

Piotr TATJEWSKI

Instytut Automatyki

Politechnika Warszawska

STEROWANIE OPTYMALNE SIECIAMI WODOCIĄGOWYMI Z WYKORZYSTANIEM ROZSZERZONEJ FUNKCJI LAGRANGE'A

Streszczenie. Praca poświęcona jest algorytmom metody dualnej wyznaczania harmonogramów optymalnych napełnień zbiorników sieciowych przy sterowaniu sieciami wodociągowymi w strukturze warstwowej. Przedstawiono nowy algorytm oparty na wykorzystaniu rozszerzonej funkcji Lagrange'a, efektywny w rozważanych zastosowaniach praktycznych.

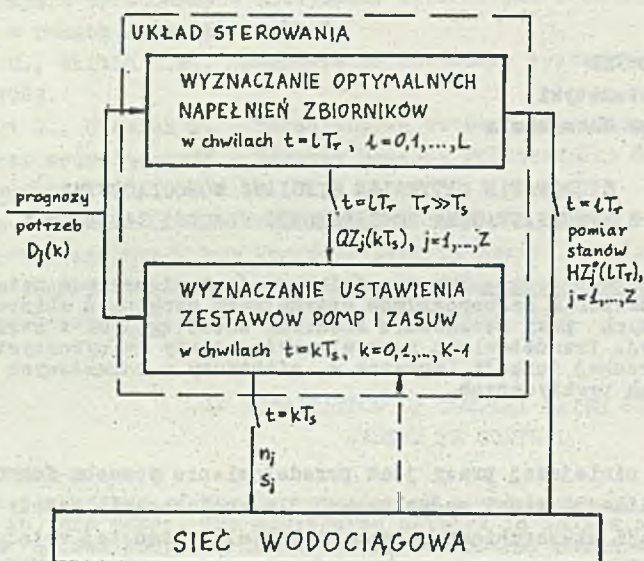
1. WSTĘP

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie sposobu formułowania zadań optymalizacji sieci wodociągowej dla zastosowania metody dualnej optymalizacji hierarchicznej oraz nowego algorytmu tej metody wykorzystującego rozszerzoną funkcję Lagrange'a. Zadanie dynamicznej optymalizacji zagregowanej sieci wodociągowej jest podstawą działania warstwy nadrzędnej w warstwowym układzie sterowania bieżącego siecią wodociągową. W pracy przedstawiono sformułowanie zadania optymalizacji sieci, zasygnalizowano możliwości i ograniczenia zastosowania metody bezpośredniej do jego rozwiązania. Następnie przedstawiono przekształcenia zadania optymalizacji sieci konieczne dla metody dualnej, dotychczasowe i nowe bazujące na wprowadzeniu dodatkowych zmiennych. Wreszcie w rozdziale 5 przedstawiono nowy algorytm metody dualnej wykorzystujący rozszerzoną funkcję Lagrange'a, porównując go z algorytmem klasycznym.

2. WARSTWOWA STRUKTURA STEROWANIA SIECIAMI WODOCIĄGOWYMI

Optymalne sterowanie bieżące siecią wodociągową według kryterium minimalizacji kosztów uzysku i dystrybucji wody jest złożonym zadaniem dynamicznym, zob. np. [2,4,7,10]. Przyczyną jest silnie nieliniowy model sieci wodociągowej oraz przede wszystkim. charakter funkcji celu i zmiennych decyzyjnych. Wchodzące w skład funkcji celu charakterystyki mocy pomp są zależnościami o częściowo niejednoznacznych, kawałkami liniowymi (każdy kawałek odpowiada jednej konfiguracji włączonych pomp). Zmienneymi decyzyjnymi są ilości włączonych pomp (zmiennie całkowitoliczbowe) oraz ustawienie zasuw w pompowniach i przy zbiornikach sieciowych, powodujące dopasowanie rozkładu ciśnień w sieci do pożądanego (zmiennie ciągłe). Złożony charakter modelu i kryterium jakości powoduje konieczność dekompozycji i zastosowania metod hierarchicznych. Strukturę sterowania

sieciami wodociagowymi, zastosowana przy opracowywaniu koncepcji i algorytmów sterowania eksperymentalnym systemem wodno-gospodarczym [6,7], przedstawiona jest na rys. 1.



Rys. 1. Struktura sterowania siecią wodociagową

Jest to struktura warstwowa, repetycyjna ze sprzężeniem zwrotnym od stanu. W warstwie wyższej układu sterowania wyznaczone są harmonogramy optymalnych napełnień zbiorników do końca doby z uwzględnieniem mierzonego aktualnego stanu zbiorników HZ_j^a , $j = 1, \dots, Z$. Ilość powtórek repetycyjnych L w ciągu doby jest tym mniejsza, im mniejszy jest stopień niepewności w systemie, uwarunkowany jakością prognoz zapotrzebowań $D_j(k)$. Na bazie znajomości dopływów $QZ_j(kT_s)$, $j = 1, \dots, Z$ do zbiorników sieciowych w warstwie niższej wyznaczone są na bieżąco (z krokiem T_s jedno- czy dwugodzinnym) optymalne konfiguracje włączonych zespołów pompowych wraz z ustawieniem zasuw w pompowniach i przy zbiornikach sieciowych. Linia przerywana zaznaczono na rysunku możliwość dodatkowej regulacji w ramach odcinków osazu T_s na bazie bieżących pomiarów w sieci. Algorytmy warstwy niższej bazują na rozwiązaniach statycznych zadań optymalizacji, istnieją szybkie algorytmy rozwiązywania takich zadań [10].

Zadanie optymalizacji rozwiązywane w warstwie wyższej układu sterowania jest zadaniem dynamicznym z dynamiką zbiorników sieciowych. Zadanie to musi uwzględnić model przepływów w sieci oraz model relacji ciśnieniowych w tych przynajmniej fragmentach sieci, które warunkują fizyczną realizowalność przepływów oraz zapewnienie minimalnych ciśnień wymaganych przez odbiorców. O ile model samych przepływów jest modelem liniowym (ale niejednoznacznym przy ilości zbiorników większej od 1), to uzu-

pełniący go model relacji ciśnieniowych jest silnie nieliniowy, co wynika z kwadratowych modeli odcinków rurociągów i zasuw (oporności hydraulicznych). Model sieci jest więc złożonym modelem nieliniowym. O ile dla warstwy niższej układu sterowania powinien to być model w miarę pełny, to uwzględnienie takiego pełnego modelu w warstwie wyższej, w wielowymiarowym, dynamicznym zadaniu optymalizacji z bardzo przeciężniekozystną postacią funkcji celu i mieszanym charakterem zmiennych, prowadzi do obliczeń zbyt złożonych, wymagających dużych czasów i nakładów, bądź w ogóle niemożliwych do rozwiązania zadań optymalizacji - a więc nieprzydatnych do sterowania. Dla potrzeb warstwy wyższej dąży się do tworzenia zagregowanych modeli sieci wodociagowych, uwzględniających jedynie podstawowe relacje między pompowniami, zbiornikami sieciowymi i zagregowanymi odbiorcami [7,10].

Przedstawiona na rys. 1 struktura sterowania odpowiada normalnej sytuacji możliwości pełnego zaspokojenia potrzeb odbiorców wody. W sytuacji deficytu trzeba ją wzbogacić elementami dialogu z decydentami współdziałającymi w określaniu, którym odbiorcom i w jakich odcinkach czasu należy zmniejszyć dostawy wody [9].

Opracowanie niniejsze poświęcone jest algorytmom warstwy wyższej struktury sterowania, algorytmom wyznaczania optymalnych przebiegów napełnień zbiorników sieciowych.

3. ZADANIE OPTIMALIZACJI NAPEŁNIEN ZBIORNIKÓW, METODA BEZPOŚREDNIA JEJ ROZWIĄZANIA

Zadanie dynamiczne wyznaczania sterowań optymalnych (zagregowaną) siecią wodociagową, które należy rozwiązywać w warstwie wyższej układu sterowania, można sformułować w następującej postaci [7,8,9]:

$$\min_{\substack{n_j(k), j \in I_p, \\ s_j(k), j \in I_p \cup I_z, k=0,1,\dots,P,K-1}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j \in I_p} r(k) \cdot [N_j(n_j(k), QP_j(k)) + c_j \cdot QP_j(k)], \quad (1)$$

przy ograniczeniach modelu sieci, tj.

$$\text{- liniowych równaniach bilansu przepływów w węzłach,} \quad (2)$$

- modelach odcinków rurociągów

$$\Delta H_{1j}(k) = -s_{1j} \cdot \operatorname{sgn} Q_{1j}(k) \cdot Q_{1j}(k)^2 + \Delta H_{E1j}, \quad (3)$$

- pompowni

$$\Delta HP_j(k) = HP_j - [SP_j(n_j(k)) + s_j(k)]QP_j(k)^2, \quad (4)$$

$$QP_{jm}(n_j(k)) \leq QP_j(k) \leq QP_{jz}(n_j(k)), \quad j \in I_p \quad (5)$$

- zasuw regulacyjnych przy zbiornikach

$$\Delta H_{jj}(k) = -\operatorname{sgn}(QZ_j(k)) \cdot s_j(k) \cdot QZ_j(k)^2, \quad s_j(k) \geq 0, \quad j \in I_z \quad (6)$$

- zbiorników

$$HZ_j(k+1) = HZ_j(k) + \alpha_j QZ_j(k), \quad (7)$$

$$H_{jm} \leq HZ_j(k) \leq H_{jz}, \quad j \in I_z \quad (8)$$

- wymaganiach odbiorców

$$H_j(k) \geq H_{jM}, \quad j \in I_0 \quad (9)$$

- oraz warunków brzegowych dla zbiorników

$$HZ_j(0) = HZ_j^*(0), \quad HZ_j(K) = HZD_j, \quad j \in I_z, \quad (10)$$

gdzie oznaczono (k oznacza dyskretną chwilę czasu):

$n_j(k)$ - ilość włączonych pomp w j -tej pompowni,

$s_j(k)$ - oporność zasowy regulacyjnej j -tej,

$r(k)$, o_j - współczynniki kosztów (taryfa opłat za energię, współczynnik kosztów uzdatniania),

$N_j(n_j(k), QP_j(k))$ - charakterystyka mocy pobieranej przez j -tą pompownię,

$QP_j(k)$ - wydatek j -tej pompowni,

$Q_{ij}(k)$ - przepływ między węzłami i a j ,

S_{ij} - oporność sieci między węzłami i a j ,

$\Delta H_{ij}(k)$ - spadek ciśnienia między węzłami i a j ,

$\Delta HG_{ij}(k)$ - różnica poziomów geodezyjnych między węzłami i a j ,

$\Delta H P_j(k)$ - przyrost ciśnienia wytwarzany przez pompownię j ,

$HP_j(k)$, $SP_j(k)$ - parametry charakterystyki pompowni j ,

$HZ_j(k)$ - wysokość słupa wody w j -tym zbiorniku,

$QZ_j(k)$ - dopływ do j -tego zbiornika,

$H_j(k)$ - ciśnienie w węźle j -tym,

I_p, I_z, I_0 - zbiory indeksów węzłów odpowiednio z: pompowniami, zbiornikami sieciowymi, odbiorcami.

Zadanie (1) - (10) jest bardzo trudne przede wszystkim ze względu na omówioną w rozdziale poprzednim postać charakterystyk $N_j(n_j(k), QP_j(k))$, skokowy charakter zmian w czasie taryfy $r(k)$ oraz mieszaną naturę zmiennych decyzyjnych ($n_j(k)$ - całkowitoliczbowe, $s_j(k)$ - ciągłe), jak również nieliniowość ograniczeń (3), (4), (6). Zadania takie rozwiązuje się jedynie metodami hierarchicznymi [3,7]. Można tu zastosować zarówno metodę bezpośrednią optymalizacji dwupoziomowej, jak i dualną, użycie każdej z nich obwarowane jest jednakże pewnymi, różnej natury, ograniczeniami.

Dla zastosowania metody bezpośredniej ze zmienne koordynacyjne przyjmujemy dopływy $QZ_j(k)$ do zbiorników sieciowych, $j \in I_z$. Zadanie dolnego poziomu rozpada się wówczas na K niezależnych zadań statycznych odpowiadających zadaniom (1) - (10) z wyłączeniem dynamiki zbiorników (7), (8), przy czym ze względu na ustalenie na tym poziomie wpływów $QZ_j(k)$ równania bilansu przepływów (2) stają się jednoznaczne umożliwiając zastosowanie efektywnych algorytmów optymalizacji [10]. Niestety, ze względu na cechy funkcji $\hat{f}_k(QZ_j(k), HZ_j(k))$ określonej przez rozwiązywanie zadań dolnego poziomu jest możliwe zastosowanie jedynie programowania dynamicznego jako algorytmu rozwiązania zadania koordynacji:

$$\min_{QZ_j(k), j \in I_z} \sum_{k=0}^{K-1} \hat{f}_k(QZ_j(k), HZ_j(k)) \quad (11)$$

$k = 0, 1, \dots, K-1$

przy ogr. (7), (8), (10).

Praktycznie limituje to możliwości zastosowania metody do sieci jedno-zbiornikowych, czy dwuzbiornikowych w sytuacji dysponowania dość szybkim komputerem. Np. dla dwuzbiornikowej sieci miasta B regionu pilotowego [6] czas rozwiązania zadania dwunastostopowego ($K = 12$) na komputerze SM-4 wyniósł ok. 0,5 godziny, i to przy dość zgrubej dyskretyzacji stanów zbiorników i maksymalnie uproszczonym (zagregowanym) modelu sieci. Powiększenie dokładności dyskretyzacji znacznie wydłużało ten czas.

4. FORMULOWANIE ZADANIA OPTIMALIZACJI DLA METODY DUALNEJ

Dla zastosowania metody dualnej optymalizacji hierarchicznej [3] zadanie (1) - (10) trzeba przekształcić do postaci liniowo kwadratowej separowalnej [2,8,12]. Funkcję (1) aproksymuje się zależnościami kwadratowymi, a równania (3) i (4) przybliża zależnościami liniowymi, uzyskując zadanie optymalizacji postaci:

$$\min_{\substack{QP_j(k), j \in I_p \\ HZ_j(k), j \in I_z, k = 0, 1, \dots, K-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{j \in I_p} x(k) [\beta_j \cdot QP_j(k)^2 + \beta_j^* QP_j(k)] + \sum_{j \in I_z} \gamma_j (HZ_j(k) - \bar{HZ}_j(k))^2 \right\} \right\} \quad (12)$$

przy równaniach stanu

$$HZ_j(k+1) = \sum_{i \in I_z} a_{ji} HZ_i(k) + \sum_{i \in I_p} b_{ji} QP_i(k) - D_j(k), \quad j \in I_z, \quad (13)$$

ograniczeniach $QP_{jm} \leq QP_j(k) \leq OP_{jM}$, $j \in I_p$ oraz (8) i (10) (14)
i ograniczeniach liniowych nierównościowych

$$q_j(HZ_j(k+1), HZ_j(k), QP_j(k), k) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r, \quad (15)$$

zapewniających spełnienie (9) oraz realizowalność fizyczną dopływów do zbiorników.

Ostatni składnik w funkcji celu (12) jest wprowadzony sztucznie dla zapewnienia ścisłej wypukłości również względem poziomów zbiorników $HZ_j(k)$. Praca [2] przedstawia przykład wyznaczenia liniowych równań stanu (13) jako linearyzacji zależności oryginalnych w pewnym "punkcie pracy", motywując takie postępowanie niewielkimi zmianami poziomów zbiorników wynikającymi z dużej ich objętości. Jednak nawet autorom wydało się takie postępowanie dyskusyjne ze względu na silne nieliniowości modelu oryginalnego i duże przecież wahania przepływów związane z dużymi dobowymi wahaniami poborów. W pracy [5] zbadano jakość modelu (13) powstałego z liniowych aproksymacji oryginalnych zależności (3) i (4) w szacowanych zakresach pracy dla trudnej sieci dwuzbiornikowej. Podejście to, skuteczniejsze od poprzedniego, okazało się również niewystarczające - główną przyczyną były dość duże błędy modelu liniowego (13) powstające w okresach zmian znaku dopływu do zbiorników i to nawet przy zastosowaniu modelu niestacjonarnego, tj. $a_{ji} = a_{ji}[k]$, $b_{ji} = b_{ji}[k]$. W chwilach takich gwałtownie zmieniają się bowiem warunki ciśnieniowe, szczególnie w sieciach, gdzie są one krytyczne.

Podkreślimy, że model (13) występujący w zadaniu (12)-(15) musi dla sieci wielozbiornikowych powstać zarówno z relacji liniowych (2), jak i nieliniowych (3) i (4), gdyż ustalenie wartości wypływów z pompowni nie ustala jeszcze rozprywu wody między zbiornikami, określanego wówczas, oprócz liniowych bilansów rozprywów w węzłach, nieliniowymi relacjami ciśnieniowymi - co jest przyczyną trudności.

Konieczność uwzględniania oporności zasuw regulowanych przy zbiornikach jako dodatkowych zmiennych w modelu (12) - (15) i związane z tym trudności nasunęły pomysł nieco innego sformułowania zadania (12) - (15) [5], w którym uwalniamy się od nieliniowych zależności (3), (4) i (6) przy wyznaczaniu równań stanu (13). Przyjmijmy mianowicie za dodatkowe zmienne wypływy $QZ_j(k)$ z $Z-1$ zbiorników, gdzie Z jest liczbą zbiorników w sieci. Uzyskamy wówczas zadanie postaci

$$\min_{\substack{QP_j(k), j \in I_p \\ QZ_j(k), j = 1, \dots, Z-1 \\ HZ_j(k), j \in I_z, k=0, 1, \dots, K-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{j \in I_p} r(k) [\beta_j QP_j(k)^2 + \beta'_j QP_j(k)] + \sum_{j=1}^Z \gamma_j (HZ_j(k) - \bar{HZ}_j(k))^2 + \sum_{j=1}^{Z-1} \delta_j (QZ_j(k) - \bar{QZ}_j(k))^2 \right\} \right. \quad (16)$$

przy równaniach stanu:

$$HZ_j(k+1) = HZ_j(k) + \alpha_j QZ_j(k), \quad j = 1, \dots, Z-1 \quad (17)$$

$$HZ_j(k+1) = HZ_j(k) + \alpha_j \left[\sum_{j=1}^{Z-1} QZ_j(k) + \sum_{j \in I_p} QP_j(k) - D(k) \right], \quad j = Z, \quad (18)$$

$$\text{ograniczeniach (14),} \quad (19)$$

i ograniczeniach liniowych nierównościowych

$$q_j(HZ_j(k+1), HZ_j(k), QP_j(k), QZ_j(k), k) \leq 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (20)$$

W zadaniu powyższym zależnościami przybliżonymi są jedynie funkcja celu (16) oraz ograniczenia nierównościowe (20), opisujące wymagane relacje ciśnieniowe zapewniające spełnienie (9) oraz realizowalność fizyczną dopływów do zbiorników (praktycznie jedynie w okresach ich napełniania). Jak pokazują wstępne wyniki badań nad sieciami dystrybucji regionu pilotowego [6] takie sformułowanie zadania optymalizacji pozwala na skuteczniejsze zastosowanie metody dualnej. Poniżej przedstawimy algorytm klasyczny tej metody, wraz z pewnym rozszerzeniem, oraz nowy algorytm oparty na wykorzystaniu rozszerzonej funkcji Lagrange'a.

5. ALGORYTMY METODY DUALNEJ

Klasyczna metoda dualna w zastosowaniu do zadania (16) - (20) polega na zastosowaniu normalnej funkcji Lagrange'a [3]

$$\mathcal{L} \triangleq \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{j \in I_p} r(k) [\beta_j QP_j(k)^2 + \beta'_j QP_j(k)] + \sum_{j=1}^Z \gamma_j (HZ_j(k) - \bar{HZ}_j(k))^2 + \sum_{j=1}^{Z-1} \delta_j (QZ_j(k) - \bar{QZ}_j(k))^2 + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^{Z-1} \lambda_j(k) (HZ_j(k+1) - HZ_j(k) - \alpha_j QZ_j(k)) + \\
& + \lambda_Z(k) (HZ_Z(k+1) - HZ_Z(k) - \alpha_Z [\sum_{j=1}^{Z-1} QZ_j(k) + \sum_{j \in I_P} QP_j(k) - D(k)]) + \\
& + \sum_{j=1}^r \mu_j(k) \cdot q_j(HZ_j(k+1), HZ_j(k), QP_j(k), QZ_j(k), k) \}, \quad (21)
\end{aligned}$$

gdzie $\lambda_j(k)$ i $\mu_j(k)$ są mnożnikami odpowiadającymi, odpowiednio, ograniczeniom równościowym (stanu) i nierównościowym. Minimalizacja funkcji Lagrange'a (21) przy ustalonych wartościach mnożników $\lambda_j(k), j=1, \dots, Z$ i $\mu_j(k), j=1, \dots, r, k=0, 1, \dots, K-1$ i przy uwzględnieniu ograniczeń (19) dekomponuje się na wzajemnie rozłączne minimalizacje jednowymiarowe względem każdej ze zmiennych $QP_j(k), QZ_j(k), HZ_j(k), k=0, 1, \dots, K-1$. Wynika to bezpośrednio z separowalnej postaci (21) funkcji celu oraz wzajemnej rozłączności ograniczeń nierównościowych (19). Minimalizacje te można więc przeprowadzić bardzo prosto analitycznie, co stanowi o elastyczności metody. Oznaczając przez $L(\lambda(k), \mu(k))$ minimalną wartość funkcji Lagrange'a zadanie koordynatora można sformułować jako zadanie maksymalizacji funkcji dualnej

$$\begin{aligned}
& \max_{\lambda(k) \in R^Z, \mu(k) \in R^r, \mu(k) \geq 0, k=0, 1, \dots, K-1} L(\lambda(k), \mu(k)) \quad (22)
\end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $L(\dots)$ jest różniczkowalna, to zadanie (22) maksymalizujemy wybraną gradientową metodą optymalizacji. W praktyce wygodnie jest stosować optymalizację bez ograniczeń, sprowadzając uprzednio ograniczenia nierównościowe (20) do równościowych przez wprowadzenie zmiennych dopełniających [9].

Niedogodnością algorytmu klasycznej metody dualnej jest konieczność wprowadzania dodatkowych, zaburzających optymalność składników funkcji celu dla zmiennych $HZ_j(k)$ i $QZ_j(k)$ (i dopełniających)... s heurystycznie przyjętymi wartościami współczynników γ_j i δ_j oraz "wartościami odniesienia" $\overline{HZ}_j(k)$ i $\overline{QZ}_j(k)$. Powodowaną w ten sposób utratę optymalności można wyeliminować przez wprowadzenie dodatkowego, nadrzędnego poziomu optymalizacji iterującegogo wartości odniesienia wg zależności

$$\begin{aligned}
\overline{HZ}_j(k)^{l+1} &= \widehat{HZ}_j(k)^l, \quad j \in I_Z, \\
\overline{QZ}_j(k)^{l+1} &= \widehat{QZ}_j(k)^l, \quad j=1, \dots, Z-1, \quad k=0, 1, \dots, K-1,
\end{aligned} \quad (23)$$

gdzie l oznacza indeks "wielkiej iteracji", tj. całej optymalizacji dwupoziomowej przy ustalonych, l -tych, wartościach zmiennych odniesienia, a prawe strony (23) oznaczają optymalne wartości zmiennych uzyskanych w tej wielkiej iteracji. Postępowanie (23) jest zbieżne, i to tym szybciej, im mniejsze są wartości γ_j i δ_j (z kolei im mniejsze γ_j i δ_j , tym trudniej rozwiązać (22)) [1], zwiększa jednak nakład obliczeń. Trzeba w

tym miejscach nadmienić, że przy udanym doborze $\overline{HZ}_j(k)$ i $\overline{QZ}_j(k)$, co ma na ogół miejsce w sytuacji sterowania repetycyjnego, postępowanie (23) może nie być potrzebne dla uzyskania dokładności akceptowalnej dla celów sterowania.

Jedyną rolą dodatkowych składników wprowadzonych do funkcji celu jest jej ściśnięcie wypuklenie. Wypuklenie takie uzyskać można - i to w sposób skuteczniejszy, gdyż umożliwiający równocześnie zastosowanie prostego i szybkiego algorytmu koordynacji - gdy zamiast normalnej funkcji Lagrange'a zastosujemy rozszerzoną funkcję Lagrange'a (dla skrócenia zapisu pomijamy tu ograniczenia (20)):

$$\begin{aligned}
 L_9 \stackrel{\Delta}{=} & \sum_{k=0}^{K-1} \left\{ \sum_{j \in I_p} r(k) [\beta_j \cdot QP_j(k)^2 + \beta_j' \cdot QP_j(k)] + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^{Z-1} \lambda_j(k) (HZ_j(k+1) - HZ_j(k) - \alpha_j QZ_j(k)) + \\
 & + \lambda_Z(k) (HZ_Z(k+1) - HZ_Z(k) - \alpha_Z \sum_{j=1}^{Z-1} QZ_j(k) + \sum_{j \in I_p} QP_j(k) - D(k)) + \\
 & + \sum_{j=1}^Z \frac{1}{2} \varrho (HZ_j(k+1) - HZ_j(k) - \alpha_j QZ_j(k))^2 + \\
 & \left. + \frac{1}{2} \varrho (HZ_Z(k+1) - HZ_Z(k) - \alpha_Z \sum_{j=1}^{Z-1} QZ_j(k) + \sum_{j \in I_p} QP_j(k) - D(k))^2 \right. \quad (24)
 \end{aligned}$$

gdzie $\varrho > 0$ oznacza współczynnik kary.

Niestety, funkcja L_9 nie ma postaci separowalnej, nieseparowalność powodują kwadratowe składniki kary. Trudność tę można obejść stosując ideę algorytmu aproksymacyjnego zaproponowanego w [11]: minimalizacji rozszerzonej funkcji Lagrange'a (24), przy danych ustalonych wartościach mnożników $\lambda_j(k) = \lambda_j(k)^n$, $j = 1, \dots, Z$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, dokonujemy w tzw. pętli aproksymacji lokalnych. Postępowanie to polega na kolejnym przyjmowaniu pewnych ustalonych punktów aproksymacji $QP_j(k)^n$, $HZ_j(k)^n$, $QZ_j(k)^n$, co umożliwi zastąpienie każdego z nieseparowalnych składników kwadratowych sumą, której każdy składnik zawiera tylko jedną zmienną, np. składnik

$$(HZ_j(k+1) - HZ_j(k) - \alpha_j QZ_j(k))^2$$

zastępujemy sumą

$$\begin{aligned}
 & (HZ_j(k+1) - HZ_j(k)^n - \alpha_j QZ_j(k)^n)^2 + (HZ_j(k+1)^n - HZ_j(k) - \alpha_j QZ_j(k)^n)^2 + \\
 & + (HZ_j(k+1)^n - HZ_j(k)^n - \alpha_j QZ_j(k)^n)^2,
 \end{aligned}$$

która jest już separowalna - pierwszy z jej składników uwzględniamy przy minimalizacji względem $HZ_j(k+1)$, drugi $HZ_j(k)$, a trzeci $QZ_j(k)$. Iteracje aproksymacji lokalnych polegają zaś na następującej modyfikacji punktów aproksymacji:

$$QP_j(k)^{n+1} = QP_j(k)^n + \varepsilon(\widehat{QP}_j(k)^n - QP_j(k)^n), \quad j \in I_p \quad (25)$$

$$HZ_j(k)^{n+1} = HZ_j(k)^n + \varepsilon(\widehat{HZ}_j(k)^n - HZ_j(k)^n), \quad j \in I_z$$

$$QZ_j(k)^{n+1} = QZ_j(k)^n + \varepsilon(\widehat{QZ}_j(k)^n - QZ_j(k)^n), \quad \begin{matrix} j=1, \dots, Z-1, \\ k=0, 1, \dots, K-1, \end{matrix}$$

gdzie $\widehat{QP}_j(k)^n$, $\widehat{HZ}_j(k)^n$, $\widehat{QZ}_j(k)^n$ oznaczają punkty optymalne uzyskane w n-tym kroku iteracji lokalnych, a $\varepsilon \in (0, 1]$ jest ustalonym współczynnikiem. Punkty uzyskane w wyniku zakończenia procesu iteracji lokalnych wstawiamy do funkcji (24) uzyskując wartość rozszerzonej funkcji dualnej $L_\varepsilon(\lambda(k)^m)$. Nie jest to wszakże potrzebne, gdyż zamiast maksymalizacji rozszerzonej funkcji dualnej można zastosować prosty algorytm modyfikacji mnożników Hestensa-Powella [3, 11]:

$$\lambda_j(k)^{m+1} = \lambda_j(k)^m + \varrho(\widehat{HZ}_j(k+1)^m - \widehat{HZ}_j(k)^m - \alpha_j \widehat{QZ}_j(k)^m), \quad j=1, \dots, Z-1,$$

$$\lambda_z(k)^{m+1} = \lambda_z(k)^m + \varrho(\widehat{HZ}_z(k+1)^m - \widehat{HZ}_z(k)^m + \\ - \alpha_z [\sum_{j=1}^{z-1} \widehat{QZ}_j(k)^m + \sum_{j \in I_p} \widehat{QP}_j(k)^m - D(k)]),$$

gdzie $\widehat{HZ}_j(k)^m$, $\widehat{QZ}_j(k)^m$, $\widehat{QP}_j(k)^m$ są punktami uzyskanymi w pętli aproksymacji lokalnych przy $\lambda_j(k) = \lambda_j(k)^m$, $j = 1, \dots, Z$, $k = 0, 1, \dots, K-1$. Jak wykazują wstępne wyniki zastosowania przedstawionego algorytmu wykorzystującego rozszerzoną funkcję Lagrange'a do sieci wodociągowych miast regionu pilotowego [6], jest on efektywniejszy od algorytmu klasycznego metody dualnej (nawet bez iteracji (25)).

W przedstawionych powyżej algorytmach metody dualnej, jak i sformułowaniach zadania optymalizacji w rozdziale poprzednim pominięto, dla skrócenia zapisu, zasuw regulowane. Uwzględnienie oporności zasuw regulowanych (por. (4) i (6)) nie nastęrcza żadnych trudności w zadaniu (16) - (20), wystąpią one jako dodatkowe zmienne w funkcji celu (16) i ograniczeniach (20).

6. WNIOSKI

Badania teoretyczne i symulacyjne nad zastosowaniem algorytmów metody dualnej do wyznaczania optymalnych harmonogramów napełnień zbiorników sieciowych w regionie pilotowym [6] pozwalają stwierdzić rosnącą przydatność i efektywność tej metody, aktualnie jedynej umożliwiającej optymalizację sieci wielozbiornikowych. Rezultatem tych badań są przedstawione w niniejszej pracy sposoby formułowania zadań optymalizacji sieci dla metody oraz algorytm optymalizacji bazujący na wykorzystaniu rozszerzonej funkcji Lagrange'a.

Badania przedstawione w tym artykule były prowadzone w ramach programu rządowego IR 7.01.05.01.

LITERATURA

- [1] D.P.Bertsekas: Convexification Procedures and Decomposition Methods for Nonconvex Optimization Problems. JOTA, vol.29, 1979, s.169.
- [2] F.Fallside, P.F.Ferzy: Optimal Control of a Water Supply Network by a Decomposition Technique. Raport CUED/B-ELEC/TR 20 (1974), University of Cambridge.
- [3] W.Findeisen, F.N.Bailey, M.Brduś, K.Malinowski, P.Tatjewski, A.Woźniak: Control and Coordination in Hierarchical Systems. John Wiley, Chichester - New York, 1980.
- [4] W.Findeisen i in.: Konceptcja zarządzania i sterowania w pilotowym systemie wodno-gospodarczym. Mat.III Konf. "Sterowanie systemem wodno-gospodarczym na obszarze aglomeracji miejsko-przemysłowej", Ustroń-Jaszowiec 1983, Zesz.Nauk.Polit.Śląskiej, Seria Automatyka, z.68, s.5.
- [5] A.Mleozko: Wyznaczanie sterowań optymalnych wybraną siecią wodociągową. Praca dyplomowa, Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej, 1984.
- [6] Raport: Opracowanie pilotowego modelu systemu wodno-gospodarczego do celu wyboru decyzji przy sterowaniu dyspozytorskim, PR-7.01.09.01, Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej, 1981.
- [7] Raport: Konceptcja sterowania dyspozytorskiego w pilotowym systemie wodno-gospodarczym wraz ze wstępnymi wynikami ilościowymi. PR-7.01.05.01, Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej, 1982.
- [8] Raport: Badania symulacyjne i analityczne nad konceptcją opracowaną w 1982 roku sterowania eksperymentalnym systemem wodno-gospodarczym. PR-7.01.05.01, Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej, 1983.
- [9] Raport: Opracowanie algorytmów realizujących zadania jednostek decyzyjnych poszczególnych podsystemów sterowania opracowanej w 1982r. struktury sterowania eksperymentalnym systemem wodno-gospodarczym. PR-7.01.05.01, Instytut Automatyki Politechniki Warszawskiej, 1984.
- [10] Raport: Badania symulacyjne i analityczne algorytmów optymalnego sterowania siecią wodociągową. PR-7.01.05.01, Instytut Cybernetyki Technicznej Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1983.
- [11] P.Tatjewski: A hierarchical algorithm for large-scale system optimization problems with duality gaps. Proc.11-th IFIP Conference "System Modelling and Optimization", Copenhagen 1983 - Lecture Notes in Control and Information Sciences 59, Springer Verlag, Berlin 1984, s.662.
- [12] J.Żelezik: Optymalizacja pracy systemu zaopatrzenia w wodę. Mat.III Konf. "Sterowanie systemem wodno-gospodarczym na obszarze aglomeracji miejsko-przemysłowej", Ustroń-Jaszowiec 1983, Zesz.Nauk.Polit.Śląskiej, Seria Automatyka, z. 69, s.37.

OPTIMAL CONTROL OF WATER SUPPLY NETWORKS
USING AN AUGMENTED LAGRANGE FUNCTION

Summary

Optimal control of water supply networks in multilayer structure is considered in the paper. The task of the higher layer is to determine optimal schedules of network reservoir levels. Dual method of hierarchical optimization to perform this task is considered. A new algorithm basing on the use of an augmented Lagrange function is presented, which proved to be efficient in practical applications.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СЕТЯМИ ВОДОСНАБЖЕНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Резюме

В работе представляется оптимальное управление сетями водоснабжения в многоуровневой структуре. Задача высшего уровня состоит в определении оптимальных графиков заполнений резервуаров чистой воды. Для выполнения этой задачи предлагаются дуальные методы иерархической оптимизации. Представляется новый алгоритм, использующий модифицированную функцию Лагранжа, который оказался эффективным в ряде случаев.