ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: BUDOWNICTWO z. 20 Nr kol. 201

ZBIGNIEW BURSZTYNOWSKI
Wojskowa Akademia Techniczna

ZASTOSOWANIE METODY RÓŻNIC SKOŃCZONYCH DO ZAGADNIENIA DRGAŃ WYWOŁANYCH OBCIĄŻENIEM RUCHOMYM W MOSTACH PŁYWAJĄCYCH

Wstęp

Ograniczoność układów dynamicznych (belki oparte przegubowo na końcach) lub metody rozwiązującej (sprowadzanie układów dynamicznych do układu o jednym stopniu swobody) w większości prac poświęconych rozważaniom o zachowaniu się belek mostowych pod wpływem obciążeń ruchomych, których masy nie pomija się, skłania autora referatu do poszukiwania odpowiedzi na postawiony w tytule problem w oparciu o metodę różnic skończonych, metodę umożliwiającą uzyskanie na drodze maszyn cyfrowych dostatecznie pełnego rozwiązania.

Rozważanymi w referacie układami fizycznymi są mosty pływające systemu ciągłego, które z uwagi na swą konstrukcję i typowe warunki podparcia na brzegach traktuje się modelowo jako belki leżące na ciągłym sprężystym podłożu oparte przegubowo na końcach. Ze względu na stosunkowo niedużą sztywność w płaszczyźnie drgań, oraz często niezbyt dużą masę w porównaniu z masą obciążenia ruchomego, mosty pływające wydają się być układami szczególnie podatnymi na dynamiczny efekt obciążeń ruchomych. Pilność poszukiwania odpowiedzi na ich zachowanie z powodu coraz ostrzejszych wymagań, jakie im się stawia, skłania autora do zainteresowania się postawionym problemem.

1. Rozwiązanie ogólne problemu

Sformułowany w tytule niniejszego referatu problem, uwzględniający wpływ na drgania rozważanego układu zarówno bezwładności obciążenia ruchomego jak i bezwładności hydrodynamicznego czynnika – wody sprowadza się do rozwiązania ogólnego nieliniowego równania różniczkowego zdefiniowanego na wstępie układu dynamicznego w postaci:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\bar{m}+\bar{\mu}(x,t)}{EJ}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{c}{EJ} =$$

$$= \frac{p(x,t))}{EJ} - \frac{\Delta(x,t)}{EJ}\left(v^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2v\,\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=vt} \qquad (1)$$

spełniającego dla problemu początkowego następujące warunki:

– brzegowe: $y(o,t) = y(l,t) = 0,$

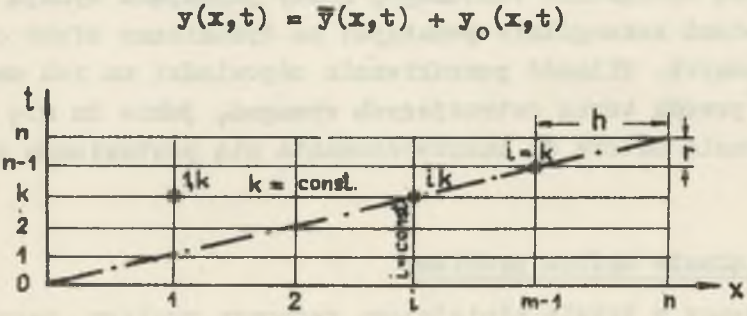
$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{o,t} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_{l,t} = 0, \qquad (2)$$

– początkowe: $y(x,o) = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{x,o} = 0,$

Bezwładność wody (sprężystego podłoża) w równaniu różniczkowym (1) reprezentuje współczynnik $\bar{\mu}(x,t)$ wyrażający masę jednostkową wody towarzyszącej masie $\bar{m}$ układu w jego ruchu pionowym.

Rozwiązania ogólnego ugięcia $y(x,t)$ równania różniczkowego (1) w postaci ogólnej

$$y(x,t) = \bar{y}(x,t) + y_o(x,t) \qquad (3)$$



Rys. 1

poszukuje się przy pomocy metody różnic skończonych w postaci rozwiązania przybliżonego ugięcia

$$Y_{ik} = \bar{Y}_{ik} + Y_{o(ik)} \tag{4}$$

węzłów siatki różnicowej o współrzędnych

$$x_i = ih, \qquad t_k = kr, \tag{5}$$

Ugięcia węzłów i = const,k, leżących na pionowych liniach siatki różnicowej przedstawiają rzędne linii wpływowych ugięć od obciążenia p(x,t), ugięcia węzłów i,k = const, leżących na poziomych liniach siatki są rzędnymi linii ugięć układu, natomiast ugięcia węzłów i = k, leżących na głównej przekątnej siatki przechodzącej przez początek układu współrzędnych wyznaczają tor poruszania się obciążenia po rozważanym układzie.

Po wyrażeniu pochodnych cząstkowych w równaniu różniczkowym (1) przez centralne ilorazy różnicowe, po uwzględnieniu warunków początkowych i brzegowych (2) i uwzględnieniu następującej relacji w krokach siatki:

$$h = v \cdot r,$$

równanie różniczkowe (1) przekształci się w postać równoważnych równań różnic skończonych:

$$Y_{-1,k} + Y_{1,k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3 \ldots n),$$

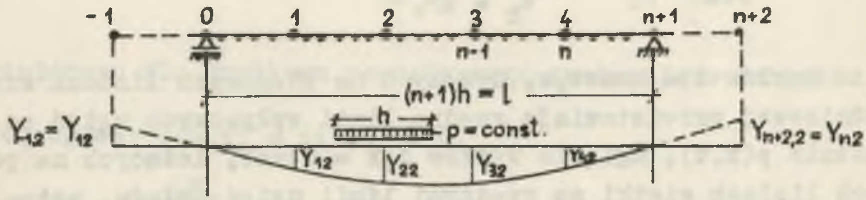
$$Y_{k-2,k} + A_1 Y_{k-1,k} + B_{kk} Y_{kk} + A_2 Y_{k+1,k} + Y_{k+2,k} + C_{k,k+1} Y_{k,k+1} +$$

$$+ C_{k,k-1} Y_{k,k-1} = K, \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots n),$$

$$Y_{i-2,k} + AY_{i-1,k} + B_{ik}Y_{ik} + AY_{i+1,k} + Y_{i+2,k} + CY_{i,k+1} +$$

$$+ CY_{i,k-1} = 0 \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, 3 \dots n) \\ k = 1, 2, 3, \dots n \\ i \neq k\end{matrix} \tag{6}$$

$$Y_{n,k} + Y_{n+2,k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots n),$$



Rys. 2

z warunkiem początkowym

$$-\overline{Y}_{i1} = \frac{1}{v} \sum_{m=1}^{n} v_o^{(m)} \, Y_{o(i1)}^{(m)} \tag{7}$$

Współczynniki przy niewiadomych są funkcją fizycznych parametrów układu, kroków siatki i szybkości ruchu v obciążenia po układzie, a $v_o^{(m)}$ m-tą wartością własną układu, wyznaczoną z układu uogólnionego równań algebraicznych (6) z prawymi stronami równymi zero.

Poszukiwane rozwiązanie ugięcia dynamicznego Y_{ik} wyrażone wzorem (4) otrzymujemy przez wykonanie trzech prostych operacji:

1) operacja pierwsza polega na rozwiązaniu układu liniowych równań algebraicznych (6) dla danych parametrów fizycznych układu i szybkości v ruchu obciążenia po belce. Rezultatem są przybliżone całki szczególne ugięć $\overline{Y}_{ik}$,
2) operacja druga polega na odszukaniu wartości własnych układu tzn. n niewiadomych wartości szybkości ruchu

$v_o^{(m)}$ (m = 1, 2, 3 ... n) obciążenia po układzie, które spełniają układ równań (6) z prawymi stronami równymi zero,

3) operacja trzecia prowadzi wreszcie do odszukania całki ogólnej Yo(ik) układu równań (6), a polega na rozwiązaniu układu równań, utworzonego z n kombinacji układów równań (6), na które nałożono warunek początkowy (7).

Suma wyszczególnionych wyżej trzech operacji daje rozwiązanie w postaci przybliżonych ugięć

$$Y_{ik} = \bar{Y}_{ik} + \sum_{m=1}^{n} Y_{o(ik)}^{(m)} \tag{8}$$

dowolnego węzła siatki zilustrowanej na rys. 1.

Osobny problem stanowi określenie mas stowarzyszonych wody, występujących we współczynnikach przy niewiadomych w układzie równań algebraicznych (6) pod postacią współczynnika $\bar{\mu}(x,t)$.

Problem rozwiązano, adoptując do zagadnienia drgań mostu na wodzie prace z zakresu hydrodynamiki, w szczególności prace J. Więckowskiego opierające się na pracach N.E. Koczina i M.D. Chaskinda, poświęcone przybliżonym metodom wyznaczania masy wody towarzyszącej kołysaniom na wodzie okrętów, jak również innych ciał o prostych formach geometrycznych.

Równanie ruchu wody, wywołane odkształcalnym dnem mostu pływającego w czasie ruchu po nim obciążenia, założono dla przypadku belki drgającej w półprzestrzeni wypełnionej cieczą pod postacią

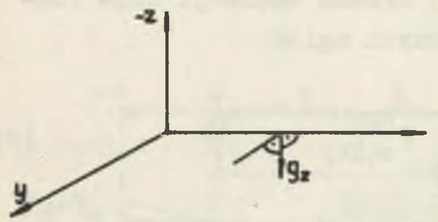
$$-g_z - \frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\; p - \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \tag{9}$$

i rozwiązano jako przypadek szczególny ruchu potencjalnego cieczy nieściśliwej z potencjałem prędkości φ założonym w postaci funkcji:

$$\varphi(x,y,z,t) = \phi(x,y,z)\cos\xi t. \tag{10}$$

Wykorzystując warunek nieściśliwości wody wyrażony związkiem Laplace'a

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \tag{11}$$

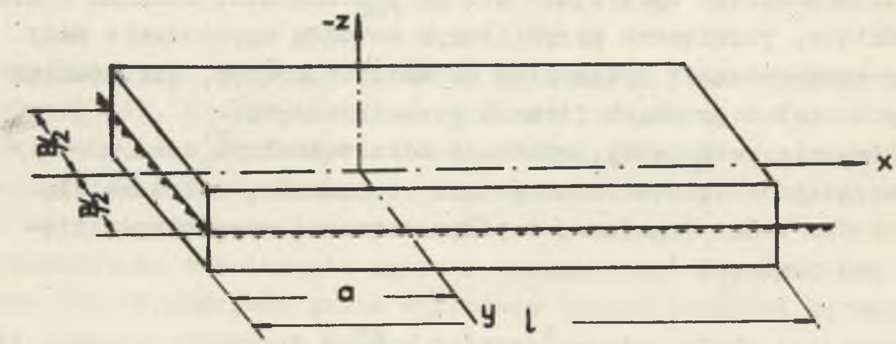


Rys. 3

oraz warunki brzegowe:

1) na powierzchni swobodnej cieczy w każdym momencie ruchu czyniąc zadość związkowi wynikającemu z równania ruchu (9),
2) porównując wartości potencjału prędkości i prędkości układu sprężystego w każdym punkcie tego układu wzdłuż normalnej do powierzchni w tym punkcie,

otrzymano dla układu zilustrowanego na rysunku poniżej przy założeniu $\chi = f(v) \to \infty$



Rys. 4

wyrażenie na masę stowarzyszoną wody $\bar{\mu}(x,t)$ pod postacią:

$$\bar{\mu}\underset{\chi \to \infty}{(x,t=c)} = \frac{B\varrho}{2\pi h(x)} \int_{-a}^{l-a} h(\xi)\, \ln \frac{(a-\xi)^2+[Ap(\xi)]^2}{(a-\xi)^2+[At(\xi)]^2}\, d\xi, \tag{12}$$

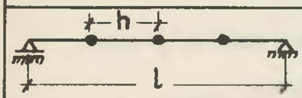
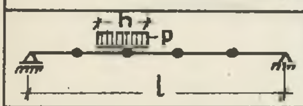
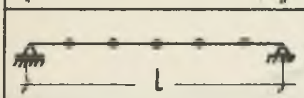
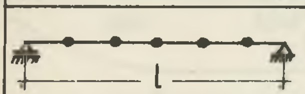
przy czym

$$\underset{\varepsilon\to\infty}{\bar{\mu}(x,\ c)} \approx \underset{\varepsilon\to 0}{\bar{\mu}(x,\ c)}.$$

Wyniki liczbowe mas stowarzyszonych $\bar{\mu}(x,\ c)$ dla odpowiednich parametrów fizycznych układu otrzymano na maszynie matematycznej URAL-2.

II. Rozwiązanie liczbowe problemu

Rozwiązanie liczbowe problemu znaleziono na maszynie matematycznej URAL-2 dla układów fizycznych zilustrowanych w tabelce poniżej, obciążenia zewnętrznego o intensywności

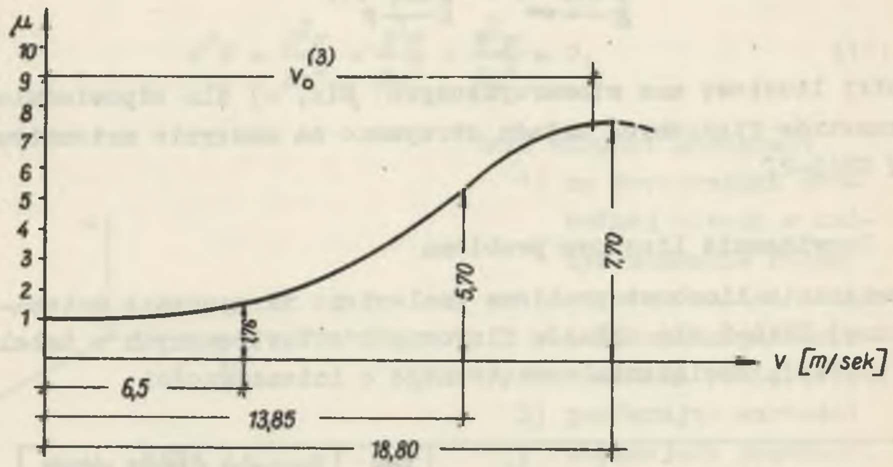
SCHEMAT UKŁADU	Długość układu l [m]	Intensywność obc. p = const [t/mb]	Ilość odcinków podziału n+1	Parametry fizyczne układu $\frac{\bar{m}}{EJ}=4a^2$ [sek²/m⁴]	$\frac{p}{gEJ}=4d^2$ [sek²/m⁴]	$\frac{c}{EJ}=4\beta^4$ [m^{-4}]
	25	8	4	$5.72\cdot10^{-6}$	$4.57\cdot10^{-6}$	$4\cdot10^{-4}$
	25	10	5	"	$5.72\cdot10^{-6}$	"
	25	12	6	"	$6.87\cdot10^{-6}$	"
	100	3	6	"	$1.744\cdot10^{-6}$	"

Rys. 5

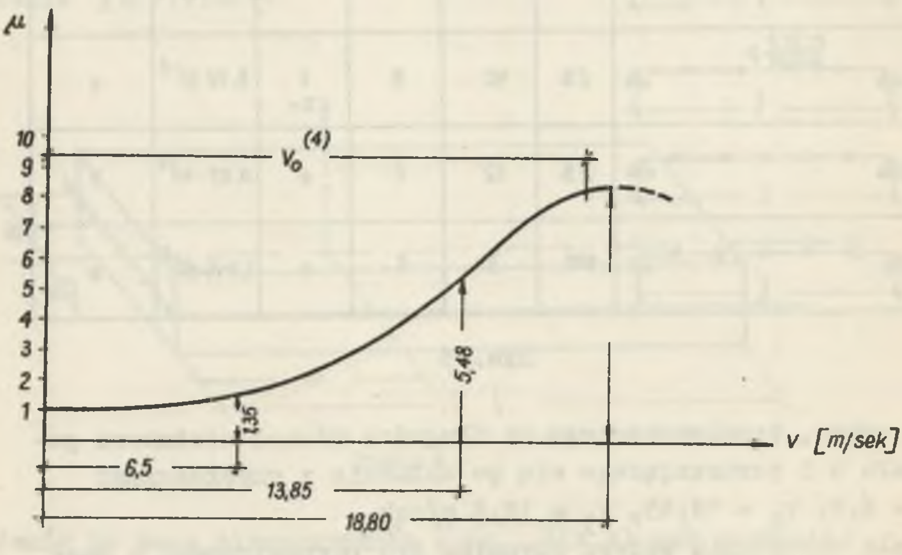
p = const, rozmieszczonego na długości równej odcinkowi podziału h i poruszającego się po układzie z szybkościami v_1 = 6,5, v_2 = 13,85, v_3 = 18,8 m/sek.

W celu określenia wpływu czynnika hydrodynamicznego - masy wody na ruch rozważanego układu podano rozwiązania liczbowe dla dwu przypadków:

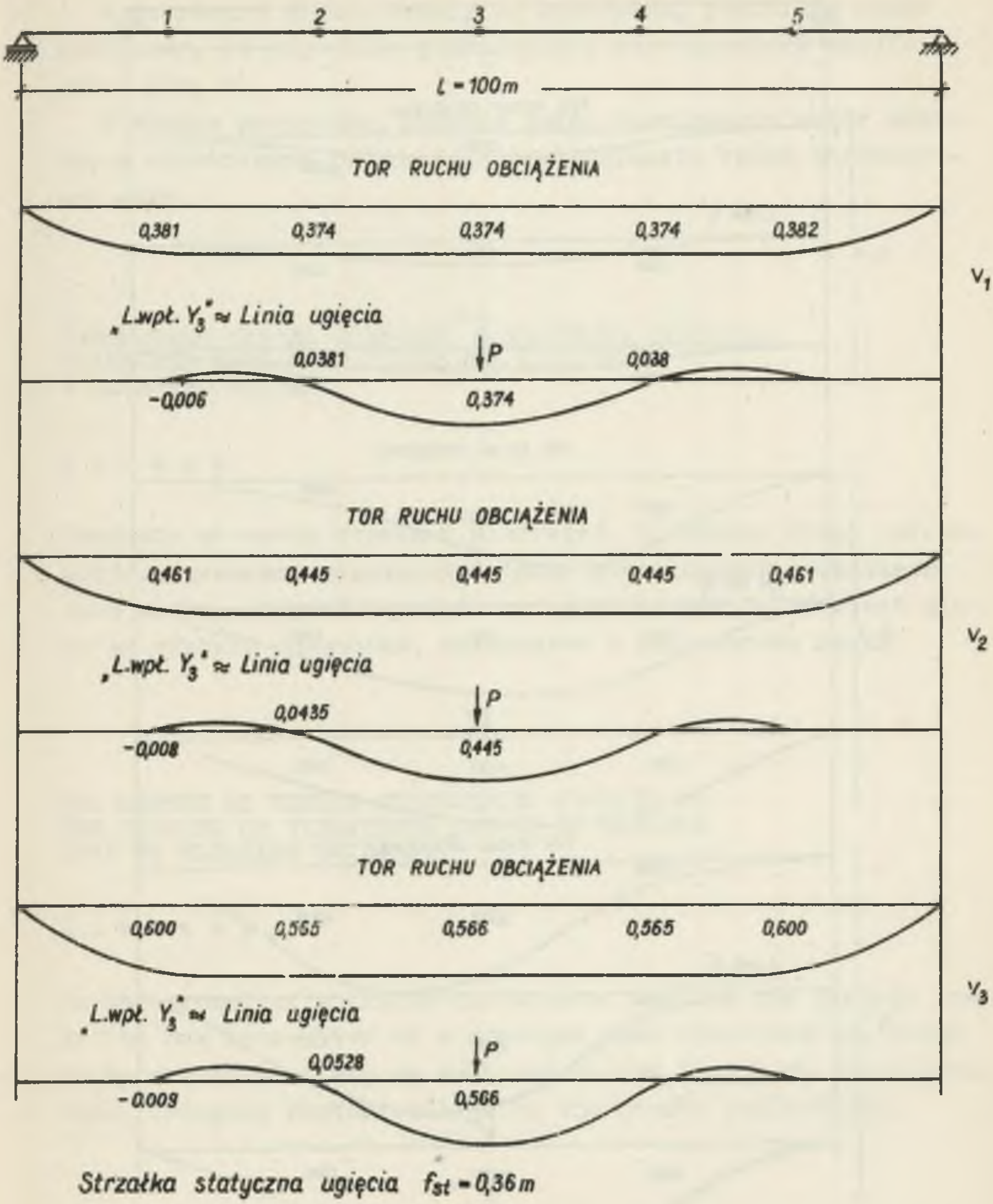
Zależności współczynnika dynamicznego μ od szybkości v ruchu obciążenia



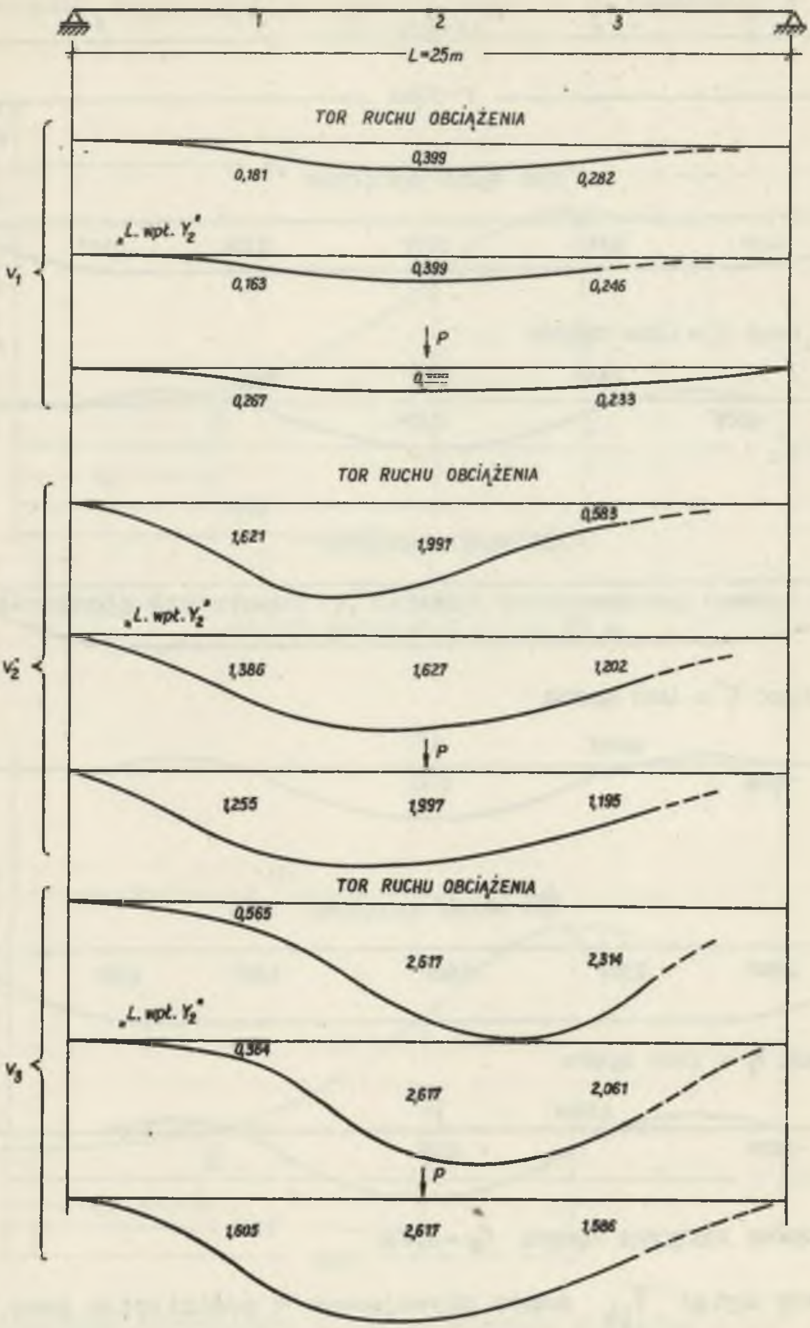
Współczynnik dynamiczny μ ugięcia środka mostu (n+1 = 4 odcinki podziału). l = 25 m



Współczynnik dynamiczny μ ugięcia węzła 2 (układ o n+1 = 6 odcinkach podziału) l = 25 m



Wykresy ugięć $\overline{Y}_{ik}$ mostu pływającego z pominięciem masy wody



Wykresy ugięć mostu pływającego z pominięciem masy wody (n=3) "Y_{ik}"

W pierwszym zilustrowanym na wykresach, pominięto wpływ masy wody, co odpowiada pominięciu w rozwiązaniach współczynnika $\bar{\mu}(x, c)$,

W drugim przypadku, którego pełne rozwiązanie autor zamieści w rozwiniętym referacie, uwzględnia się wpływ bezwładności wody.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ К ВОПРОСАМ
КОЛЕБАНИЙ ВЫЗВАННЫХ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКОЙ
В ПЛОВУЧИХ МОСТАХ

Р е з ю м е

Опираясь на метод конечных разностей, приведено общее решение вопроса движения неразрезной балки с постоянным распределением массы, опёртой шарнирно на своих концах, а на своей длине на упругом основании, качающемся в ритм изгиба балки.

THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES APPLIED TO
THE PROBLEM OF VIBRATIONS CAUSED BY MOVABLE
LOAD ON FLOATING BRIDGES

S u m m a r y

On the ground of a finite differences method, the general solution has been given of a constant mass distribution, based in an articulated way on ends and in its length on the elastic base, swinging rhythmically with the beam's deflections.