

GYÖRGY VÉRTES

Wyższa Szkoła Budownictwa
i Komunikacji, BudapesztANALIZA NAPRĘŻEŃ W MOSTACH WISZĄCYCH
POD WPŁYWEM DZIAŁANIA SIŁY IMPULSOWEJ(Tłumaczenie, skrót redakcyjny - tytuł oryginału:
Ermittlung der Beanspruchungen von Hängebrücken
unter der Wirkung stossartigen Belastungen)1. Wstęp

W ostatnim czasie rozwija się intensywnie ten dział teorii konstrukcji, który dotyczy metod obliczania mostów wiszących. Niezależnie od wpływów statycznych badane są bacznie wpływy dynamiczne, co ma swe uzasadnienie w małej zazwyczaj sztywności mostów wiszących.

Od czasu katastrofy mostu w Tacoma w 1940 roku wykonano wiele prac teoretycznych i doświadczalnych [7], których celem było wyznaczenie częstotliwości drgań własnych mostu oraz zbadanie czy nie występuje pod wpływem działania dynamicznego sił niebezpieczeństwo rezonansu. W pracach tych omawiano wyłącznie wpływ wiatru z uwzględnieniem kilku następujących po sobie fal uderzeniowych. W niniejszej pracy omówiono przypadek działania jednej siły uderzeniowej działającej w płaszczyźnie prostopadłej do osi mostu. Celem pracy jest określenie maksymalnych naprężeń pod wpływem działania obciążenia równomiernie rozłożonego i w czasie dowolnie zmiennego. Przesunięcia poziome, pionowe oraz skręcenie belki usztywniającej wyznaczono w oparciu o zasadę energetyczną. W dalszym ciągu można już wyznaczyć naprężenia maksymalne na podstawie znanych zależności wytrzymałości materiałów.

2. Określenie maksymalnych przesunięć pod wpływem działania obciążenia impulsowego

Poniżej zostanie rozpatrzony przypadek, kiedy na belkę usztywniającą działa obciążenie równomiernie rozłożone, zmienne w czasie o składowych $p_y(t)$, $p_z(t)$. Odnosnie postaci tych funkcji nie czynimy żadnych założeń tak, że wykres zależności siła - czas może być dowolny (również nieciągły).

Pod wpływem działania impulsu ruszt wychyla się z położenia równowagi. W oparciu o zasadę zachowania energii, możemy napisać:

$$L_{zew} = L_{wew} + L_{kin} \quad (1)$$

gdzie:

- L_{zew} - praca sił zewnętrznych,
- L_{wew} - praca sił wewnętrznych,
- L_{kin} - energia kinetyczna konstrukcji.

Po osiągnięciu przez konstrukcję maksymalnego wychylenia, energia kinetyczna zanika i otrzymamy:

$$L_{zew} = L_{wew} \quad (2)$$

Znając postać odkształcenia mostu, możemy wyznaczyć z równości (2) maksymalne przesunięcia dowolnego punktu belki usztywniającej.

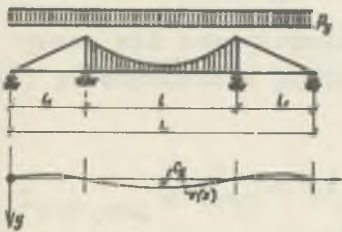
Wpływ składowych sił p_y , p_z można uwzględniać niezależnie od siebie.

a) Działanie impulsu w kierunku pionowym

Rozpatrzmy trójprzęsłową ciągłą belkę usztywniającą (rys. 1), na którą działa zmienne w czasie obciążenie równomiernie rozłożone p_y . Jeśli oznaczymy maksymalne przesunięcie mostu

przez C_y , to funkcję osi odkształconej belki można przyjąć w postaci:

$$v(x) = C_y \left(\sin \frac{\pi}{L} x - \frac{\sin \frac{\pi l_1}{L}}{\sin \frac{3\pi l_1}{L}} \sin \frac{3\pi}{L} x \right) \frac{1}{1 + \frac{\sin \frac{\pi l_1}{L}}{\sin \frac{3\pi l_1}{L}}} \quad (3)$$



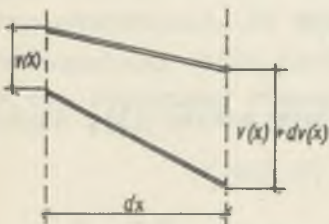
Rys. 1

Energię odkształcenia mostów wiszących, można wyznaczyć z trzech składników jak:

- a) pracy momentów zginających belkę usztywniającą,
- b) pracy rozciągającej siły statycznej w kablu,
- c) pracy powstałej wskutek zmiany siły w kablu

Pracę momentów zginających belkę usztywniającą wyraża zależność:

$$L_{wew,max}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EJ_z} dx = \int_0^L \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4)$$



Rys. 2

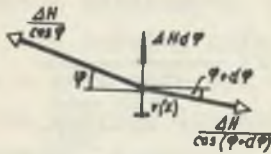
Uwzględniając, że rzut poziomy wydłużenia kabla (rys. 2) jest równy:

$$\sqrt{dx^2 + dv(x)^2} - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx$$

możemy wyrazić pracę siły w kablu w postaci:

$$L_{wew,max}(\beta) = \frac{Hg}{2} \int_0^L \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx \quad (5)$$

Dowolny punkt kabla ulegnie przy odkształceniu przesunięciu $v(x)$, wskutek czego składowa pozioma siły w kablu zmieni się o ΔH . Składowa pionowa siły w kablu (rys. 3) jest równa:



Rys. 3

$$\Delta H \cdot d\varphi$$

Powstała stąd praca wskutek przyrostu siły w kablu jest równa:

$$L_{\text{wew,max}}(\gamma) = \int_0^1 \frac{1}{2} \Delta H d\varphi v(x) \quad (6)$$

uwzględniając, że

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{8f}{l^2}$$

otrzymamy

$$L_{\text{wew,max}}(\gamma) = \frac{\Delta H}{2} \cdot \frac{8f}{l^2} \int_0^1 v(x) dx \quad (7)$$

Wyznaczając wartość ΔH w oparciu o podstawowe równanie mostów wiszących [2] i wstawiając ją do powyższych zależności, otrzymamy całkowitą pracę sił wewnętrznych następującą zależność:

$$L_{\text{wew,max}} = \frac{EJ_z}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{H_g}{2} \int_0^L \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx + \frac{E_k F_k}{2L_k} y''^2 \left(\int_0^1 v(x) dx \right)^2 \quad (8)$$

Uwzględniając dla funkcji $v(x)$ przyjętą postać (3), otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_0^L \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right)^2 dx &= \left(\frac{C y}{1+\varepsilon} \right)^2 \frac{\pi^4}{L^4} \int_0^L \left(-\sin \frac{\pi}{L} x + 9\varepsilon \sin \frac{3\pi}{L} x \right)^2 dx = \\ &= \left(\frac{C y}{1+\varepsilon} \right)^2 \frac{\pi^4}{2L^3} (1 + 81 \varepsilon^2) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\int_0^L \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2 dx = \left(\frac{Cy}{1+\varepsilon}\right)^2 \frac{x^2}{2L} (1 + 9\varepsilon^2) \quad (10)$$

$$\int_0^L v(x) dx = \left(\frac{Cy}{1+\varepsilon}\right) \frac{1}{\pi} 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right), \quad \left(\int_0^L v(x) dx\right)^2 = \left(\frac{Cy}{1+\varepsilon}\right)^2 \frac{4l^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \quad (11)$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{\sin \frac{\pi l_1}{L}}{\sin \frac{\pi l_1}{L}} \quad (12)$$

Pracę sił wewnętrznych możemy zatem, uwzględniając dwa kable, przedstawić w postaci:

$$L_{wew, max} = \left(\frac{Cy}{1+\varepsilon}\right)^2 EJ_z \frac{x^4}{4L^3} (1 + 81\varepsilon^2) + Hg \frac{\pi^2}{4L} (1 + 9\varepsilon^2) + \frac{E_k F_k}{2L_k} y''^2 \frac{4l^2}{\pi^2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \quad (13)$$

Pracę zewnętrzną impulsu można napisać w postaci

$$L_{zewn} = \int_0^L \int_0^{v_{max}} p_y(t) dv dx = \int_0^L \int_0^{t_0} p_y(t) \frac{\partial v}{\partial t} dt dx \quad (14)$$

Analizując podstawowe równanie dynamiczne podane w pracy [2] można stwierdzić, że trzy człony lewej strony tego równania przedstawiają siłę oporu. Oznaczając ją krótko funkcją $R(x, t)$, otrzymamy równanie ruchu w postaci:

$$\ddot{v}(x, t) = \frac{1}{m} [p_y(t) - R(x, t)] \quad (15)$$

względnie

$$\dot{v}(x, t) = \frac{1}{m} \int_0^t [p_y(t) - R(x, t)] dt \quad (16)$$

Uwzględniając wyrażenie (16) w równaniu (14), otrzymamy:

$$L_{zewn} = \int_0^l \int_0^{t_0} p_y(t) \left\{ \frac{1}{m} \int_0^t [p_y(t) - R(x,t)] dt \right\} dt dx \quad (17)$$

Przyjmując, że czas (t_0) działania impulsu jest bardzo krótki [4], możemy podczas jego trwania pominąć wpływ siły oporu $R(x,t)$.

Wykonując całkowanie przez części, otrzymamy:

$$\int_0^{t_0} p_y(t) \left[\int_0^t p_y(t) dt \right] dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^{t_0} p_y(t) dt \right]^2 \quad (18)$$

gdzie całka $\int_0^{t_0} p_y(t) dt$ przedstawia pole zawarte pod wykresem siła-czas i reprezentuje wartość impulsu J_1 .

Praca sił zewnętrznych jest zatem równa:

$$L'_{zewn} = \frac{L}{2m} J_1^2 \quad (19)$$

Wynik ten otrzymaliśmy przy założeniu, że opór mostu ujawnia się tylko po impulsie. Stąd tak obliczoną pracę sił zewnętrznych należy traktować jedynie jako wartość przybliżoną dającą jednak, z korzyścią dla bezpieczeństwa większe wartości.

Otrzymane w ten sposób wyniki można dalej uściślić, uwzględniając działanie sił oporu również podczas trwania impulsu, sposobem Norrisa [4]. W tym celu należy określić stosunek

$K_2 = \frac{L_{zewn}}{L'_{zewn}}$ w zależności od rodzaju impulsu oraz stosunku czasu działania impulsu do okresu drgań własnych systemu ($K_1 = \frac{t_0}{T_0}$). Wartości $0,001 < K_2 < 1$ można odczytać z wykresów podanych przez Norrisa [4].

Znając wartość współczynnika K_2 , określimy pracę sił zewnętrznych w zależności:

$$L_{zewn} = K_2 L'_{zewn} = K_2 \frac{L}{2m} J_1^2 \quad (20)$$

Z równości pracy sił zewnętrznych (20) i wewnętrznych (2), (13), (20) otrzymano ostatecznie równanie, z którego wyznaczono maksymalne przesunięcia pionowe w postaci:

$$C_y = \left[\frac{K_2 L \frac{1}{2m}}{EJ_z \frac{\pi^4}{4L^3} (1+81\varepsilon^2) + Hg \frac{\pi^2}{4L} (1+9\varepsilon^2) + \frac{K_k K_k}{2L_k} y''^2 \frac{4l^2}{\pi^2} (1 - \frac{\varepsilon}{3})^2} \right]^{\frac{1}{2}} J_1 (1+\varepsilon) \quad (21)$$

b) Działanie impulsu w kierunku poziomym

Podobnie jak poprzednio możemy wyznaczyć przesunięcie poziome względnie skręcenie mostu w oparciu o funkcję

$$w(x) = C_z \cdot \frac{v(x)}{y} \quad (22)$$

$$\psi(x) = C_{yz} \cdot \frac{v(x)}{y} \quad (23)$$

spełniającą warunki brzegowe (C_z - maks. wychylenia, C_{yz} - maks. skręcenie).

Praca odkształcenia osiągnie największą wartość w momencie maksymalnego wychylenia i może być dla tego stanu wyznaczona niezależnie od tego według jakiego prawa ustrój ulegał odkształceniu w czasie.

W przypadku mostów wiszących możemy wyznaczyć pracę odkształcenia sił wewnętrznych jako sumę następujących składników:

- a) pracy momentów zginających belkę usztywniającą,
- b) pracy momentów skręcających belkę usztywniającą,
- c) pracy siły stycznej rozciągającej kabel,
- d) pracy wywołanej przyrostem siły w kablu.

W ten sposób przedstawiono całkowitą pracę sił wewnętrznych przy sprzężonych drganiach w momencie największego wychylenia jak następuje:

$$\begin{aligned}
 L_{\text{wewn,max}} = & \frac{EJ}{2} y \int_0^L \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + y_s \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx + \\
 & + \left(\frac{GJ}{2} c_s + e^2 Hg_1 \right) \int_0^L \left(\frac{dv(x)}{dx} \right)^2 dx + e^2 \frac{E_k P_k}{2I_k} y''^2 \left[\int_0^L v(x) dx \right]^2 + \\
 & + \frac{EC\mu}{2} \int_0^L \left(- \frac{d^3 v(x)}{dx^3} \right) \frac{dv(x)}{dx} dx
 \end{aligned} \quad (24)$$

gdzie: niewiadomymi są współczynniki:

$$c_{yz} \quad \text{oraz} \quad \frac{c_z}{c_{yz}}$$

Pracę sił zewnętrznych możemy wyrazić za pomocą dwóch członów:

$$L_{\text{zewn}} = \int_0^L \int_0^{t_0} \left[p_z(t) \frac{\partial w(x)}{\partial t} + p_p(t) y_p \frac{\partial v(x)}{\partial t} \right] dt dx \quad (25)$$

gdzie: y_p oznacza odległość wypadkowej sił poziomych osi środka ścinania.

Oznaczając przez $R_1(x,t)$ siły oporu przy przesunięciu a przez $R_2(x,t)$ siły oporu przy skręceniu, możemy napisać podstawowe równanie dynamiczne w postaci:

$$\ddot{w}(x,t) = \frac{1}{m_1} \left\{ p_z(t) - R_1(x,t) \right\} \quad (26)$$

$$\ddot{v}(x,t) = \frac{1}{J_0} \left\{ p_p(t) y_p - R_2(x,t) \right\} \quad (27)$$

Po określeniu z powyższych równań wielkości $\frac{dw}{dt}$ i $\frac{d\psi}{dt}$ i uwzględnieniu ich w (25), otrzymamy:

$$L_{zewn} = \int_0^L \int_0^t \left[p_z(t) \frac{1}{m_1} \int_0^t (p_z(t) - R_1(x,t)) dt + \right. \\ \left. + p_z(t) y_p \frac{1}{j_0} \int_0^t (p_z(t) y_p - R_2(x,t)) dt \right] dt dx \quad (28)$$

Zakładając, podobnie jak w przypadku impulsu pionowego, że w czasie trwania impulsu można pominąć wpływ oporów R_1 i R_2 , otrzymamy z (28) po scałkowaniu przez części i uwzględnieniu współczynnika redukcyjnego K_2 wyrażenie na pracę sił zewnętrznych.

$$L_{zewn} = \frac{L \cdot k_2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{y_p^2}{j_0} \right) J_2^2 \quad (29)$$

Z równości prac sił zewnętrznych i wewnętrznych otrzymamy ostatecznie szukaną amplitudę C_{yz} , a dalej również C_z .

W oparciu o wyznaczone amplitudy C_y , C_z , C_{yz} można obliczyć przynależne do nich maksymalne naprężenia.

Przedstawiony tok postępowania będzie podobny również dla innej struktury konstrukcyjnej i dowolnych obciążeń.

3. Wyznaczenie naprężeń maksymalnych

W oparciu o powyższe obliczenia określono wartości największych odkształceń w postaci:

$$v(x) = \frac{C_y}{1+\varepsilon} \left(\sin \frac{\pi}{L} x - \varepsilon \sin \frac{3\pi}{L} x \right) \quad (30)$$

$$w(x) = \frac{C_z}{1+\varepsilon} \left(\sin \frac{\pi}{L} x - \varepsilon \sin \frac{3\pi}{L} x \right) \quad (31)$$

$$\delta(x) = \frac{C_{yz}}{1+\varepsilon} \left(\sin \frac{\pi}{L} x - \varepsilon \sin \frac{3\pi}{L} x \right) \quad (32)$$

skąd na podstawie znanych zależności stereomechaniki technicznej określono siły wewnętrzne i naprężenia maksymalne.

Wpływy impulsów pionowych i poziomych uwzględniono przez superpozycję.

Wartości naprężeń określonych w powyższy sposób są zgodne z rzeczywistymi w takim stopniu, w jakim została poprawnie opisana postać belki odkształconej. Co się jednak tyczy naprężeń maksymalnych, to można je uważać za dobre przybliżenie. Wartości te są przydatne do określenia wniosków końcowych odnośnie zachowania się mostu pod wpływem obciążeń impulsowych.

Dokładność opisanego postępowania może być zwiększona przy zastosowaniu bardziej dokładnych funkcji przemieszczeń uzyskanych z obliczeń lub doświadczeń w oparciu, o które możemy obliczyć współczynniki C_y , C_z i C_{yz} . Z przeliczonych przykładów wynika, że przyjęcie różnych funkcji przemieszczeń spełniających warunki brzegowe wpływa tylko nieznacznie na wartość naprężeń maksymalnych.

Opisaną metodę zilustrowano przykładem liczbowym.

(tłum. R. Koppel)

LITERATURA

- [1] Waltring: Praktische Berechnung der Eigenfrequenzen von Hängebrücken. Der Bauingenieur, 1950, H. 6-7.
- [2] Hawranek-Steinhardt: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer Verlag, 1958, Berlin.
- [3] Gere-Lin: Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams, Open Cross Section. Journal of Applied Mechanics, 1958, No 3.
- [4] Norris: Design for Dynamic Loads. Mc Graw-Hill, New York 1959.
- [5] Гольденблат - Гритов: Справочник по расчету строительных конструкций на устойчивость и колебания. Москва, 1952.

- [6] Bleich: Dynamic Instability of Truss-stiffened Suspension Bridge Behavior. Proceedings of ASCE, 1948.
- [7] Steinman: Le probleme aérodynamique des ponts suspendus. L'Ossature metallique, 1954.
- [8] Timosenko, Young: Vibration Problems in Engineering. D. Van Nostrand Company, New York, 1955.
- [9] Stussi F.: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Springer Verlag, 1958. Berlin.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЙ В ВИСЯЧИХ МОСТАХ ВЫЗЫВАЕМЫХ
ВЛИЯНИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ СИЛЫ

Р е з ю м е

В работе определено наибольшее перемещение балки жесткости подвесного моста, подвернутого действию равномерно распределённой, произвольно переменной во времени нагрузке от удара воздушной волны.

DETERMINATION OF INTERNAL FORCES IN SUSPENSION
BRIDGES UNDER THE ACTION OF AN IMPULSE LOAD

S u m m a r y

In the paper the maximum displacements of a beam stiffening the suspension bridge, being under the influence of a uniform load distribution arbitrarily changeable during the load time in relation to the air-wave gust, have been given.