CHOICE OF ALTERNATIVE JOBS

S u m m a r y

One of the basic assumptions in deterministic scheduling theory states that the set of jobs J is fixed and known in advance. However in some cases this assumption is not met and thus production planning /determination of job set J/ and sequencing /determination of job sequence/ problems ought to be considered as one integrated problem - production control problem with a choice of alternative jobs - PSP. The paper presents an example of PSP problem: 1 n k,m seq dep c_{ij} ; problem formulation and analysis and optimal/approximate algorithm using branch and bound method to solve the problem.