

BOHDAN BOCZKAJ, HENRYK HAT

## JEDNOKIERUNKOWO OBCIĄŻONE PASMA RUSZTOWE

**Streszczenie.** W artykule przedstawiono rozwiązanie jednokierunkowo obciążonych pasm rusztowych dla których modelem są jednorodne siatki ciągłe. Jest to szczególnie przypadek zagadnienia płaskiego teorii ośrodków włóknistych. Dla rozważań przyjęto pasma o schemacie belki swobodnie podpartej wzdłuż krótszego boku. Rozpatrzono ruszty, których modelem są trzy typy jednorodnych, gęstych siatek prętowych złożonych z dwóch lub trzech rodzin włókien. W wyniku rozważań otrzymano rozwiązania dla poszczególnych przypadków obciążeń w postaci zamkniętej lub szeregów Fouriera. Oprócz rozwiązania dokładnego podano rozwiązanie przybliżone i przeanalizowano różnice między obu rozwiązaniami w zależności od gęstości siatki.

1. Równania ogólne

Zamiarem autorów niniejszego artykułu jest przedstawienie rozwiązania układów rusztowych, których modelem są jednorodne siatki ciągłe w postaci pasma obciążonego jednokierunkowo. Jest to przypadek szczególnie zagadnienia płaskiego teorii ośrodków włóknistych.

Ogólne równanie siatek ciągłych będących modelem płaskich rusztów podano wg [1] w postaci

$$A^{\alpha\beta\gamma} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} w_{\gamma} + \epsilon_{\beta\gamma}^{\mu} A^{\alpha\beta\gamma} \partial_{\alpha} v_{\mu} + f^{\beta} = 0 \quad (1)$$

$$C^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} v_{\nu} + \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} \epsilon_{\gamma\mu}^{\nu} A^{\alpha\beta\mu} v_{\nu} + \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} A^{\alpha\beta\mu} \partial_{\mu} w_{\gamma} + h^{\beta} = 0$$

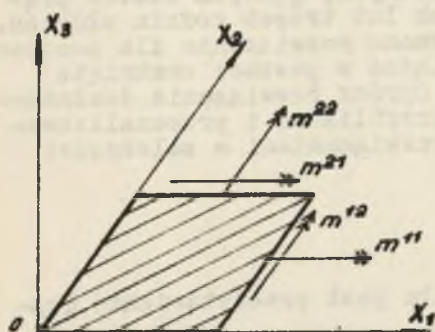
gdzie: A i C współczynniki zależne od sztywności prętów oraz kątów jakie tworzą pręty między sobą

$$\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

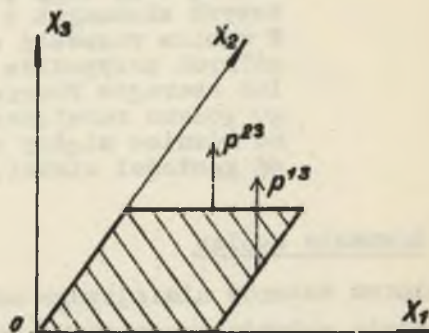
- $\alpha, \beta, \mu, \nu$  - wskaźniki przebiegające ciąg 1,2  
 $w_3$  - ugięcie pasma rusztowego  
 $\nu_\mu$  - kąt obrotu wokół osi  $\mu$   
 $f^3$  - obciążenie normalne do powierzchni rusztu  
 $h^\beta$  - momenty zewnętrzne o wektorze równoległym do osi  $\beta$   
 $\epsilon$  - symbol Ricci.

Indeksy przy sile  $f$  i momentach  $h$  oznaczają kierunki działania ich wektorów. Układ współrzędnych i sił brzegowych podają rysunki 1 i 2.

Dokładny opis przyjętych oznaczeń znajduje się w cytowanej wyżej pracy [1].



Rys. 1



Rys. 2

Równania (1) można również napisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 A^{1313} \partial_1 (\partial_1 w_3 + v_2) + A^{2323} \partial_2 (\partial_2 w_3 - v_1) + f^3 &= 0 \\
 C^{1111} \partial_1^2 v_1 + C^{2121} \partial_2^2 v_1 + 2C^{1122} \partial_1 \partial_2 v_2 + A^{2323} (\partial_2 w_3 - v_1) + h^1 &= 0 \\
 C^{2222} \partial_2^2 v_2 + C^{1212} \partial_1^2 v_2 + 2C^{2211} \partial_1 \partial_2 v_1 - A^{1313} (\partial_1 w_3 + v_2) + h^2 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Wewnętrzne momenty i siły w siatce rusztowej wyrażają się poniższymi wzorami:

$$m^{11} = c^{1111} \theta_1 v_1 + c^{1122} \theta_2 v_2$$

$$m^{12} = c^{1212} \theta_1 v_2 + c^{1221} \theta_2 v_1$$

$$m^{21} = c^{2121} \theta_2 v_1 + c^{2112} \theta_1 v_2$$

$$m^{22} = c^{2222} \theta_2 v_2 + c^{2211} \theta_1 v_1$$

$$l^2 p^{13} = \overline{A^{1313}} (\theta_1 w_3 + v_2)$$

$$A^{1313} = \frac{\overline{A^{1313}}}{l^2}$$

$$l^2 p^{23} = \overline{A^{2323}} (\theta_2 w_3 - v_1)$$

$$A^{2323} = \frac{\overline{A^{2323}}}{l^2}$$

Wielkość  $l$  charakteryzuje odstęp węzłów siatki (por. rys. 3). Układ (2) można doprowadzić do postaci:

$$\begin{aligned} & (c^{2222} - 2c^{1122}) \theta_1 \theta_2^2 v_2 + (2c^{2211} - c^{1111}) \theta_1^2 \theta_2 v_1 + \\ & + c^{1212} \theta_1^3 v_2 - c^{2121} \theta_2^3 v_1 + \theta_1 h^2 - \theta_2 h^1 + r^3 = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\overline{A^{2323}} (\theta_2 w_3 - v_1) = l^2 (-c^{1111} \theta_1^2 v_1 - c^{2121} \theta_2^2 v_1 - 2c^{1122} \theta_1 \theta_2 v_2 - h^1) \quad (3.2)$$

$$\overline{A^{1313}} (\theta_1 w_3 + v_2) = l^2 (c^{2222} \theta_2^2 v_2 + c^{1212} \theta_1^2 v_2 + 2c^{2211} \theta_1 \theta_2 v_1 + h^2) \quad (3.3)$$

Poprzednio podane wyrażenia dla sił i momentów pozostają oczywiście nadal w mocy.

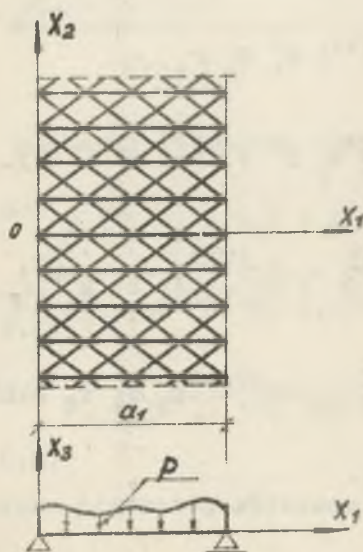
Współczynniki A i C dla siatki złożonej z trzech rodzin włókien, z których jedna jest równoległa do osi  $X_1$ , a pozostałe przecinają się z nią pod kątami  $\alpha$  i  $\pi + \alpha$ , zostały podane w pracy [2] i zostaną dalej przytoczone.

Dla siatek gęstych wielkość  $l$  jest bardzo mała w stosunku do wymiarów siatki. Przyjmując we wzorach (3.2) i (3.3)  $l \approx 0$  otrzymamy  $V_1 = \varrho_2 w_3$  oraz  $V_2 = -\varrho_1 w_3$ . Uwzględniając te warunki równanie (3.1) można sprawdzić do postaci:

$$c^{1212} \varrho_1^4 w_3 + (c^{2222} + c^{1111} - 4c^{1122}) \varrho_1^2 \varrho_2^2 w_3 + c^{2121} \varrho_2^4 w_3 - \varrho_1 h^2 + \varrho_2 h^1 - f^3 = 0 \quad (4)$$

Równanie (4) jest równaniem uproszczonym, analogicznym do równania płyty ortotropowej (patrz równanie 213 w [3]).

Wynika stąd, że wszystkie rozwiązania z teorii płyt ortotropowych można przenieść na teorię siatek opisywanych przybliżonym, równaniem (4).



Rys. 3

W dalszym ciągu zajmiemy się płaskimi pasmami rusztowymi leżącymi w płaszczyźnie  $X_1 X_2$  układu współrzędnych (rys. 3). Rozciągają się one w kierunku osi  $X_2$  i są swobodnie podparte wzdłuż krawędzi  $X_1 = 0$  i  $X_1 = a_1$ .

Zakładamy stałość obciążenia w kierunku osi  $x_2$ . Przy tych założeniach ogólne równania różniczkowe cząstkowe rzędu 6 (2) lub (3) sprowadzają się do układu zwyczajnych równań różniczkowych 4 rzędu.

Układ (2) przybiera wtedy postać:

$$l^2 c^{1111} \vartheta_1^2 v_1 - \overline{A^{2323}} v_1 + l^2 h^1 = 0 \quad (5.1)$$

$$l^2 c^{1212} \vartheta_1^2 v_2 - \overline{A^{1313}} (\vartheta_1 w_3 + v_2) + l^2 h^2 = 0 \quad (5.2)$$

$$c^{1212} \vartheta_1^3 v_2 + \vartheta_1 h^2 + f^3 = 0 \quad (5.3)$$

Związki pomiędzy wielkościami wewnętrznymi a przemieszczeniami mają postać:

$$m^{22} = c^{2211} \vartheta_1 v_1 \quad m^{12} = c^{1212} \vartheta_1 v_2$$

$$m^{11} = c^{1111} \vartheta_1 v_1 \quad m^{21} = c^{2112} \vartheta_1 v_2 \quad (5.4) \quad (5.5)$$

$$l^2 p^{23} = -\overline{A^{2323}} v_1 \quad l^2 p^{13} = \overline{A^{1313}} (\vartheta_1 w_3 + v_2)$$

Na wstępie zajmiemy się równaniem (5.1). Całka ogólna tego równania posiada dla  $h^1 = \text{const.}$  postać:

$$v_1 = A \cdot e^{-\frac{\alpha}{l} X_1} + B e^{\frac{\alpha}{l} X_1} + \frac{l^2 h^1}{\overline{A^{2323}}}$$

przy czym  $\alpha$  jest wielkością bezwymiarową i wynosi  $\alpha = \frac{\overline{A^{2323}}}{c^{1111}}$

Załóżmy, że na brzegach  $x_1 = 0$  i  $x_1 = a_1$  są przyłożone równomiernie rozłożone momenty skręcające  $m^{11} = c^{1111} (\vartheta_1 v_1)$   $x_1 = 0, a_1$ .

Stale wynoszą wówczas:

$$A = -\frac{l^2 h^1}{\overline{A^{2323}}} \cdot \frac{1}{1 + e^{-\frac{\alpha}{l} a_1}}; \quad B = \frac{-l^2 h^1}{\overline{A^{2323}}} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{\alpha}{l} a_1}}$$

Moment zewnętrzny  $h^1$  wywołuje z uwagi na warunki pracy obroty węzłów bez ugięcia płyty.

Z analizy równania (5.1) wynika, że wszystkie obciążenia poza momentem  $h^1$  nie wywołują kąta obrotu  $V_1$ , a zatem mogą powodować jedynie walcowe zginanie rusztu.

Rozwiązanie zginania walcowego pasma rusztowego sprowadza się więc do rozwiązania układu równań (5.2) i (5.3).

Ogólne ich rozwiązanie określają związki:

$$C^{1212} v_2 = - \iiint f^3 dx_1^3 - \iint h^2 dx_1 + \frac{D x_1^2}{2} + E x_1 + F \quad (6.1)$$

$$A^{1313} w_3 = - \iint f^3 dx_1^3 + D x_1 + \\ + \frac{A^{1313}}{C^{1212}} \left( \iiint f^3 dx_1^4 + \iiint h^3 dx_1^3 - \frac{D x_1^3}{6} - \frac{E x_1^2}{2} - F x_1 \right) + G \quad (6.2)$$

Podobnie jak układ równań (2) i (3) również równanie (4) dla zginania walcowego upraszcza się do postaci:

$$C^{1212} \theta_1^4 w_3 - \theta_1 h^2 - f^2 = 0 \quad (7)$$

Rozwiązanie równania (7) ma postać:

$$w_3 = \frac{1}{C^{1212}} \left( \iiint f^3 dx_1^4 + \iiint h^2 dx_1^3 - \frac{D x_1^3}{6} - \frac{E x_1^2}{2} - F x_1 \right) + G \quad (8)$$

Stałe występujące w rozwiązaniu wg wzoru (6) i wg wzoru (8) wyznaczamy z warunków brzegowych mających dla rozpatrywanego schematu postać:

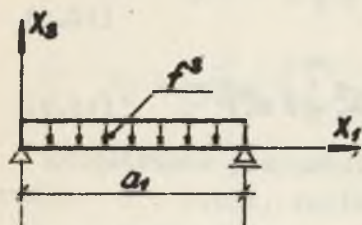
$$\text{dla } x_1 = 0, \quad w_3 = 0 \quad \text{i} \quad m^{12} = 0 \quad \text{lub} \quad m^{12} = M$$

$$\text{dla } x_1 = a_1, \quad w_3 = 0 \quad \text{i} \quad m^{12} = 0 \quad \text{lub} \quad m^{12} = M$$

W dalszych rozważaniach zostaną podane rozwiązania w oparciu o równania (6) i (8) dla poszczególnych schematów obciążeń.

2. Obciążenia normalne

2.1. Obciążenia stałe



Rys. 4

$$f^3 = -p$$

$$h^2 = 0$$

Warunki brzegowe:

$$x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

$$x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

rozwiązanie wg wzoru (6):

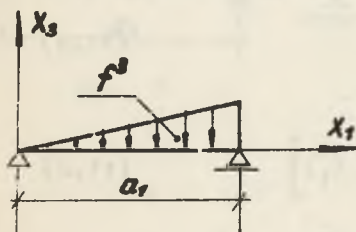
$$-W_3 = \frac{1^2}{A^{1313}} \left( -\frac{px_1^2}{2} + \frac{pa_1x_1}{2} \right) + \frac{1}{C^{1212}} \left( \frac{px_1^4}{24} - \frac{pa_1x_1^3}{12} + \frac{pa_1^3x_1}{24} \right) \quad (9.1)$$

$$V_2 = \frac{-p}{C^{1212}} \left( \frac{x_1^4}{24} - \frac{a_1x_1^3}{12} + \frac{a_1^3x_1}{24} \right) \quad (9.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{p}{C^{1212}} \left( \frac{x_1^4}{24} - \frac{a_1x_1^3}{12} + \frac{a_1^3x_1}{24} \right), \quad V_2 = -\theta_1 W_3 \quad (9.3)$$

2.2. Obciążenie trójkątne



Rys. 5

$$f^3 = b x_1$$

$$h^2 = 0$$

warunki brzegowe:

$$x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

$$x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

rozwiązanie wg wzoru (6):

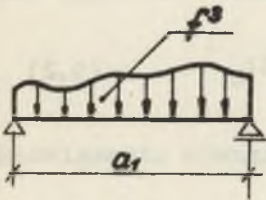
$$-W_3 = \frac{1^2}{A^{1313}} \frac{bx_1}{6} (a_1^2 - x_1^2) + \frac{1}{C^{1212}} \frac{b}{360} (3x_1^5 - 10a_1^2x_1^3 + 7a_1^4x_1), \quad (10.1)$$

$$V_2 = \frac{-1}{C^{1212}} \frac{b}{360} (-15x_1^4 + 30a_1^2x_1^2 - 7a_1^4) \quad (10.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{C^{1212}} \frac{bx_1}{360} (3x_1^4 - 10a_1^2x_1^2 + 7a_1^4), \quad V_2 = -\partial_1 W_3 \quad (10.3)$$

### 2.3. Obciążenie dowolnie zmienne



Rys. 6

$$f^3 = \sum_0^{\infty} f^3(n) \sin(\alpha_n x_1) \quad \alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{a_1}$$

$$h^2 = 0$$

warunki brzegowe:

$$x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

$$x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

rozwiązanie wg wzoru (6):

$$-W_3 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{C^{1212}} \left[ 1 + n^2 \pi^2 \frac{C^{1212}}{A^{1313}} \left( \frac{1}{a_1} \right)^2 \right] \frac{a_1^4}{n^4 \pi^4} f^3(n) \sin(\alpha_n x_1) \quad (11.1)$$

$$V_2 = \frac{1}{C^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} \frac{a_1^3}{n^3 \pi^3} f^3(n) \cos(\alpha_n x_1) \right] \quad (11.2)$$



rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{c^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} \frac{a_1^4}{n^4 \pi^4} f_{(n)}^3 \sin(\alpha_n x_1) \right] \quad (11.3)$$

$$V_2 = \frac{1}{c^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} \frac{a_1^3}{n^3 \pi^3} f_{(n)}^3 \cos(\alpha_n x_1) \right] \quad (11.4)$$

Rozpatrzone przypadki obciążeń, obejmują obciążenia o kierunku  $f^3$  stałe, trójkątne, liniowo zmienne i dowolnie opisane szeregiem Fouriera. Różnica między rozwiązaniem równania (6) dla obciążeń liniowo zmiennych i stałych zanika ze wzrostem gęstości siatki. Jednakże dla obciążeń wyrażonych szeregiem Fouriera o wyższych harmonicznych rozwiązanie przybliżonego stosować nie można. Wynika to z wpływu pierwszego składnika w nawiasie wzoru (11.1). Mimo bowiem małej wartości  $\frac{1}{a_1}$  wartość  $n^2 \pi^2$  dla wyższych harmonicznych rośnie. Powoduje to między innymi, że z rozwiązania otrzymanego z równania (8) nie można korzystać przy obciążeniach dynamicznych.

### 3. Obciążenia momentowe

#### Obciążenie stałe momentem

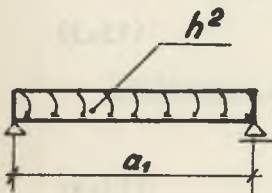
warunki brzegowe:

$$f^3 = 0 \quad x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = M$$

$$h^2 = \text{const.} \quad x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = M$$

rozwiązanie wg wzoru (6):

$$-W_3 = \frac{1}{c^{1212}} \left[ \frac{M}{2} (a_1 x_1 - x_1^2) \right] \quad (12.1)$$



Rys. 7

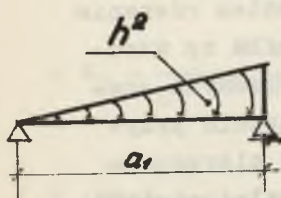
$$V_2 = \frac{-1}{c^{1212}} M \left( x_1 - \frac{a_1}{2} \right) - \frac{1}{A^{1313}} \frac{2}{\pi^2} \quad (12.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{C} \frac{1}{1212} \frac{M}{2} (a_1 x_1 - x_1^2) \quad (12.3)$$

$$V_2 = \frac{-1}{C} \frac{1}{1212} M (x_1 - \frac{a_1}{2}) \quad (12.4)$$

### 3.2. Obciążenie momentowe liniowe



Rys. 8

$f^3 = 0$  warunki brzegowe:

$$x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

$$h^2 = k x_1 \quad x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = 0$$

rozwiązanie wg wzoru (6):

$$-W_3 = \frac{1}{C} \frac{1}{1212} \frac{k}{24} (x_1^4 - 2a_1 x_1^3 + a_1^3 x_1) \quad (13.1)$$

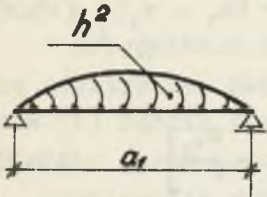
$$V_2 = \frac{-1}{C} \frac{1}{1212} \frac{k}{24} (-4x_1^3 + 6a_1 x_1^2 - a_1^3) - \frac{1^3}{A} \frac{ka_1}{2} \quad (13.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{C} \frac{1}{1212} \frac{k}{24} (x_1^4 - 2a_1 x_1^3 + a_1^3 x_1) \quad (13.3)$$

$$V_2 = \frac{-1}{C} \frac{1}{1212} \frac{k}{24} (-4x_1^3 - 6a_1 x_1^2 - a_1^3) \quad (13.4)$$

3.3. Obciążenie momentowe paraboliczne



Rys. 9

$$f^3 = 0$$

$$h^2 = \frac{4s}{a_1} x_1 (a_1 - x_1)$$

s - strzałka paraboli

rozwiązanie wg wzoru (6):

$$-W_3 = \frac{1}{C^{1212}} \frac{s}{90} \left( 15 \frac{x_1^4}{a_1} - 6 \frac{x_1^5}{a_1^2} - 10 x_1^3 + a_1^2 x_1 \right) \quad (14.1)$$

$$V_2 = \frac{-1}{C^{1212}} \frac{s}{90} \left( -60 \frac{x_1^3}{a_1} + 30 \frac{x_1^4}{a_1^2} + 30 x_1^2 - a_1^2 \right) - \frac{1^2}{A^{1313}} \cdot \frac{2}{3} s \quad (14.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{C^{1212}} \frac{s}{90} \left( 15 \frac{x_1^4}{a_1} - 6 \frac{x_1^5}{a_1^2} - 10 x_1^3 + a_1^2 x_1 \right) \quad (14.3)$$

$$V_2 = \frac{-1}{C^{1212}} \frac{s}{90} \left( -60 \frac{x_1^3}{a_1} + 30 \frac{x_1^4}{a_1^2} + 10 x_1^2 - a_1^2 \right) \quad (14.5)$$

3.4. Obciążenie momentowe zmienne

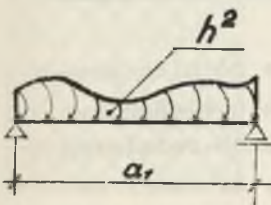
$$f^3 = 0$$

warunki brzegowe:

$$h^2 = \sum_0^{\infty} h^2(n) \cos(\alpha_n x_1) \quad x_1 = 0 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = M$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a_1}$$

$$x_1 = a_1 \quad W_3 = 0 \quad m^{12} = M$$



Rys. 10

rozwiązanie wg wzoru (6):

$$-W_3 = \frac{1}{c^{1212}} \left[ -\sum_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^3} h^2(n) \sin(\alpha_n x_1) + \frac{Mx_1}{2} (a_1 - x_1) \right] \quad (15.1)$$

$$V_2 = \frac{-1}{c^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} h^2(n) \frac{1}{\alpha_n^2} \cos(\alpha_n x_1) + M(x_1 - \frac{a_1}{2}) \right] \quad (15.2)$$

rozwiązanie wg wzoru (8):

$$-W_3 = \frac{1}{c^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} h^2(n) \frac{1}{\alpha_n^3} \sin(\alpha_n x_1) + \frac{Mx_1}{2} (a_1 - x_1) \right] \quad (15.3)$$

$$V_2 = \frac{-1}{c^{1212}} \left[ \sum_0^{\infty} h^2(n) \frac{1}{\alpha_n^2} \cos(\alpha_n x_1) + M(x_1 - \frac{a_1}{2}) \right] \quad (15.4)$$

Obciążenia momentowe obejmują obciążenie momentem ciągłym, zmiennym liniowo, parabolicznie i dowolnie. W schemacie obciążenia momentem ciągłym uwzględniono w warunkach brzegowych działanie momentu zewnętrznego w przekrojach skrajnych  $x_1 = 0$  i  $x_1 = a_1$ . Rozwiązanie przypadku obciążenia momentem ciągłym we wzorach na ugięcie nie wykazuje wpływu obciążenia w przęśle natomiast całe ugięcie wywołane jest momentami brzegowymi.

Przyjęcie w tym przypadku obciążenia w przęśle  $h^2 = 0$  pozwala na uwzględnienie wpływu mimośrodowo siły sprężającej przy sprężeniu siatki kablem prostym.

#### 4. Porównanie rozwiązania równania (6) z rozwiązaniem równania (8)

Z analizy rozwiązań równań (6) i (8) wynika, że różnice powstałe w tych rozwiązaniach zależą od charakteru obciążenia. Okazuje się, że cechą charakterystyczną wszystkich rozwiązań dla schematów obciążeń o kierunku  $f^3$  jest to, że wzory na kąty ugięcia są identyczne, natomiast wzory na ugięcia powsta-

że z równania (8) różnią się o dodatkowy składnik od rozwiązań równania (6). Rola tego składnika omówiona będzie oddzielnie.

W przypadkach obciążeń momentowych  $h^2$  wzory na ugięcia są identyczne, natomiast wzory na kąty ugięcia według równania (6) różnią się od rozwiązań równania (8) o człon uwzględniający obrót prętów w węzłach.

Rozwiązania równań (6) i (8) są niezależnie od typu siatki. Wpływ typu siatki określają współczynniki A i C.

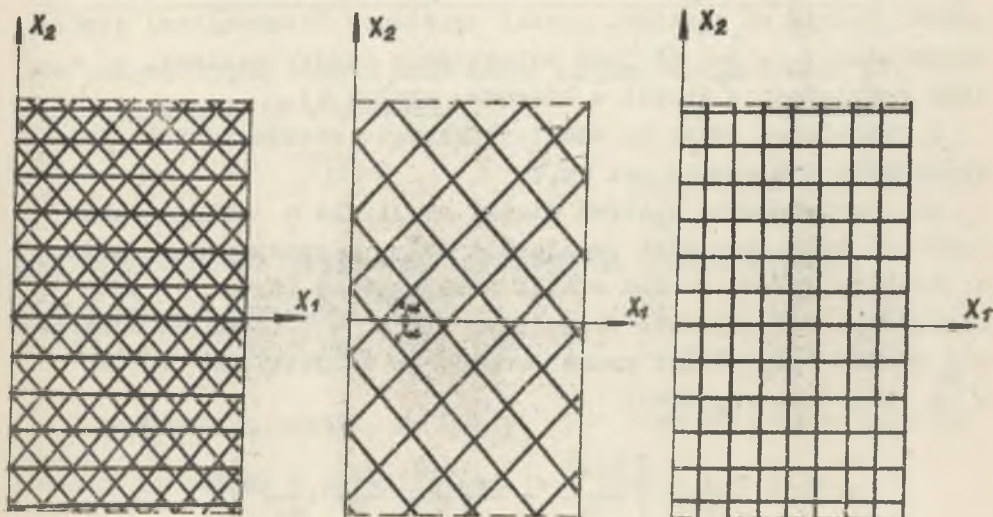
$$A^{1313} = (S_{(1)}^{II} + 8 S^{II} \cos^4 \alpha) a_1^{-2} \lambda^{-1} \quad S_{(2)}^{II} = S_{(3)}^{II} = S^{II}$$

$$A^{2323} = 8 S^{II} \sin^4 \alpha a^{-2} \lambda^{-1}$$

(16)

$$C^{1212} = S_{(1)}^{II} + 2 \cos^2 \alpha (S^I \sin^2 \alpha + S^{II} \cos^2 \alpha)$$

$$C^{1111} = S_{(1)}^{II} + 2 \cos^2 \alpha (S^I \cos^2 \alpha + S^{II} \sin^2 \alpha)$$



Rys. 11

W wzorach tych "a" jest rozpiętością siatki,  $\lambda = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{a_1}\right)^2$   
 $S^I$ ,  $S^{II}$ ,  $S_{(1)}^{II}$ , są sztywnościami skrętnymi i giętnymi włókien.  
 Do porównań przyjęto trzy typy siatek. W zależności od kąta  $\alpha$  stosunek ugięcia poszczególnych siatek do ugięcia siatki typu c) przy założeniu jednakowych sztywności wszystkich włókien będzie wynosił:

Stosunek ugięcia dla siatki typu:		
	a)	b)
15°	0,361	0,535
30°	0,400	0,667
45°	0,500	1,000
60°	0,667	2,000
75°	0,876	7,120

Składnik wyrażający różnicę między rozwiązaniami równań (6) i (8) przy obciążeniach o kierunku  $f^3$  powstaje z uwzględnienia oddziaływania w węzłach siatki w postaci sił skupionych. Wielkość wpływu na ugięcie "węzłowego" oddziaływania włókien siatki zależy od gęstości siatki wyrażonej (stosunkiem) współczynnikiem  $\eta_{\Delta} = \frac{1}{a_{\Delta}}$  ( $l$  jest odległością między węzłami, a  $a_{\Delta}$  jest rozpiętością siatki w kierunku włókna  $\Delta$ ).

W niniejszej pracy do analizy przyjęto stosunek wielkości mierzonych w kierunku osi  $x_1$ .

Dla dostatecznie gęstych siatek czyli dla  $\eta$  małego wobec jedności wpływ ten jest pomijalnie mały. W pracy przeprowadzono analizę wpływu  $\eta$  dla siatki prostokątnej (typu c) przy obciążeniu równomiernie rozłożonym  $f^3 = -p$ . Wzór na ugięcie dla środka rozpiętości pasma rusztowego to jest dla  $x_1 = \frac{a_1}{2}$  przybierze postać:

$$-w_3 = \frac{1}{C} \frac{1}{1212} \left[ \frac{5pa_1^4}{384} + \frac{C}{A} \frac{1212}{1313} \frac{pa_1^3}{8} \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \right]$$

Dla siatki typu c) zachodzi  $A^{1313} = 12 C^{1212}$

a zatem:

$$-w_3 = \frac{1}{C^{1212}} \frac{pa_1^4}{384} \left[ 5 + 4 \left( \frac{1}{a_1} \right)^2 \right]$$

Dla poszczególnych stosunków  $\gamma = \frac{1}{a_1}$  różnica między rozwiązaniami według równań (6) i (8) wynosi:

$\gamma = \frac{1}{a_1}$	Różnica $\frac{4}{5} \left( \frac{1}{a_1} \right)^2$	Różnica w ‰
1:2	1:5	20
1:3	4:45	9
1:4	1:20	5
1:5	4:125	3,2
1:6	1:45	2,2
1:8	1:80	1,25

Dla innych typów siatek zależność między wielkościami A i C można przedstawić w postaci:

$$\overline{A^{1313}} = 12 r \cdot C^{1212} \quad \text{gdzie } r \text{ dla}$$

$\alpha$  od  $0^\circ$  do  $75^\circ$  przyjmuje wartości dla siatek typu:

a) od 3,0 do 0,91

b) od 4,0 do 0,286

Z powyższego wynika, że dla  $\frac{1}{a_1} < \frac{1}{8}$  różnica między rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym jest pomijalnie mała.

### 5. Momenty i siły wewnętrzne

Otrzymane rozwiązania ( $W_3$  i  $V_2$ ) pozwalają na wyznaczenie momentów i sił w poszczególnych prętach siatki.

Wielkości te określa się wzorami:

$$m^\Delta = t_\alpha^\Delta t_\beta^\Delta C_\Delta^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu V_\nu$$

$$\tilde{m}^\Delta = \tilde{t}_\alpha^\Delta \tilde{t}_\beta^\Delta C_\Delta^{\alpha\beta\mu\nu} \partial_\mu V_\nu$$

$$p^\Delta = t_\alpha^\Delta A^{\alpha\beta\mu\gamma} (\partial_\mu W_\beta + \varepsilon_{\mu\gamma}^\nu V_\nu)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia  $N = C^{1212} \partial_1 V_2$  wzory te przyjmują kolejno postać:

a) dla momentów skręcających

$$m^I = 0$$

$$m^{II} = \cos\alpha \cdot \sin\alpha N \frac{C^{1212}_{II}}{C^{1212}}$$

$$m^{III} = -\sin\alpha \cdot \cos\alpha N \frac{C^{1212}_{III}}{C^{1212}}$$

b) dla momentów zginających

$$\tilde{m}^I = N$$

$$\tilde{m}^{II} = -\cos^2\alpha \cdot N \cdot \frac{C^{1212}_{II}}{C^{1212}}$$

$$\tilde{m}^{III} = \cos^2\alpha \cdot N \cdot \frac{C^{1212}_{III}}{C^{1212}}$$

Wprowadzając następnie oznaczenie  $L = \bar{A}^{1313} (\partial_1 W_3 + V_2) l^{-2}$  otrzymamy

$$p^I = 1 \cdot L \frac{A^{1313}_{I_2}}{A^{1313}}$$



$$p^{II} = \cos\alpha \cdot L \cdot \frac{A_{II}^{1313} l_2}{A^{1313}}$$

$$p^{III} = \cos\alpha \cdot L \cdot \frac{A_{III}^{1313} l_2}{A^{1313}}$$

Dla poszczególnych schematów obciążeń  $N$  wynosi:

$$2.1) f^3 = -p \quad h^2 = 0 \quad N = \frac{p}{2}(x_1^2 - a_1 x_1)$$

$$2.2) f^3 = -b x_1, \quad h^2 = 0 \quad N = \frac{b}{a}(a_1^2 x_1 - x_1^3)$$

$$2.3) f^3 = - \sum_0^{\infty} f_{(n)}^3 \sin(\alpha_n x_1), \quad h^2 = 0 \quad N = \sum_0^{\infty} \frac{a_1^2}{n^2 x^2} f_{(n)}^3 \sin(\alpha_n x_1)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a_1}$$

$$3.1) f^3 = 0 \quad h^2 = \text{const.} \quad N = M$$

$$3.2) f^3 = 0 \quad h^2 = k x_1 \quad N = \frac{k}{2}(a_1 x_1 - x_1^2)$$

$$3.3) f^3 = 0 \quad h^2 = \frac{4s}{a_1^2} x_1 (a_1 - x_1) \quad N = \frac{2s}{3a_1^2} (2x_1^3 - 3a_1 x_1^2 + a_1^2 x_1)$$

$$3.4) f^3 = 0 \quad h^2 = \sum_0^{\infty} h_{(n)}^2 \cos(\alpha_n x_1) \quad N = - \sum_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} h_{(n)}^2 \sin(\alpha_n x_1) + M$$

Dla tych samych schematów obciążeń dla  $L$  otrzymamy wyrażenia:

$$2.1) f^3 = -p \quad h^2 = 0 \quad L = \frac{p}{2}(a_1 - 2x_1)$$

$$2.2) f^3 = -b x_1 \quad h^2 = 0 \quad L = \frac{b}{6}(a_1^2 - 3x_1^2)$$

$$2.3) f^3 = - \sum_0^{\infty} f_{(n)}^3 \sin(\alpha_n x_1) \quad h^2 = 0 \quad L = \sum_0^{\infty} \frac{a_1}{n\pi} f_{(n)}^3 \cos(\alpha_n x_1)$$

$$3.1) f^3 = 0 \quad h^2 = \text{const} \quad L = h^2$$

$$3.2) f^3 = 0 \quad h^2 = k \cdot x_1 \quad L = \frac{ka_1}{2}$$

$$3.3) f^3 = 0 \quad h^2 = \frac{4s}{a_1} x_1 (a_1 - x_1) \quad L = \frac{2}{3} s$$

$$3.4) f^3 = 0 \quad h^2 = \sum_0^{\infty} h_{(n)}^2 \cos(\alpha_n x_1) \quad L = \frac{M}{2} (2x_1 - a_1)$$

Wartości  $C_{\Delta}^{1212}$  i  $A_{\Delta}^{1313}$  nie zależą od typu siatki i wynoszą:

$$C_I^{1212} = S_{(1)}^I$$

$$C_{II}^{1212} = C_{III}^{1212} = \cos^2 \alpha (S^I \sin^2 \alpha + S^{II} \cos^2 \alpha)$$

$$A_I^{1313} = S_{(1)}^{II} a_1^{-2} \lambda^{-1}$$

$$A_{II}^{1313} = A_{III}^{1313} = 4 S^{II} \cos^4 \alpha a_1^{-2} \lambda^{-1}$$

Współczynniki  $C^{1212}$  i  $A^{1313}$  zależą od typu siatki i wyrażają się wzorami (16).

Wartości współczynników  $N$  obliczone według rozwiązań równań (6) i (8) są identyczne.

#### LITERATURA

- [1] Woźniak Cz.: Modele ciągłe gęstych siatek prętowych, "Arch. Inż. Łąd.", Tom XI, 2/1965.
- [2] Woźniak Cz.: On the Stability of Dense Plane Bar Grids, "Bull. Acad. Polon. Sci Techn. XIII No 6, 1965.
- [3] Timoshenko S., Woźnowsky-Krieger S.: Teoria płyt i powłok, str. 331-341, tłum. z ang. Arkady, Warszawa 1962.

## ОБНОНАПРАВЛЕННО НАГРУЖЕНИЕ РОСВЕРКОВЫЕ ПОЛОСЫ

## Р е з ю м е

В статье представляется решение однонаправленно нагруженных ростверковых полос, для которых принято модел однородных сплошных сеток. Это особенный случай сплошного вопроса теории волокнистых сред. Рассматривается полосы о схеме балки на двух опорах в длине коротшей стороны. В статье рассмотрено ростверки которых моделем могут быть три типы густых однородных стержневых сеток составных из двох или трох родов волокон. В следствие рассуждения получено решение для отдельных случаи нагрузок в виде оконченном или ряды фурье. Кроме точного решения даётся приближителное и переанализовано разницу между этими решениями в зависимости од густости сетки.

## UNIDIRECTIONALLY LOADED GRATE BANDS

## S u m m a r y

In this article the solution of unidirectionally loaded grate bands has been presented. The model for them is a homogenous continuous network. This is a particular case of the flat problem of the fibrous media theory.

Bands with the scheme of a free-ends beam supported along the shorter side, are taken into consideration. Grates have been looked into, the models of which are three types of homogenous, dense barnets composed of two or three families of fibres.

As a result of those considerations, solutions have been attained in closed form or in Fourier's series for different cases of loads.

Besides an accurate solution, an approximate one has been analysed, depending upon the density of the network.