

ZENON CEROWSKI

PRĘDKOŚĆ FAL SPRĘŻYSTYCH W OŚRODKU DWUFAZOWYM
Z UWZGLĘDNIENIEM SPRĘŻYSTOŚCI STYKÓW

Streszczenie: Na podstawie wyprowadzeń przedstawionych w [1], [2], [3] podano wykresy zależności modułów sprężystości objętościowej od porowatości oraz prędkości rozchodzenia się fal podłużnych w ośrodku dwufazowym.

Do prawidłowego zaprojektowania jakiegokolwiek budowli potrzebna jest znajomość własności fizycznych podłoża gruntowego. Ze względu na złożony charakter tego podłoża prowadzone badania muszą być różnorodne. Jedną z licznych metod badania podłoża jest badanie rozchodzenia się fal sprężystych przy z góry założonym modelu gruntu. Znając prędkość i współczynnik pochłaniania fal sprężystych można prosto obliczyć stałe sprężyste dla skał jednorodnych. Znacznie trudniej jest określić własności gruntów piaszczystych czy też gliniastych, ponieważ są to układy niejednorodne.

W artykule tym rozpatruje się prędkość rozchodzenia podłużnych fal sprężystych w piasku i glinach.

Prędkość fal podłużnych wyraża się następująco [1]

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \quad (1)$$

gdzie:

K - moduł wypadkowy sprężystości objętościowej dla danego ośrodka, którego dokładne określenie podano niżej,

ρ - gęstość wypadkowa dla danego ośrodka $= \rho_s(1 - n) + n\rho_w$ (jeżeli ośrodek jest dwufazowy tzn. składa się z ziaren ośrodka zwanych szkieletem i porów, które mogą być wypełnione innym materiałem - najczęściej spotykanymi materiałami wypełniającymi są powietrze i woda,

ρ_s - gęstość ziaren szkieletu,

ρ_w - gęstość materiału wypełniającego pory.

$$n = \frac{V_w}{V_s + V_w} - \text{współczynnik porowatości}$$

V_w - objętość porów,

V_s - objętość ziaren.

Moduł sprężystości objętościowej dla ciał złożonych wypro-
wadza się w najprostszym wypadku przy założeniu, że deformacja
ciała złożonego jest sumą deformacji ciał składowych. W niniej-
szej pracy do tak określonego modułu dodano moduł sprężystości
deformacji ziaren. Prócz tego założono, że lepkość jest mała,
nie zachodzi więc potrzeba rozważania pochłaniania.

Przy powyższych założeniach całkowity moduł sprężystości
objętościowej:

$$K = K_1 + K_2 \quad (2)$$

gdzie:

$K_1 = \frac{1}{nB_w + (1-n)B_s}$ - moduł sprężystości objętościowej przy
założeniu, że deformacja ciała złożonego jest sumą de-
formacji ciał składowych,

B_w - ścisłość objętościowa porowypełniacza,

B_s - ścisłość objętościowa szkieletu.

$K_2 = -\frac{d p}{d V}$ - objętościowy moduł sprężystości deformacji
ziaren (3)

p - przyłożone ciśnienie,

V - objętość rozpatrywanej próbki.

Zmiany objętości zależą od parametrów gruntu. W związku
z tym rozpatrzono element objętości V , w którym znajduje się
i ziaren. Ponieważ ziarna mają różne wymiary więc średnią
średnicę ziarna w płaszczyźnie poziomej przyjęto równą [1]:

$$r^2 = \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1} r_i^2 \quad (4)$$

Stąd średni przekrój ziarna w płaszczyźnie poziomej:

$$S = C r^2 \quad (5)$$

gdzie: C - współczynnik proporcjonalności zależny od kształtu ziaren,

$$R = \frac{V_s}{C r^2 \alpha} \quad \text{- średnia wysokość poszczególnych ziaren:} \quad (6)$$

Korzystając z wprowadzonych tu wielkości α , S , R można napisać:

$$\text{objętość ziaren} - V_s = \alpha C r^2 R \quad (7)$$

$$\text{objętość porów} - V_w = \frac{\alpha C r^2 R n}{1-n} \quad (8)$$

$$\text{objętość całkowita} - V_o = V_s + V_w = \frac{\alpha C r^2 R}{1-n} \quad (9)$$

Ziarna nie stykają się między sobą całymi powierzchniami lecz tylko częściowo. Przyjmując, że stosunek powierzchni styków do całkowitej powierzchni wynosi m , to pod wpływem przyłożonego pionowego ciśnienia słoje zbliżają się o ΔR .

Wówczas część każdego ziarna proporcjonalna do m zmniejszy swoją wysokość o ΔR a pozostała część będzie bez zmiany.

Uwzględniając poprzeczne rozszerzenie objętość ziaren szkieletu wyniesie:

$$\begin{aligned} V'_s &= C(r + \Delta r)^2 (R - \Delta R) m \alpha + (1 - m) \alpha C r^2 R = \\ &= C r^2 \alpha \left[\left(1 + \nu \frac{R}{r}\right)^2 (R - \Delta R) + (1 - m) R \right] = \\ &= C r^2 R \alpha \left[1 - m \frac{\Delta R}{R} (1 - 2\nu) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: ν - współczynnik Poissona
zaś objętość porów:

$$\begin{aligned} V'_w &= \alpha S \left[1 - \left(1 + \nu \frac{\Delta R}{R}\right)^2 m \right] (R' - \Delta R) = \\ &= C r^2 \alpha R \frac{n}{1-n} \left\{ 1 - \frac{\Delta R}{R} \left[\frac{2\nu m}{1-m} + \frac{(1-m)(1-n)}{n} \right] \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie:

$$R' = \frac{V_w}{S(1-m)} = R \frac{n}{(1-n)(1-m)} - \text{średnia wysokość porów przed deformacją}$$

Objętość całkowita:

$$V'_c = V'_s + V'_w = Cr^2R \frac{1}{1-n} \left\{ 1 - \frac{\Delta R}{R} \left[1 - n - 2vm(1 - n - \frac{n}{1-m}) \right] \right\} \quad (12)$$

Przyjęto, że siłami powodującymi deformację są tylko siły pochodzące od ciśnienia górnych warstw gruntu tj. ciśnienia jakie panuje w pewnym agregacie znajdującym się na głębokości z pochodzącego od warstw zalegających na głębokościach mniejszych niż z [3], a więc

$$p = p_1 + kp_2 \quad (13)$$

gdzie:

p_1 - ciężar słupa szkieletu i przekroju 1 cm^2 ,

p_2 - ciężar słupa cieczy porowypełniacza o przekroju 1 cm^2 ,

$0 \leq k \leq 1$ - współczynnik charakteryzujący jaka część ziaren znajduje się pod ciśnieniem hydrostatycznym p_2 .

Inaczej można określić k jako stopień zementowania ziaren.

Jeżeli przepuszczalność ośrodka jest mała to ciecz wypełniająca pory nie może swobodnie wypływać. Dlatego wskutek deformacji pojawi się dodatkowe ciśnienie p_3 zwane hydrodynamicznym, powodujące rozluźnienie kontaktów ziaren. Praca A_1 sił zewnętrznego ciśnienia musi więc przewyciężyć pracę:

1) sił sprężystości kontaktów ziaren A_2 ,

2) hydrodynamicznego ciśnienia porowypełniacza A_3 ,

$$A_1 = A_2 + A_3 \quad (14)$$

$$A_1 = \int_{V_c}^{V'_c} p \, dV_c - \int_{V_w}^{V'_w} kp_2 \, dV_w$$

$$A_2 = \alpha \int_0^R F dR$$

$$A_3 = \int_{V_w}^{V'_w} (1-k) p_3 dV_w = \int_{V_w}^{V'_w} \frac{1-k}{R} \frac{dV_w}{V_w} dV_w$$

gdzie:

F - średni wzrost siły kontaktu ziaren przypadający na jedno ziarno,

B_w - ściśliwość porowypelniacza.

Podstawiając do równania (13) $\frac{\Delta R}{R} = \epsilon$; $\frac{dR}{R} = d\epsilon$

$$dV_c = V'_c - V_c = -C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left\{ 1-n-2\nu m \left[1-n \left(1 + \frac{1}{1-m} \right) \right] \right\} d\epsilon$$

$$dV_w = V'_w - V_w = -C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left[(1-m)(1-n) + \frac{2\nu m n}{1-m} \right] d\epsilon$$

$$\frac{dV_w}{V_w} = - \frac{d\epsilon}{n} \left[(1-m)(1-n) + \frac{2\nu m n}{1-m} \right]$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \int_0^\epsilon p C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left\{ 1-n-2\nu m \left[1-n \left(1 + \frac{1}{1-m} \right) \right] \right\} d\epsilon - \\ & - \int_0^\epsilon k p_2 C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left[(1-m)(1-n) + \frac{2\nu m n}{1-m} \right] d\epsilon = \\ & = - \int_0^\epsilon \frac{1-k}{B_w n} C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left[\int_0^\epsilon \left[(1-m)(1-n) + \frac{2\nu m n}{1-m} \right] d\epsilon \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[(1-m)(1-n) + \frac{2\nu m n}{1-m} \right] d\epsilon + \alpha \int_0^R F dR \right. \end{aligned}$$

Po przybliżeniu pierwszym wyrazem rozwinięcia w szereg wyrażenia $\frac{1}{1-m}$ równanie powyższe przyjmie postać:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\epsilon} pC \frac{r^2 R \alpha}{1-n} [1 - n - 2\nu m(1 - 2n)] d\epsilon - \\ & - \int_0^{\epsilon} k p_2 C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} [(1-m)(1-n) + 2\nu m n] d\epsilon = \\ & = - \int_0^{\epsilon} \frac{1-k}{B_w n} C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \left\{ \int_0^{\epsilon} [(1-m)(1-n) + 2\nu m n] d\epsilon \times \right. \\ & \quad \left. \times [(1-m)(1-n) + 2 m n] d\epsilon \right\} + \alpha \int_0^{\epsilon} R F d\epsilon \end{aligned} \quad (15)$$

W ogólnej postaci równania (15) rozwiązać nie można, zakładając jednak, że ΔR jest dostatecznie małe można przyjąć wówczas $m = \text{const}$. Przy tym założeniu równanie to daje się prosto scałkować.

$$\begin{aligned} C \frac{r^2 R}{1-n} \left\{ [1-n-2\nu m(1-2n)] p - [(1-m)(1-n) + 2\nu m n] k p_2 \right\} = \\ = \alpha R F + 0,5 C \frac{r^2 R \alpha}{1-n} \frac{1-k}{B_w n} [(1-m)(1-n) + 2\nu m n]^2 \epsilon \end{aligned} \quad (16)$$

Według prawa Hooke'a zależność między naprężeniem a deformacją jest związana wyrażeniem

$$\epsilon = \frac{F}{S m E} \quad (17)$$

gdzie: E - moduł Younga.

Po podstawieniu (16) i (17) w (12) mamy:

$$V_c = C \frac{r^2 R \alpha}{1-n_0} \left[1 - \frac{L(M - N_0) \frac{\rho_w}{\rho_s}}{(1-n)mE + 0,5 \frac{1-c}{nB_w} N^2} p \right] \quad (18)$$

gdzie:

$$L = 1 - n_0 - 2\nu m (1 - 2n_0),$$

$$M = 1-n-2 \, m\nu(1-2n),$$

$$N = (1-m)(1-n)+2m\nu n.$$

Różniczkując (18) względem p i odrzucając wyrażenia z $\frac{dn}{dp}$ i $\frac{dm}{dp}$ (można to uznać gdyż doświadczenie pokazuje, że $\frac{dn}{dp}$ i $\frac{dm}{dp}$ są dużo mniejsze od jedności dla górnych warstw gruntu) otrzymujemy;

$$\frac{dV_c}{dp} = -c \frac{r^2 R_0 c}{1-n_0} \frac{L(M-Nk \frac{\rho_w}{\rho_s})}{(1-n)^{mE-0,5} \frac{1-k}{B_w n} N^2} \quad (19)$$

Wprowadzając to wyrażenie w (3)

$$K_2 = \frac{(1-n)^{mE-0,5} \frac{1-k}{B_w n} N^2}{L(M-Nk \frac{\rho_w}{\rho_s})} \quad (20)$$

Na prędkość fal podłużnych otrzymujemy następujące wyrażenie

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{1}{nB_w + (1-n)B_w} + \frac{(1-n)^{mE-0,5} \frac{1-k}{B_w n} N^2}{L(M-Nk \frac{\rho_w}{\rho_s})}} \quad (21)$$

W wyrażeniu tym nie ma wyraźnej zależności od p , ale jak już poprzednio zaznaczono $n = n(p)$, $m = m(p)$ oraz $k = k(p)$. Dla piasku wyrażenie (21) można znacznie uprościć, przyjmując, że ziarna piasku są jednorodnymi kulkami o promieniu R , wówczas $k = 1$ oraz relacja między odkształceniem a naprężeniem według teorii Hertza [2] daje:

$$R = 1,65 \sqrt[3]{\frac{2F^2(1-\nu^2)^2}{RE^2}} \quad (22)$$

Korzystając z (4), (16) i (21) otrzymamy

$$m = \frac{4}{1,65\pi} \sqrt[3]{\frac{F}{2(1-\nu^2)^2 ER^2}} \quad (23)$$

ponieważ dla kuli $C = \frac{\pi}{4}$

Ciężar przypadający na każde ziarno wynosi

$$F = \frac{\pi}{3} R^2 (\rho_s - \rho_w) g z, \quad (24)$$

gdzie:

g - przyspieszenie ziemskie,

z - głębokość zalegania

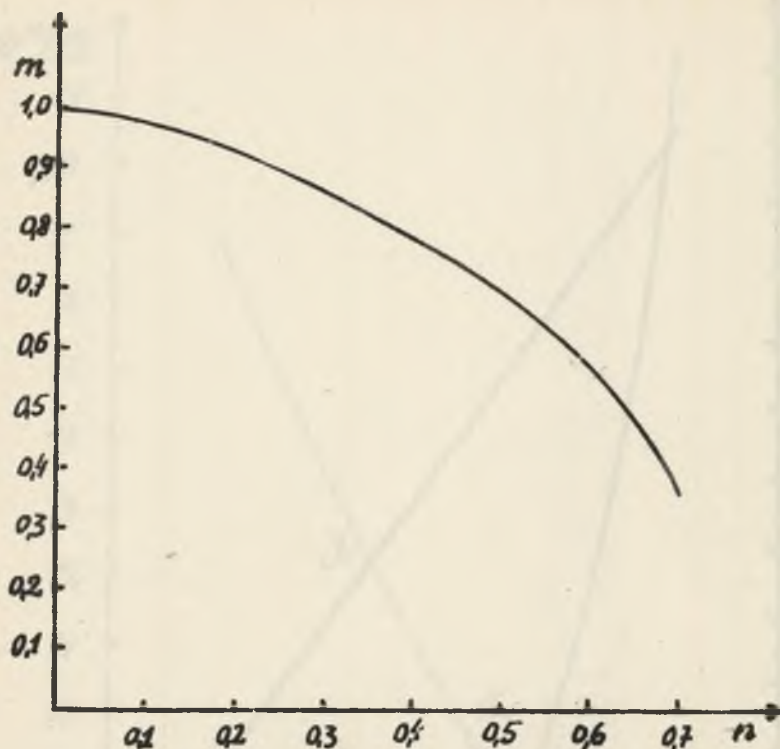
Z równań (21), (23) i (24) dla piasku mamy:

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{1}{nB_w + (1-n) B_s} + 7,4 \frac{1-n}{n(1-\frac{\rho_w}{\rho_s})} \sqrt[3]{\frac{E^2 (\rho_s - \rho_w) z}{(1-\nu^2)^2}}}$$

Stąd widać, że prędkość jest proporcjonalna do pierwiastka szóstego stopnia z głębokości zalegania. Na podstawie tych wyrażen przeprowadzono dyskusję za pomocą wykresów zależności m ; K_1 ; K_2 oraz prędkości rozchodzenia się fal przy uwzględnieniu tylko modułów sprężystości objętościowej ciał składowych (K_1) oraz przy uwzględnieniu modułu sprężystości objętościowej ciał składowych i modułu sprężystości objętościowej deformacji styków ($K_1 + K_2$) od porowatości.

Rysunek 1 przedstawia zależność m od n przy założeniu, że wzrost płaszczyzny kontaktów zmienia się wskutek poprzecznego rozszerzenia ziaren, jak to robi Kozłow [1]. Wówczas otrzymano:

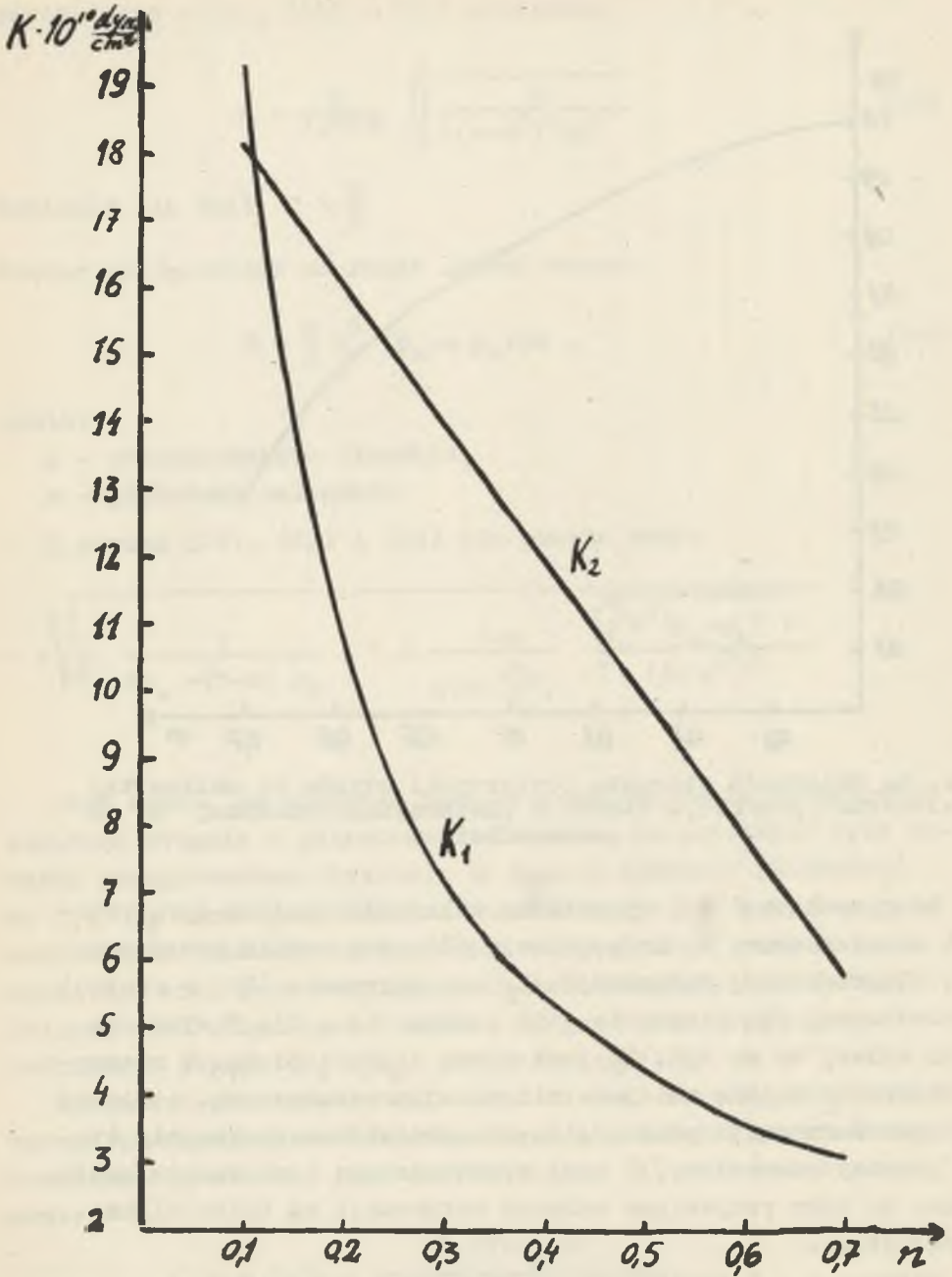
$$m = 0,36 + \frac{0,18(n_0 - n)}{(1-n_0)(0,64 - 0,53n)}$$



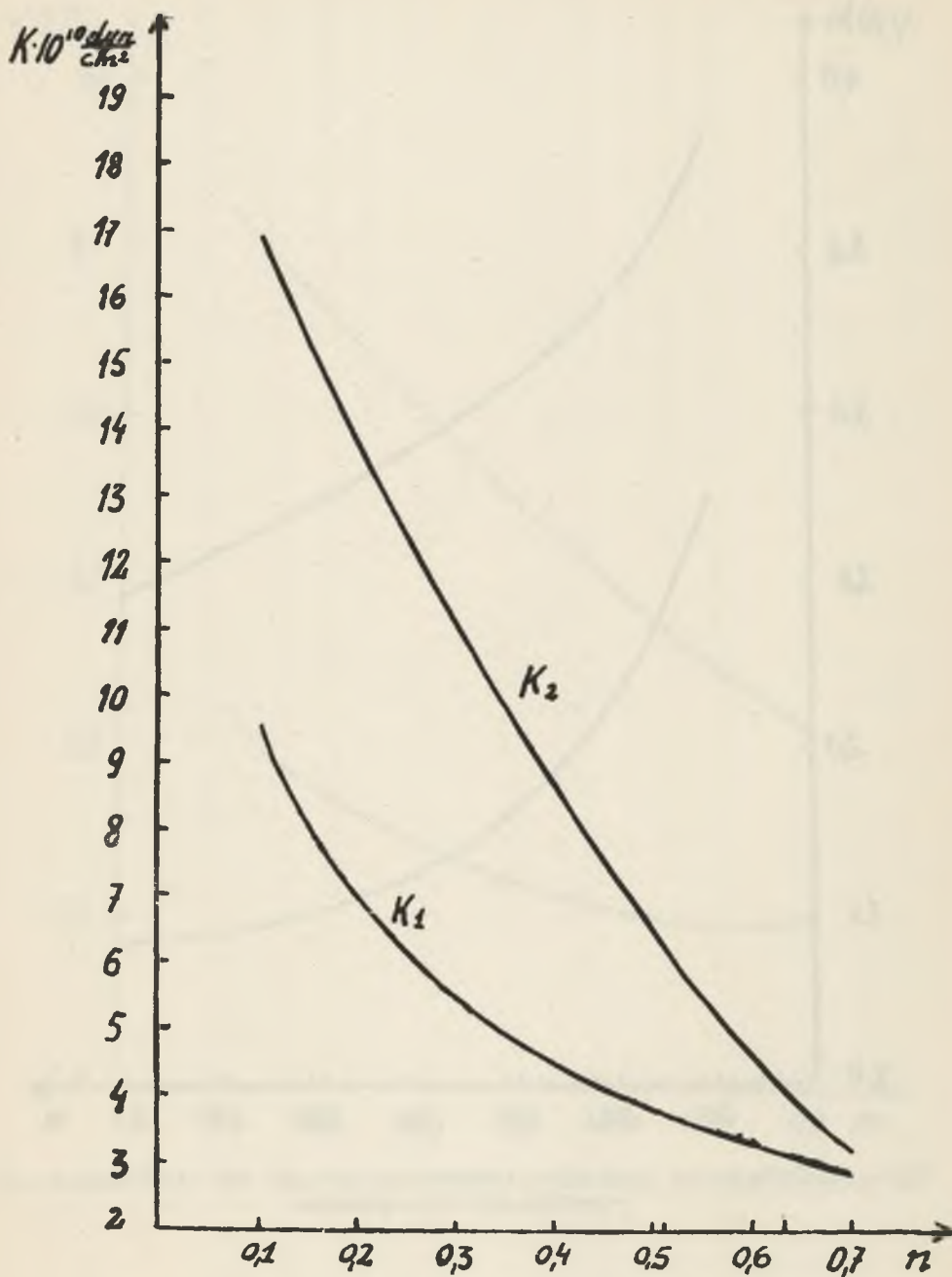
Rys. 1. Zależność stosunku powierzchni styków do całkowitej powierzchni przekroju ziaren w płaszczyźnie poziomej m od porowatości n

Na rysunkach 2 i 3 wykreślono zależności modułu sprężystości objętościowej K_1 na podstawie (2) oraz modułu sprężystości objętościowej deformacji K_2 na podstawie (20) w funkcji porowatości, dla piasku ($k = 1$) i gliny ($k = 0$). Z wykresów tych widać, że na ogół K_2 jest nieco większe od K_1 . W rzeczywistości K_2 będzie mniejsze niż tutaj przedstawiono, ponieważ podczas deformacji poszczególnych agregatów zachodzą nie tylko procesy odwracalne, a przy wyprowadzeniu tych wzorów zakładano, że siły powstające wskutek deformacji są tylko siłami sprężystymi.

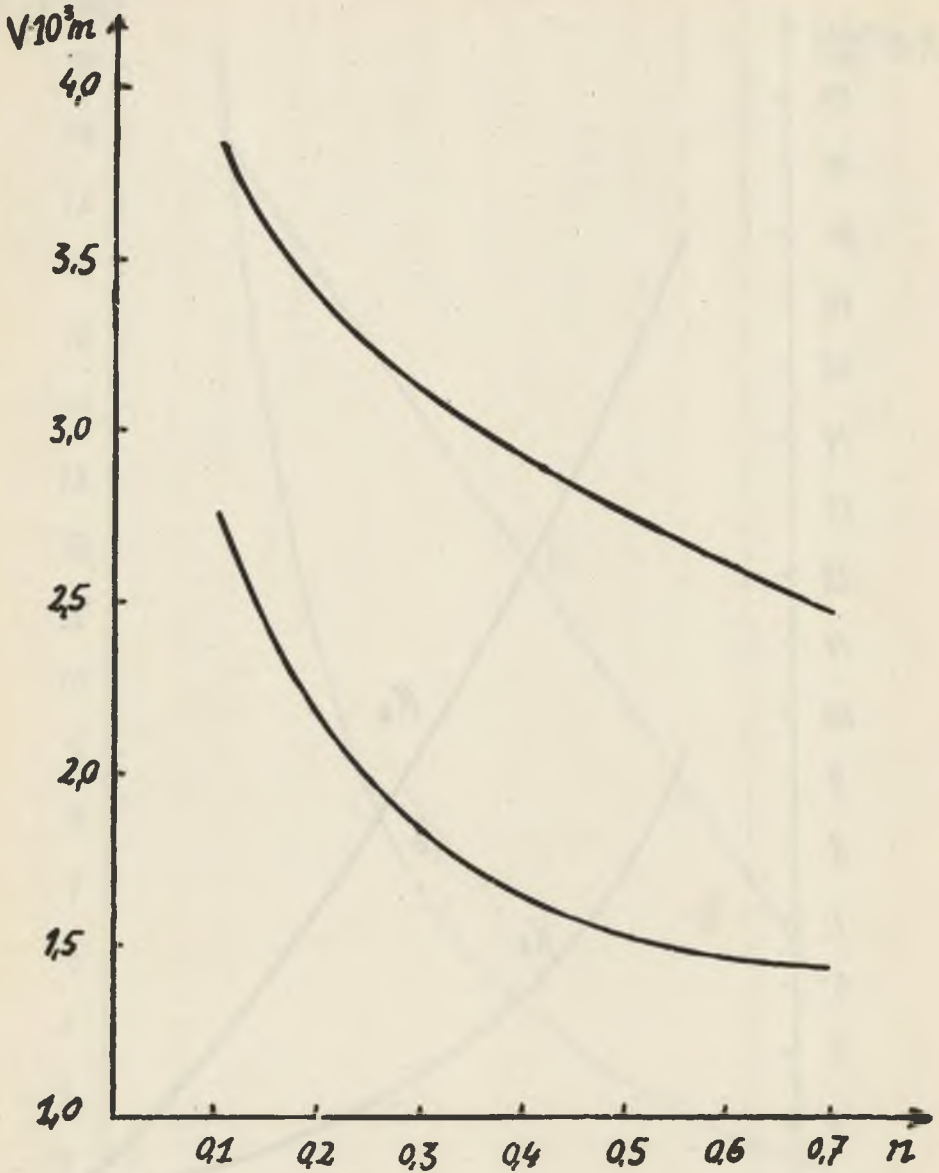
Wykresy 4 i 5 przedstawiają zależności prędkości od porowatości bez uwzględnienia sprężystości styków ($v = \sqrt{\frac{K_1}{\rho}}$) oraz



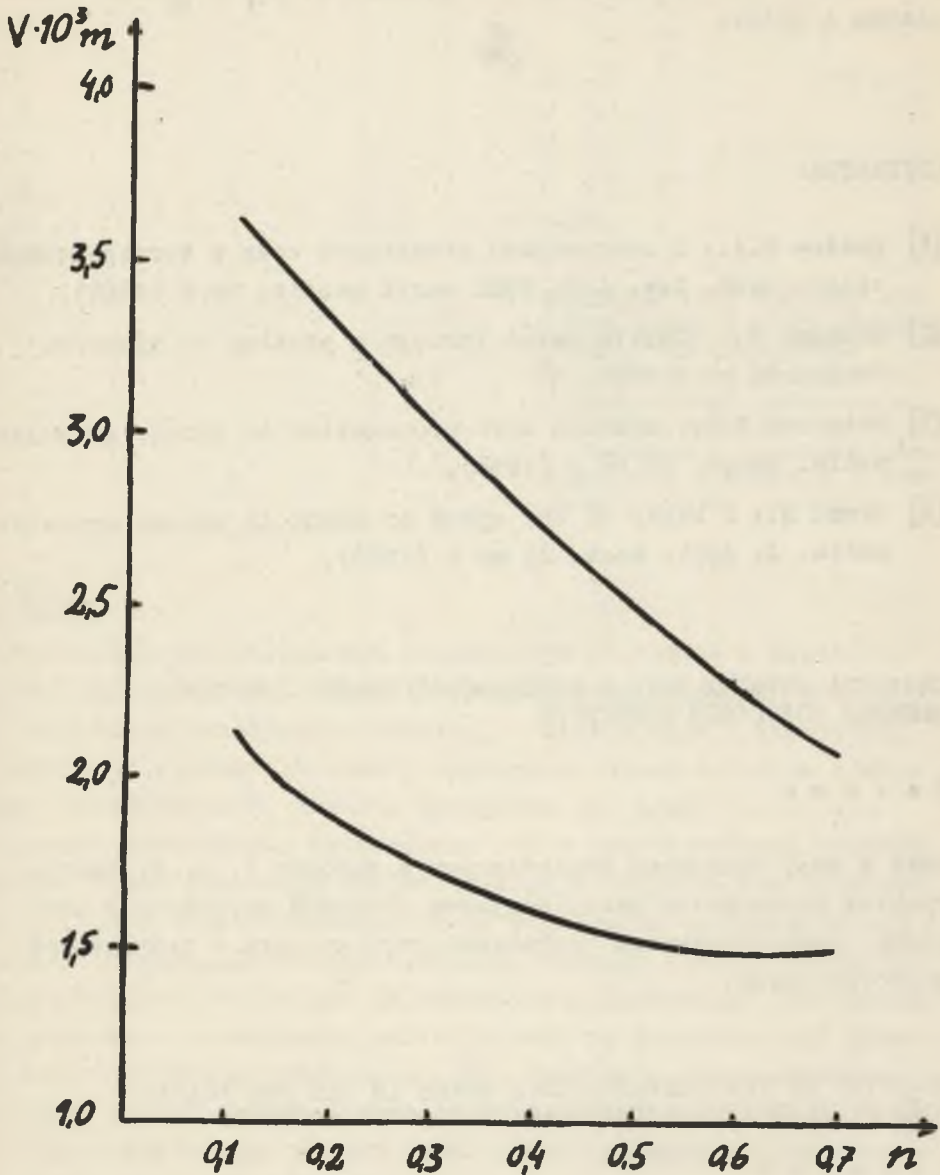
Rys. 2. Zależności K_1 i K_2 od porowatości dla piasku



Rys. 3. Zależności K_1 i K_2 od porowatości dla gliny



Rys. 4. Zależność prędkości rozchodzenia się fal podłużnych od porowatości dla piasku



Rys. 5. Zależność prędkości rozchodzenia się fal podłużnych od porowatości dla gliny

z uwzględnieniem sprężystości kontaktów ($v = \sqrt{\frac{K_1 + K_2}{\phi}}$) dla piasku i gliny.

LITERATURA

- [1] Kozłow E.A.: O skorosciach prodolnych wołn w terrigentnych otłozeniach. Izv. A.N. ZSRR seria geofiz. nr 8 (1962).
- [2] Gassman F.: Elastic waves through a packing of spheres. Geoph. 16 nr 4 1951.
- [3] Peterson N.R.: Seismic wave propagation in porous granular media. Geoph. 21 nr 3 (1956).
- [4] Brand H.: A study of the speed of sound in porous granular media. J. Appl. Mech. 22 nr 4 (1955).

СКОРОСТЬ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХФАЗОВОЙ СРЕДЕ С УЧЁТОМ
ВЛИЯНИЯ УПРУГОСТИ КОНТАКТОВ

Р е з ю м е

Имея в виду выведения представлены в работах 1, 2, 3, даётся графики соотношения между модулями объёмной упругости и скоростью распространения продольных упругих волн в двухфазовой пористой среде.

VELOCITY OF THE COMPRESSIONAL WAVES IN THE TWO PHASES
CORE AT TAKE INTO CONSIDERATION ELASTIC CONTACTS

S u m m a r y

Based on the conclusion describe in 1, 2, 3 give graphs dependence elasticity bulk modulus and velocity compressional waves in the two phases core versus porosity.