ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŚLĄSKIEJ 1967
Seria: BUDOWNICTWO z. 20 Nr kol. 201

ANDRZEJ RÓŻYCKI
Zakład Teorii Konstrukcji Maszyn
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

METODY EKSPERYMENTALNE OKREŚLANIA CHARAKTERYSTYK NAPRĘŻEŃ I OBCIĄŻEŃ JAKO FUNKCJI LOSOWO ZMIENNYCH W KONSTRUKCJACH MOSTOWYCH
(Skrót redakcyjny)

1. Zagadnienie losowości czynników mających wpływ na konstrukcję

Projektowanie mostów, zarówno kolejowych jak i drogowych, oparte jest na zasadzie normatywnego ustalenia obciążenia na podstawie którego wyznacza się naprężenia w poszczególnych elementach, a następnie porównuje je z ich wartościami dopuszczalnymi. Wartości dopuszczalne naprężeń ustalone są również normatywnie. Obliczeń dokonuje się sprowadzając wszystkie obciążenia do obliczeń statycznych, a wpływ obciążeń dynamicznych uwzględniony jest przez wprowadzenie tzw. współczynników dynamicznych. Współczynniki te, zależnie od typu mostu, rodzaju konstrukcji i stosowanego materiału mogą mieć różną formę, postać i wartość liczbową, ale ich wspólną cechą charakterystyczną jest to, że także ustalone są normatywnie.

Powyższe zasady projektowania i metody obliczania ustrojów mostowych milcząco zakładają, że wszystkie czynniki mające wpływ na zachowanie się konstrukcji podczas pracy (a więc na odkształcenia, naprężenia, częstotliwość, amplitudę i tłumienie drgań itp.) są wielkościami zdeterminowanymi ilościowo i jakościowo.

W rzeczywistości jednak czynniki te ilościowo są zmiennymi (lub funkcjami) losowymi i w równaniach teoretycznych należy uwzględnić losowy ich charakter. Metody takiej analizy opartej o rachunek prawdopodobieństwa są znane i określane nazwą probabilistycznej teorii bezpieczeństwa konstrukcji. Poczyna-

jąc od pracy [1] powstała na powyższy temat obszerna literatura (szczegółowo wymieniona w pracy [2]).

Analiza teoretyczna w podanym ujęciu daje o wiele pełniejsze i bliższe rzeczywistości odwzorowania procesów, ale wyłaniają się tu pewne dość trudne problemy. Przeprowadzenie rozważań teoretycznych wymaga bowiem zawsze dokonania takich lub innych założeń upraszczających rozumowanie, lecz powodujące jednocześnie "idealizowanie" odwzorowanego zdarzenia.

Konieczność dalszego rozwijania analizy teoretycznej opartej o rachunek prawdopodobieństwa jest oczywista, tym niemniej szczególny nacisk należy położyć na badania eksperymentalne i określanie na drodze pomiarów rozkładów najważniejszych czynników jako zmiennych losowych. Oznacza to określanie rozkładu prawdopodobieństwa pojawienia się (intensywności itp.) badanego czynnika na drodze statystycznej tj. na drodze zdejmowania metodami statystycznymi charakterystyki danego przebiegu w warunkach eksploatacyjnych.

Istnieją w literaturze [3] propozycje określania w powyższy sposób współczynnika dynamicznego dla mostów kolejowych. Po przeanalizowaniu ich nasuwają się pewne wnioski odnośnie probabilistycznego traktowania zagadnienia:

1) Analiza teoretyczna zawiera uproszczenia i trudno określić o ile są one dopuszczalne.
2) W przypadku uwzględnienia dużej liczby czynników analiza teoretyczna staje się bardzo skomplikowana, a więc mało użyteczna.
3) Określenie na drodze eksperymentalnej rozkładu gęstości współczynnika dynamicznego jest uproszczeniem zagadnienia. Pominięcie wpływu takich czynników jak naprężenia montażowe, nieosiowość prętów itp. jest niesłuszne. Wpływają one zarówno na same wyniki pomiarów współczynnika dynamicznego jak i na sposób zachowania się poszczególnych prętów podczas pracy (eksploatacji) konstrukcji.

Metoda badawcza, która pozwala na ominięcie w/w trudności i nieścisłości polega na doświadczalnym określaniu charakterystyk

najważniejszych czynników jako zmiennych losowych z trzech różnych grup.

Do najważniejszych należą tu:

z grupy pierwszej obejmującej obciążenia - charakterystyki obciążeń statycznych (masy, odległości między nimi, rozstaw punktów przyłożenia sił) prędkości i przyspieszenia oraz charakterystyki obciążeń meteorologicznych;

z grupy drugiej obejmującej cechy mostu - charakterystyka ciężaru własnego, naprężeń montażowych, błędów montażowych i własności fizycznych materiału;

z grupy trzeciej obejmującej skutki działania czynników z dwu poprzednich grup - charakterystyki naprężeń, amplitudy drgań i ich częstości.

Charakterystyki tych czynników należy zdejmować w warunkach eksploatacyjnych - na konstrukcji normalnie pracującej (a nie przy "normatywnych" czy programowych obciążeniach). Wyniki badań należy traktować i opracowywać jako dane statystyczne.

2. Wybór metod pomiarów i sposób realizacji

Metoda, jaką należy zastosować w eksploatacyjnych badaniach statystycznych zależna jest od:

1) rodzaju czynnika badanego (obciążenia statyczne, prędkości, naprężenia itp.),
2) sposobu jego występowania,
3) możliwości istniejących w zakresie aparatury pomiarowej i analizującej uzyskane wyniki.

Rodzaj czynnika badanego wpływa w sposób oczywisty na wybór metody (np. prędkość pojazdów - radar, naprężenia - metody tensometryczne, masa pojazdów - określenie szacunkowe[x]). Sposób

[x] Statystyczne pomiary obciążeń (masy) pojazdów stanowią technicznie najtrudniejszy problem - nie można przecież każdego pojazdu ważyć przed wyjechaniem na most. W odniesieniu do samochodów osobowych - wystarcza identyfikacja marki wozu i ilość osób jadących, w przypadku samochodów ciężarowych - marki wozu i szacunkowo ciężaru ładunku. W przypadku mostów kolejowych - sprawa jest znacznie trudniejsza.

występowania danego czynnika zależy od tego, jakim rodzajem zmiennej losowej (funkcji losowej) można zdarzenie jego pojawienia się opisać. Ogólnie rzecz biorąc badany czynnik może być:

a) zmienną losową ciągłą (przynajmniej w pewnym przedziale) np. ciężar ładunku danego pojazdu,
b) zmienną losową przyjmującą wartości dyskretne np. liczba pojazdów na moście w chwili t,
c) funkcją losową ciągłą np. prędkość pojazdu $V = V(t)$, gdzie t oznacza czas,
d) funkcją losową przyjmującą wartości dyskretne - np. liczba pojazdów na czasie jako funkcja czasu,
e) zmienną losową (funkcją losową) niezależną lub zależną,
f) zmienną losową (funkcją losową) skorelowaną lub nie,
g) zmienną losową (funkcją losową) jedno lub wielowymiarową.

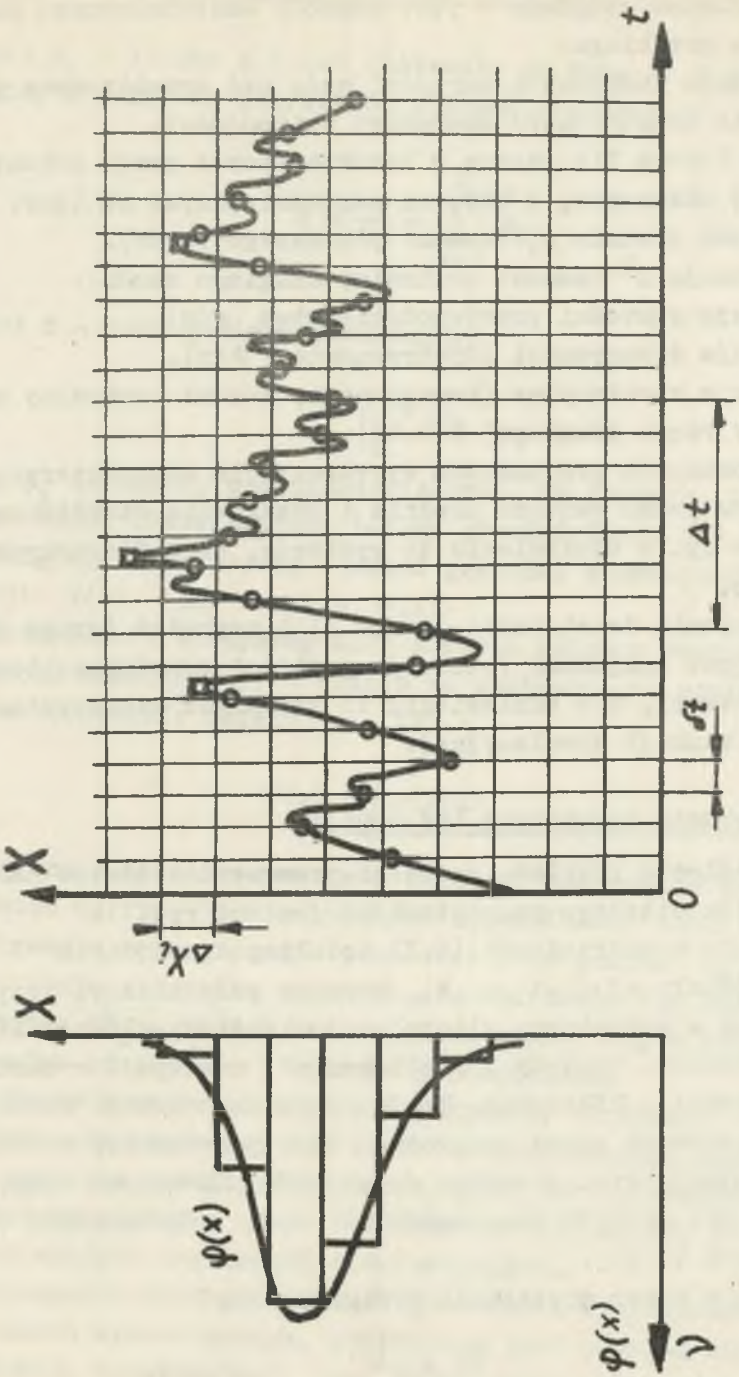
Zależnie od aparatury - można dokonać pomiarów i zapisu funkcji ciągłych (rys. 1):

a) w sposób ciągły - tzn. wykres (zapis mechaniczny, świetlny, magnetyczny),
b) pomiar może być ciągły, a zapis zliczający wartości chwilowe (rys. 1): w odstępach czasu δt (punkty oznaczone kółeczkiem) lub wartości maksymalne w pewnych odstępach czasu Δt (odstęp czasu przeważnie związany z cyklicznością procesu np. obciążeń).

Badanie zmiennych i funkcji losowych przyjmujących wartości dyskretne - odbywa się oczywiście metodą ich zliczania.

Aparatura w sposób zasadniczy rzutuje na zakres i czas prowadzenia pomiarów. Zapis ciągły - dający pełny obraz przebiegu badanej zmiennej posiada dwie wady:

a) wymaga olbrzymich (przy badaniach statystycznych) ilości taśmy rejestrującej - praktycznie zapis taki można zrealizować jedynie przy wielościeżkowym zapisie na taśmie magnetofonowej z automatycznym przełączaniem kanałów,
b) analiza zapisu wymaga specjalnych przyrządów (analizatory, korelatory, rejestratory zaliczające, maszyny matematyczne itp.).



Rys. 1

Zaletą zapisu ciągłego - jest możność wszechstronnej analizy badanego przebiegu.

Rejestracja chwilowych wartości może być zrealizowana przez zastosowanie elektronowej aparatury zliczającej.

Zmienną losową X(t) można s harakteryzować przez podanie różnych jej własności, z których najważniejszymi są (por. [7]):

1) Wartość średnia μ_1 (moment pierwszego rzędu).
2) Wariancja D^2 (moment centralny drugiego rzędu).
3) Funkcja gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(x)$.
4) Funkcja dystrybucji (dystrybuanta) $\Phi(x)$.
5) Funkcja korelacyjna (kowariancja, moment centralny mieszany rzędu drugiego) $K(t_1 t_2)$.

W najprostszych przypadkach wystarczy dla scharakteryzowania rozkładu podać wartość średnią i odchylenie standartowe σ ($\sigma = D^2$) - np. w odniesieniu do wymiarów, cech fizycznych materiału itp.

W odniesieniu do obciążeń (grupa I) i naprężeń (grupa III) konieczna jest znajomość rozkładów gęstości prawdopodobieństwa lub dystrybuanty, a w odniesieniu do zmiennych wielowymiarowych - ich funkcji korelacyjnej.

3. Opracowywanie uzyskanych informacji

Zasada określenia rozkładu gęstości prawdopodobieństwa na podstawie zapisu ciągłego przedstawiona jest na rys. 1.

W układzie współrzędnych (t,X) dzielimy oś rzędnych X na równe przedziały ΔX_i (i=1 ... k), każdemu przedziałowi przyporządkowujemy w aparaturze zliczającej określony element liczący np. numerator. Odczyty ("próbkowania") następują w odstępie δ_t (na wykresie - kółeczka), każda odczytana wartość funkcji zostaje zanotowana przez numerator tego przedziału, w którym wartość znajduje się. W wyniku otrzymujemy histogram częstości pojawiania się funkcji (np. naprężeń) w k przedziałach (we współrzędnych (X,ν)).

Częstość w i-tym przedziale próby wynosi:

$$\nu_i = \frac{n_i}{n} \tag{12}$$

gdzie: n_i - liczba zliczeń (kółeczka na rys. 1) w i-tym przedziale, n - liczba wszystkich zliczeń w próbie.

$$n = \frac{T}{\delta t} = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{13}$$

gdzie: T - czas pomiaru (całkowity)

$$\nu_i \cong p_i \tag{14}$$

Przez p_i oznaczamy prawdopodobieństwo, że funkcja X(t) przyjmie wartości odpowiadające i-temu przedziałowi. Gdy $\Delta X_i \to 0$ z histogramu otrzymujemy rozkład gęstości prawdopodobieństwa funkcji X(t) tzn. funkcję $\varphi(x)$.

Dystrybuantę otrzymamy albo sumując kolejne wartości ν_i (wielobok kumulacyjny) - będzie to dystrybuanta empiryczna, albo na podstawie zależności (15).

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx \tag{15}$$

Analogicznie można rozpatrywać wartości maksymalne (oznaczone kwadratem na rys. 1) w przyjętych przedziałach czasu Δt, lub czas trwania przewyższenia ponad ustalony poziom $X_a = X_i$. W tym ostatnim przypadku dokonuje się zliczania dla każdego przedziału ΔX_i - ilości czasów próbkowania δt, w których dolna granica przedziału i została przekroczona.

Ponieważ postępując w powyższy sposób, otrzymuje się jedynie histogram częstości lub wielobok kumulacyjny, funkcje rozkładu gęstości prawdopodobieństwa $\varphi(x)$ lub dystrybuantę $\Phi(x)$ otrzymujemy stosując znane z literatury [4] metody doboru funkcji do wyników uzyskanych doświadczalnie.

Wyznaczanie funkcji rozkładu gęstości i dystrybuanty nie jest czasem wystarczające. Koniecznym jest wówczas wyznaczenie funkcji korelacyjnej, tzn. wyznaczenie zależności uśrednia-

jącej po czasie przebieg badany (rozpatrujemy tzw. funkcję stacjonarną).

Postępujemy wówczas następująco:

Dzielimy czas pomiaru T zgodnie z (13).

Obliczamy wartość średnią μ_1 na miejsce x_1 podstawiając wartość funkcji w końcu i-tego przedziału tzn. $x(t_i)$

$$\mu_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(t_i) \tag{16}$$

a następnie

$$\mu_1 = \frac{1}{n\delta t} \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\delta t = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{n} x(t_i)\delta t \tag{17}$$

gdy $\delta t \to 0$ to

$$\mu_1 = \frac{1}{T} \int_0^T X(t)dt \tag{18}$$

Warunkiem uśrednienia po czasie jest spełnieniem tzw. warunku ergodyczności funkcji

$$\lim_{T \to \infty} D^2 [\mu_1] = 0 \tag{19}$$

Ponieważ rozpatrujemy funkcje stacjonarne, więc wartość funkcji zależy tylko od różnicy czasów tzn. od

$$\tau = t_2 - t_1 \tag{20}$$

a więc warunek, aby można uśrednić funkcję po czasie ma postać

$$\int_0^\infty K(\tau)\, d\tau < \infty \tag{21}$$

gdzie: $K(\tau)$ oznacza funkcję korelacyjną.

Mając wyznaczone wartości μ_1 z (16) lub (18), dzieląc czas pomiarów T na n odcinków δt zakładając, że przedział czasu τ zawiera l przedziałów δt otrzymujemy:

$$K(\tau) = \frac{1}{n-l-1} \sum_{i=1}^{n-l} \left[x(t_i) - \mu_1\right]\left[x(t_i+\tau) - \mu_1\right] \tag{22}$$

gdzie:

$$\delta t(n - l) = T - \tau \tag{23}$$

lub gdy $\delta t \to 0$ to

$$K(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \left[X(t)-\mu_1\right]\left[X(t+\tau)-\mu_1\right] dt \tag{24}$$

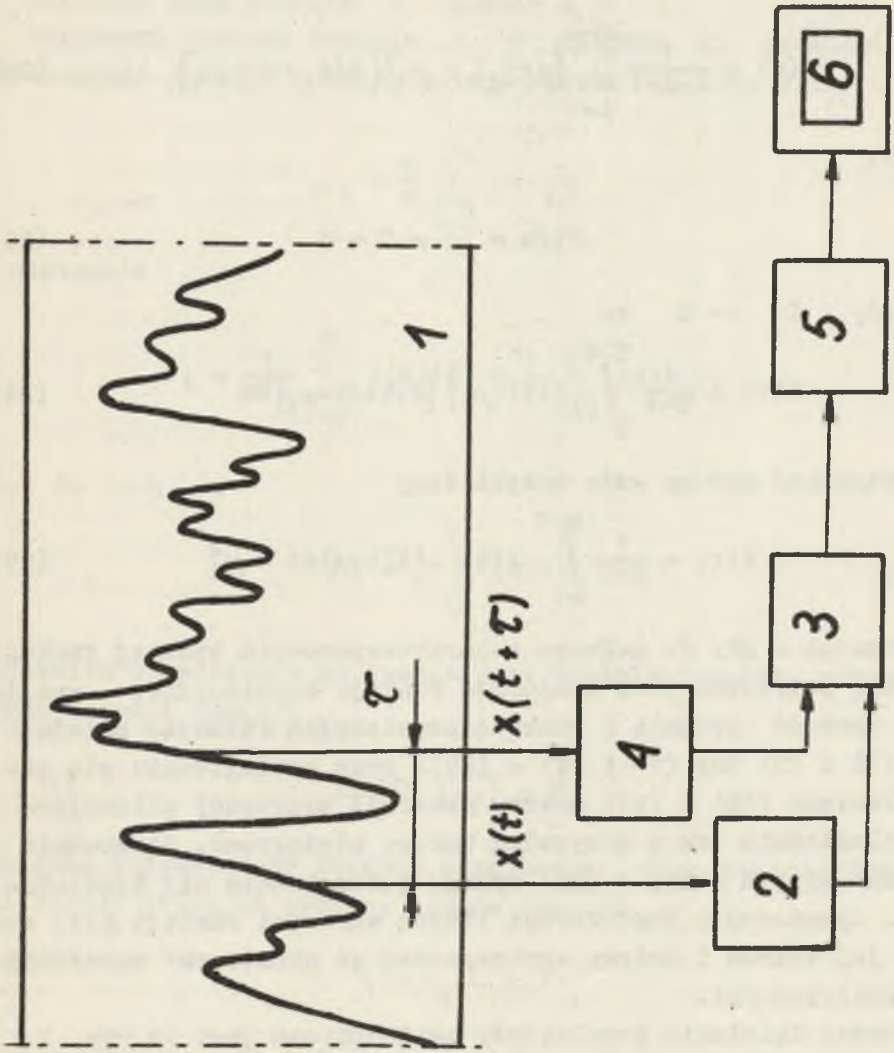
lub stosować możemy wzór przybliżony

$$K(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X(t) \cdot X(t+\tau) dt - \mu_1^2 \tag{25}$$

Reasumując - gdy do pełnego scharakteryzowania badanej funkcji losowej potrzebna jest znajomość funkcji korelacyjnej - znajdujemy wartość średnią i funkcję korelacyjną stosując zależności (16 i 22) lub (18 i 24) - (25). Przy posługiwaniu się zależnościami (16) i (22) możemy stosować przyrządy zliczające - analogicznie jak w przypadku budowy histogramu. Stosowanie zależności (18 i 24) - (25) wymaga posługiwania się korelatorami. Wyznaczając dostateczną liczbę wartości funkcji $K(\tau)$ robimy jej wykres i możemy aproksymować go prostszymi wyrażeniami analitycznymi.

Zasada działania korelatorów uwidoczniona jest na rys. 2. Przepuszczając taśmę z ciągłym zapisem badanej funkcji dokonuje się odczytu wartości $x(t)$, a w miejsce $x(t+\tau)$ wchodzi stała wartość a. Otrzymujemy wartości (26) i wyznaczamy μ_1.

$$a \int_0^T X(t)dt = \mu_1 \; a \quad T \tag{26}$$



Rys. 2

Przepuszczając taśmę powtórnie - dokonuje się pobrania wartości $x(t)$ i $x(t+\tau)$, przy czym odstęp τ ustalany jest dowolnie. Podzespoły "2" i "4" dokonują odejmowania od $x(t)$ i $x(t+\tau)$ wartości μ_1. Otrzymane różnice zostają przemnożone w podzespole "3". Wyniki przekazywane są do podzespołu całkującego "5", z którego na wyjściu "6" otrzymujemy bieżącą wartość całki (24). Dzieląc wynik przez długość taśmy L otrzymujemy wartość średnią funkcji korelacyjnej dla ustalonej wartości τ. Powtarzając postępowanie odpowiednią ilość razy dla różnych wartości τ otrzymujemy potrzebną ilość wartości $K(\tau)$ równą liczbie powtórzeń.

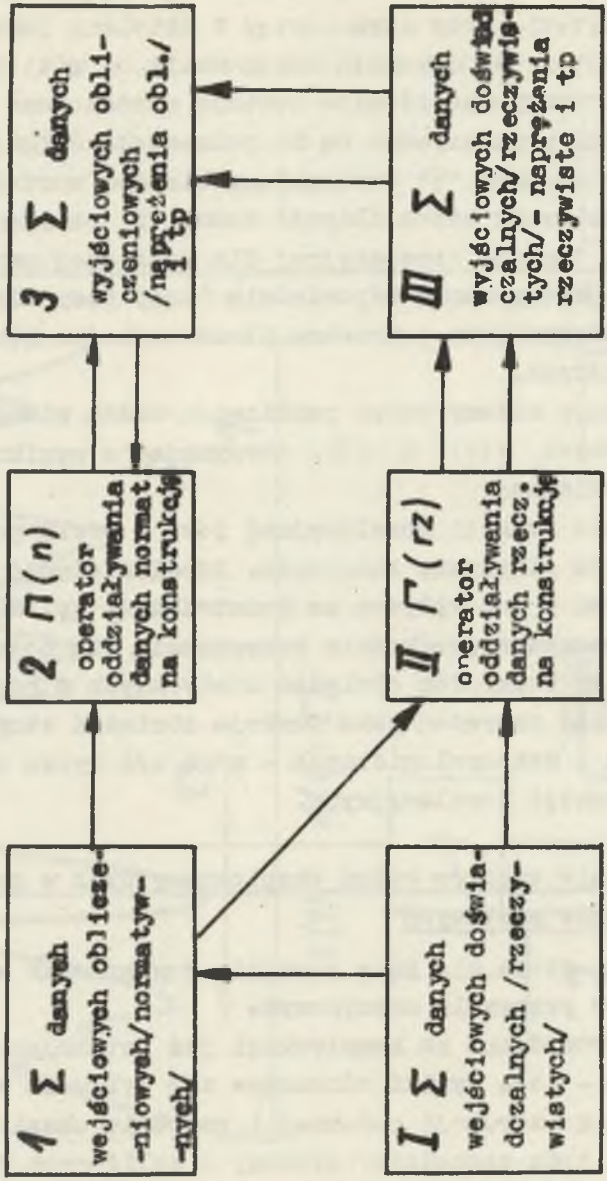
Analogicznie możemy badać realizację dwóch stacjonarnych funkcji losowych $X(t)$ i $Y(t)$ otrzymując w wyniku funkcję korelacji wzajemnej.

Wyznaczanie funkcji korelacyjnej jest w wielu przypadkach niezbędne i ma olbrzymie znaczenie. Współzależność między wieloma zmiennymi i ich wpływem na konstrukcję, np. między obciążeniem statycznym a prędkością przesuwania się pojazdów, zależność między rozkładem obciążeń statycznych a rozkładem naprężeń, rozkład naprężeń jako funkcja obciążeń statycznych, dynamicznych i meteorologicznych - mogą być tylko określone za pomocą funkcji korelacyjnych.

4. Zastosowanie wyników badań eksploatacyjnych w projektowaniu ustrojów mostowych

Konstrukcje mostowe nie są w zasadzie powtarzalne - jak to ma miejsce np. w przemyśle maszynowym.

Badania prowadzone na konstrukcji już istniejącej i podczas eksploatacji - dają wyniki odnoszące się tylko do ustroju przebadanego. Na konstrukcji podobnej i podobnie eksploatowanej (obciążonej) będą zachodziły procesy o zbliżonych jedynie charakterystykach. Powstaje pytanie czy badania eksploatacyjne i ich statystyczna interpretacja może stanowić jakiś materiał dla projektowania i konstruowania następnych ustrojów mostowych - jeśli nie można wyników bezpośrednio wykorzystać.


MODEL A
1 Σ danych wejściowych obliczeniowych/normatywnych/
2 Π(n) operator oddziaływania danych normat na konstrukcję
3 Σ danych wyjściowych obliczeniowych /naprężenia obl./ i tp
MODEL B
I Σ danych wejściowych doświadczalnych /rzeczywistych/
II Γ(rz) operator oddziaływania danych rzecz. na konstrukcję
III Σ danych wyjściowych doświadczalnych/rzeczywistych/- naprężenia rzeczywiste i tp

Rys. 3

Rozwiązanie jest możliwe na drodze potraktowania całego zagadnienia jako pewnego rodzaju modelu (rys. 3). Mamy w zasadzie dwa modele: A-obliczeniowy (normatywny) i B - statystyczny (eksperymentalny).

Sprzężenie I → 1 oznacza korygowanie normatywnych wielkości wejściowych (obciążeń) na podstawie wielkości wejściowych eksperymentalnych.

Sprzężenie 1 → II → III → 3 → 2 pozwala skorygować 2, tzn. mając model A przez zastosowanie "normatywnych" obciążeń statycznych i pomiar naprężeń - możemy porównać wyniki z obliczeniami i stwierdzić, na ile założony teoretycznie sposób oddziaływania 1 (obciążeń normatywnych) na konstrukcję odpowiada rzeczywistemu oddziaływaniu tych normatywnych obciążeń. Oznacza to porównanie z rzeczywistością przyjętych schematów obliczeniowych.

Sprzężenie III → 3 oznacza porównanie "wyjścia" (naprężeń, amplitud i okresów drgań itp.) określonego doświadczalnie w warunkach eksploatacji z "wyjściem" obliczeniowym (normatywnym).

Nietrudno zauważyć, że grupy I i 1, II i 2, III i 3, odpowiadają grupom I, II i III podziału czynników mających wpływ na konstrukcję, wymienionych w pierwszym punkcie referatu.

Porównywanie zaś I z 1 i III z 3 pozwoli po pewnym czasie na zastąpienie wartości "normatywnych" - wartościami rzeczywistymi z uwzględnieniem prawdopodobieństw ich występowania.

Wymienione tu sprzężenia są najważniejszymi, jakie mogą zachodzić i jakie mają decydujące znaczenie dla ujęcia projektowania i konstruowania jako liczbowej interpretacji obiektywnie istniejących procesów fizycznych w ustrojach mostowych.

LITERATURA

[1] Wierzbicki W.: Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa. Przegląd Techniczny, 1936.

[2] Bimer Cz.: Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji. Rozprawy Inżynierskie, 1963, t. XI, zeszyt 1.

[3] Wierzbicki W.: Próba probabilistycznej oceny bezpieczeństwa mostów stalowych. Rozprawy Inżynierskie, 1963, t. XI, zeszyt 2.

[4] Fisz M.: Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna.

[5] Pugaczew W.: Teoria funkcji przypadkowych, 1960.

[6] Swiesznikow A.: Podstawowe metody funkcji losowych, 1965.

[7] PN-58/N-01051 - Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Terminy, określenia i symbole.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАПРЯЖЕНИЙ И НАГРУЗОК В МОСТОВЫХ КОНСТРУКЦИЯХ КАК ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНО ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме

Приведено методы обработки результатов исследований мостов, опираясь на исчисления вероятности.

EXPERIMENTAL METHODS OF DETERMINATION OF STRESS AND LOAD CHARACTERISTICS AS RANDOM VARIABLE FUNCTIONS IN BRIDGE STRUCTURES

S u m m a r y

The methods of working over the results of bridges investigations on the ground of the calculus of probability, have been presented.